数学名著译丛

〔美〕S.C.克林 著

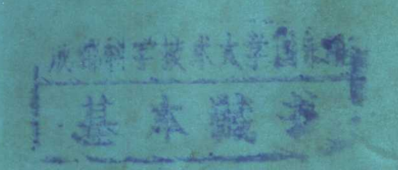




# 元数学导论

下册





科学出版社

统一书号：13031·2971

定　　价：　4.10　元

本社书号：4032·13-1

科技新书目：102-26

数学名著译丛

# 元 数 学 导 论

## 下册

〔美〕S. C. 克林 著

莫绍揆 译

科 学 出 版 社

1985

## 内 容 简 介

本书是数理逻辑方面的一本名著，既概括了数学基础的主要内容，也概括了这方面所产生的若干基本方向．本书为数理逻辑和递归函数论提供一个有系统的导论，也为更新的数学基础的探讨提供一个有系统的导论．

本书可供高等学校数学系师生以及有关研究人员参考．


S. C. Kleene

INTRODUCTION TO METAMATHEMATICS

Van Nostrand

数学名著译丛

元 数 学 导 论

下 册

〔美〕S. C. 克林 著

莫绍揆 译

责任编辑 杨贤英

科 学 出 版 社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1985 年 9 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1985 年 9 月第一次印刷 印张：14 5/8

印数：0001—6,000 字数：381,000

统一书号：13031・2971

本社书号：4032 13—1

定价：4.10 元

# 符 号 与 记 号

## 集 合 论



## 数理逻辑与形式数论

## 递归函数与非形式数论

# 公理、引理、定理、公式表

本书中对定理、引理及各可证公式的编号是贯通全书的，而且编号系统非常复杂，当在后面征引前面的结果时，查阅非常困难，故特制本表。“例”与“系”均在各节内自行编号，极易查索，故不列入。(表中节号后面的数字表示页码.)

# 目　　录

## 第三部分　递归函数

## 第四部分 数理逻辑(附加项目)

# 第三部分　递归函数

## 第九章　原始递归函数

### § 43. 原始递归函数

为了要证明哥德尔定理的引理，我们将对某一类数论函数及谓词来发展一个直觉理论，从而证明这个类里的每个谓词都可以在形式体系内数字地表示（§ 49），而引理内两谓词 $A(a, b)$ 及 $B(a,c)$ 便属于这一类（§ 52）．这便使得我们免去在形式系统内逐步逐步地展开的麻烦．

除却刚才所说的应用外，这些函数及谓词的理论的发展将和前几章的形式系统无关．在这理论内，和元数学中一样，我们只用有穷性方法[1]．

我们把自然数列

$$0,\ 0',\ 0'',\ 0''',\ \cdots$$

或 0，1，2，3，……当作由一个原始客体 0 出发，应用一个原始运算′或 +1 而造成的客体的类．这实质上便是自然数类的归纳定义（§ 6）．

归纳证明，作为对任何自然数 $y$ 而证明定理 $T(y)$ 的方法言，便直接相应于这种产生数的方法（§7）．依归纳而定义（不要和‘归纳定义’相混，§6，§53），亦叫递归定义，是定义数论函数 $\varphi(y)$ 或数论谓词 $P(y)$ 的相似的方法．首先给出 $\varphi(0)$ 或 $P(0)$（以 0 为变目时函数或谓词的值），其次，对任何自然数 $y$，用 $y$ 及 $\varphi(y)$ 或 $P(y)$（以 $y$ 为变目时的值）来表出 $\varphi(y')$ 或 $P(y')$（以 $y$ 之后一数为

1）参见第 66 页的脚注、依（俄）译者的意见，作者并没有一贯地遵守他自己所宣告的有穷性方法（例如，见第 246，292 诸页脚注）——俄译者注．

变目的值）．类似地，我们可以作结论说，在这种情况下，函数或谓词的值 $\varphi(y)$ 或 $P(y)$ 便对每个自然数 $y$ 都定义了．因为由这定义的两部分可以使我们在产生数 $y$ 的同时亦决定了值 $\varphi(y)$ 或 $P(y)$．

为了详细考查它，可写出两个方程

$$(1)\qquad \begin{cases}\varphi(0)=q,\\ \varphi(y')=\chi(y,\ \varphi(y)),\end{cases}$$

它们就 $y$ 而递归地定义了函数 $\varphi(y)$，这里 $q$ 是一个给定的自然数，而 $\chi(y,z)$ 是给定的一个二元数论函数．

例如，值 $\varphi(4)$ 便可如下确定，为了要生成 4，我们逐次地生成 0，1，2，3，4，由第一个方程可知值 $\varphi(0)$ 便是所给的数 $q$；然后由第二个方程，值 $\varphi(1)$ 为 $\chi(0,\varphi(0))$ 亦即（应用已得的值 $\varphi(0)$）$\chi(0,q)$，而这是一个已知的数（因为 $\chi(y,z)$ 是一个给定的函数）；又其次，$\varphi(2)$ 将是 $\chi(1,\varphi(1))$，亦即 $\chi(1,\chi(0,q))$；值 $\varphi(3)$ 将是 $\chi(2,\varphi(2))$ 即 $\chi(2,\chi(1,\chi(0,q)))$；最后，值 $\varphi(4)$ 将是 $\chi(3,\varphi(3))$，即 $\chi(3,\chi(2,\chi(1,\chi(0,q))))$．

因此，对于每一个自然数 $y$，只须看在自然数列中 $y$ 的产生过程便可以有一过程决定相应的数 $\varphi(y)$．这样，对于每一数 $y$ 都对应着一数 $\varphi(y)$，亦即定义了一个特殊数论函数 $\varphi$，它以这些数 $\varphi(y)$ 作为它的各个值．

当把（1）考虑为未知函数 $\varphi$ 的泛函方程时，函数 $\varphi$ 适合方程（1），因为包含于（1）中的每个特殊方程（即 $\varphi(0)=q$，$\varphi(0')=\chi(0,\varphi(0))$，$\varphi(1')=\chi(1,\varphi(1))$，…等等）被相继地选择的数 $\varphi(0)$，$\varphi(1)$，$\varphi(2)$，…所满足．又当（1）作为泛函方程时，只有 $\varphi$ 才满足它，因此我们由方程（1）而决定相继的数 $\varphi(0)$，$\varphi(1)$，$\varphi(2)$，…，这过程可以释义为：任何满足这方程的函数必须具有所选择的值．

在别的递归定义中，所定义的函数 $\varphi$ 还与别的变元 $x_2,\cdots,x_n$ 有关，后者叫做参数，当对 $y$ 而作归纳时，它们永取固定的值．

**例 1** 试直觉地考虑下二方程

$$\begin{cases} a + 0 = a, \\ a + b' = (a + b)'. \end{cases}$$

我们曾把它们作为前一章形式符号体系中的公理18及19. 这两方程就 $b$ 归纳而定义了函数 $a + b$，而以 $a$ 作为参数，$'$ 作为预先已知的函数. 其次下二方程

$$\begin{cases} a \cdot 0 = 0, \\ a \cdot b' = (a \cdot b) + a, \end{cases}$$

便就 $b$ 归纳而定义 $a \cdot b$，以 $a + b$ 作为已知函数；又

$$\begin{cases} a^0 = 1, \\ a^{b'} = a^b \cdot a, \end{cases}$$

就 $b$ 归纳而定义 $a^b$，以 $a \cdot b$ 作为已知函数.

依归纳而定义谓词的例子见后（§ 45，例 2）.

什么数论函数是可以递归地定义的[1]? 要把这问题弄得明确，我们必须指明什么函数是作为一开始便知道的，在定义新函数时允许使用什么运算，包括允许什么样式的递归定义.

我们现在先给出一个明指，由它可以得到用初等的递归式所能得到的函数. 这些函数将叫做'原始递归的'.

下列方程（I）—（V）中每一方程和方程组都定义一个数论函数 $\varphi$，其中 $n$ 与 $m$ 为正整数，$i$ 为整数 $1 \leqslant i \leqslant n$，$q$ 为自然数，而 $\psi, \chi_1, \cdots, \chi_m, \chi$ 等则为给定的数论函数，其变元的个数已相应地标出了.

(I) $\qquad \varphi(x) = x'.$

(II) $\qquad \varphi(x_1, \cdots, x_n) = q.$

(III) $\qquad \varphi(x_1, \cdots, x_n) = x_i.$

(IV) $\qquad \varphi(x_1, \cdots, x_n) = \psi(\chi_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, \chi_m(x_1, \cdots, x_n)).$

(Va) $\qquad \begin{cases} \varphi(0) = q, \\ \varphi(y') = \chi(y, \varphi(y)) \end{cases}$

1）从现在起，不管原文为 definition by induction 还是 recursive definition，一律译为"递归定义"——译者注.

$$(\text{Vb})\quad \begin{cases}\varphi(0, x_2, \cdots, x_n) = \psi(x_2, \cdots, x_n),\\ \varphi(y', x_2, \cdots, x_n) = \chi(y, \varphi(y, x_2, \cdots, x_n), x_2, \cdots, x_n).\end{cases}$$

((Va) 便是 $n = 1$ 时的 (V), (Vb) 是 $n > 1$ 时的 (V). )

如果一函数可以由逐次应用这个五个定义运算而定义出，则它叫做原始递归的.

这定义亦可以更详细地给出，类似于形式体系的可证公式的定义 (§ 19), 如果用第二种说法，便如下.

我们把上述的方程或方程对偶 (I)—(V) 叫做模式,它们很类似于公设, (I)—(III) 有公理模式的作用(更严格些, (I) 类似于一个特殊公理),而 (IV) (V) 有推论规则的作用.

函数 $\varphi$ 将叫做开始函数，如果 $\varphi$ 满足方程 (I), 或满足具有某些特定的 $n, q$ 的方程 (II), 或满足具有某些特定的 $n, i$ 的方程 (III).

如果 $\varphi$ 满足具有某些特定的 $n, m$ 的方程 (IV), 则函数 $\varphi$ 叫做直接依赖于函数 $\psi, \chi_1, \cdots, \chi_m$; 如果 $\varphi$ 满足具有特定的 $q$ 的方程 (Va), 则 $\varphi$ 叫做直接依赖于函数 $\chi$; 如果 $\varphi$ 满足具有特定的 $n$ 的方程 (Vb), 则 $\varphi$ 叫做直接依赖于函数 $\psi, \chi$.

函数 $\varphi$ 叫做原始递归的,如果有有穷函数序列 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_k$ $(k \geq 1)$ (叫做 $\varphi$ 的原始递归描述) 使得这序列中每个函数或者是一个开始函数,或者是直接依赖于序列中在前的函数,并且最后一函数 $\varphi_k$ 便是 $\varphi$.

## § 44. 显 式 定 义

本章的第一个问题是要把好些已由其它方式而知道的函数认出它们是原始递归的. (类似地,当研究形式系统时，我们由公理而推演出一些形式定理，并推演出导出规则作为获得更多的定理的一般方法. )

我们对各模式都给以定型，以使原始递归函数类的定义得以简化. 在本节的其余部分,我们将看看它们的一些应用.

模式 (I) 给出后继函数作为开始函数之一，我们把它记为 $S$. 模式 (II) 所给出的开始函数叫做常函数，记为 $C_q^n$. 模式 (III) 所给出的开始函数叫做么函数[1)],记为 $U_i^n$.

模式 (IV) 叫做依代入而定义的模式[2)]. $\varphi$ 的未定值的表达式可由把 $\chi_1, \cdots, \chi_m$ 的未定值表达式代入 $\psi$ 的变元处而得. 应用这模式而定义的函数 $\varphi$ 有时记为 $\mathbf{S}_m^n(\psi, \chi_1, \cdots, \chi_m)$.

对一函数作显式定义便是把它的未定值的表达式如下地作成:由它的自变元(此外没有其它的自由变元)及给定的函数符号、常数符号及运算子符号[3)]等等用造句法而作成. 在特例,我们说一函数 $\varphi$ 可由函数 $\psi_1 \cdots, \psi_l$ 及常数 $q_1 \cdots, q_s$ 而显式地定义 (或称显式于这些函数及常数), 如果 $\varphi$ 的未定值的表达式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 可以由变元 $x_1, \cdots, x_n$, 常数 $q_1, \cdots, q_s$ 及函数 $\psi_1, \cdots, \psi_l$ 而表出(参见 §10 例 2). 在这情形, $\varphi$ 可由 $\psi_1, \cdots, \psi_l$ 经一系列的应用模式 (II)—(IV) 而作出. 因为模式 (II) (III) 可把每个常数及每个变元 $x_1, \cdots, x_n$ 都作为所有变元 $x_1, \cdots, x_n$ 的函数而给出，然后用以组成未定值表达式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 的各个代入便全都适合标准形 (IV) 了.

**例 1** 试考虑下列显式定义

(a) $$\varphi(x, z, y) = \zeta(x, \eta(y, \theta(x)), 2).$$

今把右边的 $x, y$ 及 2 都当作 $x, z, y$ 的函数,则

$$\varphi(x, z, y) = \zeta(U_1^3(x, z, y), \eta(U_3^3(x, z, y), \theta(U_1^3(x, z, y))), C_2^3(x, z, y)).$$

然后我们便可以看见由 $\zeta, \eta, \theta$ 经过下面列出的逐次应用模式 (II)—(IV) 而定义 $\varphi$. 被依次使用的函数在左边加以命名或定义, 模式的使用则在右边加以分析. 例如，在第五步是就 $n = 3$ 及

1) 原文为 identity function, 不宜译为恒等函数——译者注.

2) 又叫做迭置模式——译者注.

3) "给定的函数符号"指 $S$ 及 $U_i^n$, "给定的常数符号"指 $C_q^n$, "给定的运算子符号"指 $\mathbf{S}_m^n(\psi, \chi_1, \cdots, \chi_m)$. 下文的"可以由…而表出"亦指兼用这些符号而表出(不包括递归模式 (V)). 又按,所谓"用造句法而作成""可由…而表出"均不够明确,不如直说"经一系列的应用 (II)—(IV) 而作出" (原书把这句作为解释, 不作为正式定义)——译者注.

$m=1$ 而使用模式 (IV)，把前面第三步第四步的函数作为 (IV) 中的 $\psi$ 及 $\chi$.

1. $\zeta$——第一个给定函数.
2. $\eta$——第二个给定函数.
3. $\theta$——第三个给定函数.
4. $U_1^3(x, z, y)=x$——(III), $n=3$, $i=1$.
5. $\theta_1(x, z, y)=\theta(U_1^3(x, z, y))$——(IV), $n=3$, $m=1$; 3, 4.
6. $U_3^3(x, z, y)=y$——(III), $n=3$, $i=3$.
7. $\psi(x, z, y)=\eta(U_3^3(x, z, y), \theta_1(x, z, y))$——(IV), $n=3$, $m=2$; 2, 6, 5.
8. $C_2^3(x, z, y)=2$——(II), $n=3$, $q=2$.
9. $\varphi(x, z, y)=\zeta(U_1^3(x, z, y), \psi(x, z, y), C_2^3(x, z, y))$——(IV), $n=3$, $m=3$; 1, 4, 7, 8.

注意，由 $\zeta, \eta, \theta$ 到 $\varphi$ 的这个定义亦可以符号地表为

(b) $$\varphi=\mathbf{S}_3^3(\zeta, U_1^3, \mathbf{S}_2^3(\eta, U_3^3, \mathbf{S}_1^3(\theta, U_1^3)), C_2^3).$$

如果 $\zeta, \eta, \theta$ 为原始递归则 $\varphi$ 亦然；而 $\varphi$ 的原始递归描述 $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ 便是 $\cdots, \zeta, \cdots, \eta, \cdots, \theta, U_1^3, \theta_1, U_3^3, \psi, C_2^3, \varphi$，这里 $\cdots, \zeta, \cdots, \eta; \cdots, \theta$ 则分别是 $\zeta, \eta, \theta$ 的描述.

在显式定义的分析中而使用么函数 $U_i^n$，乃创自哥德尔(Gödel) [1934].

模式 (V) 叫做原始递归模式，(Va) 是没有参数的，(Vb) 是有参数的. 有时我们把这样定义的 $\varphi$ 记为 $\mathbf{R}_q^1(\chi)$ (对 (Va)) 或 $\mathbf{R}^n(\psi, \chi)$ (对 (Vb)). 但是，当说到"原始递归式"时，我们理解为在应用 (V) 时可以杂有一些显式定义的步骤的.

**例 2** 要对 $a+b$ 的原始递归式 (§ 43, 例 1) 加以分析，可先把 $a+b$ 写成 $\varphi(a, b)$ 而重新写出递归式如下.

$$\begin{cases}\varphi(0, a)=a & [=U_1^1(a)],\\ \varphi(b', a)=(\varphi(b, a))' & [=\chi(b, \varphi(b, a), a)],\end{cases}$$

(这里 $\chi(b, c, a)=c'=S(U_2^3(b, c, a))$.)

当把右端照方括号所列而表示时，它满足(Vb)，因此我们可把该定义如下作出：

1. $S(a)=a'$——(I).

2. $U_1^1(a)=a$——(III), $n=1, i=1$.

3. $U_2^3(b,c,a)=c$——(III), $n=3, i=2$.

4. $\chi(b,c,a)=S(U_2^3(b,c,a))$——(IV)

$$n=3, m=1; 1,3.$$

5. $\begin{cases}\varphi(0,a)=U_1^1(a)\\ \varphi(b',a)=\chi(b,\varphi(b,a),a)\end{cases}$——(Vb), $n=2; 2, 4$.

这指出了，如果把 $a+b$ 当作 $\varphi(b,a)$ (即 $\varphi=\lambda ba\ a+b$，参见§10 例 3)，它便是原始递归的，而 $S$, $U_1^1$, $U_2^3$, $\chi$, $\varphi$ 便是它的原始递归描述. 再作三个步骤我们便得到作为 $\varphi_1(a,b)$ 的 $a+b$ (即 $\varphi_1=\lambda ab\ \ a+b$). 符号地表示为

$$\lambda ba\ \ a+b=\mathbf{R}^2(U_1^1, \mathbf{S}_1^3(S, U_2^3)),$$

$$\lambda ab\ \ a+b=\mathbf{S}_2^2(\mathbf{R}^2(U_1^1, \mathbf{S}_1^3(S, U_2^3)), U_2^2, U_1^2).$$

这里表示一般的方法. 由于 $a+b$ 有可换性，$\varphi_1(a,b)=\varphi(a,b)$，故这里最后三个步骤可省. 但处理例如 $a^b$ 的递归式时这些步骤便不能省了.

现在我们便使用这些技巧来得出一系列的函数的原始递归性. 下面左端所列的函数都是原始递归的. 要核验这点，读者可看出，首先右边所写出的显式定义及原始递归式的确产生了原始递归函数，其次，所产生的函数与左端所命名或定义的函数是一样的.

#1. $a+b$ $\begin{cases}a+0=a\\ a+b'=(a+b)'\end{cases}$

#2. $a\cdot b$ $\begin{cases}a\cdot 0=0\\ a\cdot b'=a\cdot b+a\end{cases}$

#3. $a^b$ (亦写为 $a\exp b$) $\begin{cases}a^0=1\\ a^{b'}=a^b\cdot a\end{cases}$

\# 4. $a!$ $\begin{cases} 0! = 1 \\ a'! = a!a' \end{cases}$

\# 5. $\mathrm{pd}(a) = \begin{cases} a \text{ 的前行者} \\ \quad \text{当 } a > 0 \text{ 时} \\ 0 \text{ 当 } a = 0 \text{ 时} \end{cases}$ $\begin{cases} \mathrm{pd}(0) = 0 \\ \mathrm{pd}(a') = a \end{cases}$

\# 6. $a \dot{-} b = \begin{cases} a - b \text{ 当 } a \geqslant b \text{ 时} \\ 0 \text{ 当 } a < b \text{ 时} \end{cases}$ $\begin{cases} a \dot{-} 0 = a \\ a \dot{-} b' = \mathrm{pd}(a \dot{-} b) \end{cases}$

\# 7. $\min(a, b)$ $\min(a, b) = b \dot{-} (b \dot{-} a)$

\# 7a. $\min(a_1, \cdots, a_n)$ $\min(a_1, \cdots, a_n) = \min(\cdots\min(\min(a_1, a_2), a_3)\cdots a_n)$

\# 8. $\max(a, b)$ $\max(a, b) = (a + b) \dot{-} \min(a, b)$

\# 8a. $\max(a_1, \cdots, a_n)$ 仿 # 7a.

\# 9. $\overline{\mathrm{sg}}(a) = \begin{cases} 1 \text{ 当 } a = 0 \text{ 时} \\ 0 \text{ 当 } a > 0 \text{ 时} \end{cases}$ 或 $\overline{\mathrm{sg}}(a) = 1 \dot{-} a$ 或 $\overline{\mathrm{sg}}(a) = 0^a$ 或 $\begin{cases} \overline{\mathrm{sg}}(0) = 1 \\ \overline{\mathrm{sg}}(a') = 0 \end{cases}$

\# 10. $\mathrm{sg}(a) = \begin{cases} 0 \text{ 当 } a = 0 \text{ 时} \\ 1 \text{ 当 } a > 0 \text{ 时} \end{cases}$ $\mathrm{sg}(a) = \overline{\mathrm{sg}}(\overline{\mathrm{sg}}(a))$ 或 $\mathrm{sg}(a) = \min(a, 1)$ 或

$$\begin{cases} \mathrm{sg}(0) = 0 \\ \mathrm{sg}(a') = 1 \end{cases}$$

\#11 $|a - b|$ $|a - b| = (a \dot{-} b) + (b \dot{-} a)$

\# 12. $\mathrm{rm}(a, b)$ (参见 §41)

$$\begin{cases} \mathrm{rm}(0, b) = 0 \\ \mathrm{rm}(a', b) = (\mathrm{rm}(a, b))' \cdot \mathrm{sg}|b - (\mathrm{rm}(a, b))'|^{1)}. \end{cases}$$

\# 13. $[a/b]$ $\begin{cases} [0/b] = 0 \\ [a'/b] = [a/b] + \overline{\mathrm{sg}}|b - (\mathrm{rm}(a, b))'|^{1)}. \end{cases}$

**附注 1** 模式 (I)—(V) (基底 A) 对于产生原始递归函数是很方便的. 如果容许常数而看作 0 元的原始递归函数, 则可用下

---

1) $\mathrm{sg}|x - y|$ 为 $\mathrm{sg}(|x - y|)$ 的缩写, $\overline{\mathrm{sg}}|x - y|$ 为 $\overline{\mathrm{sg}}(|x - y|)$ 的缩写——俄译注.

法得到另一基底(基底 B)：把(II)改为

(II$_B$) $$\varphi = 0$$

并在(IV)中允许 $n=0$ 或 $m=0$，删去(Va)，并允许(Vb)中 $n=1$．这个基底强调0与′的根本作用．常函数 $C_q^0(q>0)$ 可由继续的使用(IV)，而令 $n=0$，$m=1$，取 $\psi$ 为 $S$，取 $\chi$ 为 $C_{q-1}^0$ 而得；至于 $C_q^n\ (n>0)$ 可由使用(IV)而令 $m=0$，取 $\psi$ 为 $C_q^0$ 而得． 对产生原始递归函数的基底作了本质的简化的有培特(Péter)[1934](又见纳尔孙(David Nelson)[1947]第二部分)及R·罗宾孙(Raphael Robinson)[1947]．(在本章整章中，除却本附注及§47末附注外，我们都只用基底A.)

## §45. 谓词，质因子表示

要证明某些函数是原始递归的，下列的相对原始递归性的观念很自然地便会引入我们的理论中，正如要证明一公式为可证时，可推演性观念便会引入我们的理论中那样．

函数 $\varphi$ 叫做原始递归于 $\psi_1,\cdots,\psi_l$(简写为 $\Psi$)，如果有有穷多个函数的序列 $\varphi_1,\cdots,\varphi_k$(叫做由 $\Psi$ 到 $\varphi$ 的原始递归导引)，使得这序列中每个函数或者是函数 $\Psi$ 之一(假定函数)，或者是一个开始函数，或者直接依赖于前面的函数，而最后一函数 $\varphi_k$ 则是 $\varphi$．

因为这个定义与可推演性的定义同一样式，所以对于⊢的每一个一般性质(§20)现在都有一个相应的性质．例如，如果 $\varphi$ 是原始递归于 $\Psi$ 的，而函数 $\Psi$ 中有些是原始递归的，则 $\varphi$ 原始递归于 $\Psi$ 中其余的函数．后面将给出一个例子(当 $l=1$ 时)，对它言，“如果 $\psi_1,\cdots,\psi_l$ 为原始递归则 $\varphi$ 是原始递归”是真的，但“$\varphi$ 原始递归于 $\psi_1,\cdots,\psi_l$”却是假的(见§55，例2)．

**例1** 在§44例1中，$\varphi$ 原始递归于 $\zeta,\eta,\theta$，以 $\zeta,\eta,\theta,U_1^3,\theta_1,U_3^3,\psi,C_2^3,\varphi$ 为它的原始递归导引．

我们关于显式定义(§44)所得的一般结果可叙述如下．

**#A.** 由函数 $\Psi$ 及常数 $q_1,\cdots,q_s$ 用显式定义所得的函数 $\varphi$ 是

原始递归于$\Psi$的。

$\sum_{y<z}\phi(x_1, \cdots, x_n, y)$是指：当$z>0$时，就所有$y<z$的自然数$y$而把各数$\phi(x_1, \cdots, x_n, y)$相加所得的和；如果$z=0$则指0. 对于任何给定的函数$\phi(x_1, \cdots, x_n, y)$而言，它是$x_1, \cdots, x_n, z$的函数. $\prod_{y<z}\phi(x_1, \cdots, x_n, y)$是指：当$z>0$时，就所有$y<z$的$y$而作的各数$\phi(x_1, \cdots, x_n, y)$的积；如果$z=0$则指1.

#B. 有穷和$\sum_{y<z}\phi(x_1, \cdots, x_n, y)$及有穷积$\prod_{y<z}\phi(x_1, \cdots, x_n, y)$是原始递归于$\phi$的.

**证明** 和$\sum_{y<z}\phi(x_1, \cdots, x_n, y)$可由$\phi(x_1, \cdots, x_n, y)$就$z$作递归而得：

$$\begin{cases}\sum_{y<0}\phi(x_1, \cdots, x_n, y)=0\\ \sum_{y<z'}\phi(x_1, \cdots, x_n, y)=\phi(x_1, \cdots, x_n, z)\\ \qquad\qquad +\sum_{y<z}\phi(x_1, \cdots, x_n, y).\end{cases}$$

其余的有穷和与有穷积可利用显式定义而化归到它们两者；例如，$\sum_{y\leq z}\phi(y)=\sum_{y=0}^{z}\phi(y)=\sum_{y<z'}\phi(y)$, $\sum_{w<y<z}\phi(y)=\sum_{y<z\dot{-}w'}\phi(y+w')$, $\sum_{w\leq y\leq z}\phi(y)=\sum_{y=w}^{z}\phi(y)=\sum_{y<z'\dot{-}w}\phi(y+w)$.

虽则在本章中我们只发展直觉的理论而不是形式理论，但有时我们却需使用逻辑符号以使表达式简洁，在特例，我们需要这样的符号体系用以作出谓词记号及函数记号. 由于这两个目的，现在我们引入一个新的逻辑符号体系. 这个符号体系是非形式的且有意义的，和形式体系内的不同，那是作为元数学的研究对象用的. 用这个新的直觉符号体系所写的表达式与用以前形式符号体

系所写的公式其差异点可由符号本身(除"&"外)及由上下文看出. 在本书内(哥德尔(Gödel)[1931]内亦然)由于这个目的而作的两种符号体系的区别并不是在文献中已经流行的用法.(我们的直觉逻辑符号体系,除却"≡""$E!y$"以及带有"$x<y$"的各运算子等外,都是希尔柏特-伯尔奈斯(Hilbert-Bernays)[1934, 1939]所用的形式符号体系;我们的形式逻辑符号体系,除却"~"及"$\exists!y$"外都是坚钦(Gentzen)[1934~1935]的.[1])

| 直觉符号体系内的符号 | 汉语的说法 | 形式符号体系内的符号 |
|---|---|---|
| $Q\equiv R$ | $Q$等价于$R$. | $Q\sim R$. |
| $Q\rightarrow R$ | $Q$蕴涵$R$(如$Q$,则$R$) | $Q\supset R$. |
| $Q\& R$ | $Q$与$R$. | $Q\& R$. |
| $Q\vee R$. | $Q$或$R$. | $Q\vee R$. |
| $\bar{Q}$ | 非$Q$. | $\neg Q$. |
| $(y)R(y)$ | 一切$y$都$R(y)$. | $\forall yR(y)$ |
| $(Ey)R(y)$ | 有一$y$使得$R(y)$ | $\exists yR(y)$ |
| $(E!y)R(y)$ | 有唯一的$y$使得$R(y)$ | $\exists!yR(y)$ |
| $(y)_{y<z}R(y)$ | 对一切$y<z$都$R(y)$ | $\forall y(y<z\supset R(y))$ |
| $(Ey)_{y<z}R(y)$ | 有一个$y<z$使得$R(y)$ | $\exists y(y<z\& R(y))$ |
| $\mu y_{y<z}R(y)$ | $y<z$中使得$R(y)$的最小的$y$,当$(Ey)_{y<z}R(y)$时;否则指$z$. | |

若把"$(y)$""$(Ey)$"及"$\mu y$"再与不等式"$y\leqslant z$","$w<y\leqslant z$","$w\leqslant y<z$""$w\leqslant y\leqslant z$"等合用,还可作出类似的记号. 当所指示的$y$的变域为空时,则"$(y)$"表达式为真而"$(Ey)$"表达式为假. 当所指示的变域中没有$y$使得$R(y)$成立时,则"$\mu y$"表达式的值为该域的基数.

在目前的理论中,我们经常不谈命题本身而谈命题的真假值,'真'(简写为t)及'假'(简写为f). (这里的t,f是代表命题

1) 按对等价关系言,希尔柏特用"~"而坚钦用")(",至于"(E!y)"或"∃!y",则两氏都不用特殊的记号——译者注.

的真假值，与在§§26，36的关于公式的赋值过程中tf的类似用法不同,由上下文可以区别．)当我们这样做时，立刻有四种类型的函数．(a)由{0，1，2…}到{0，1，2，…}的函数,叫做数论函数或简称函数.[1] (b)由{0，1，2,…}到{t，f}的函数，叫做数论谓词或简称谓词.[2] (c)由{t，f}到{t，f}的函数，叫做真值函数或命题联结词．我们用到其中五个，即≡，→，&，∨，一,它们可分别用§28中对形式运算子～，⊃，&，∨，¬所给的真值表而定义．(d)由{t，f}到{0，1，2，…}的函数，在这类型的函数中，把0对应于t而把1对应于f的，将出现于下文所给的"代表函数"的定义中．

当然,如果不把命题和其真值看作等同,则'谓词'便指自然数的命题函数(§31)．我们不时地不谈命题而谈真假值t，f．这种作法值得略作讨论．事实上,在很多地方,不管我们把谓词的值看作命题也好，看作真假值t，f也好，都是没有关系的．这是因为一命题的基本数学意义完全由以它为值的谓词的定义而来．例如,试考虑两命题3<5及3≤5．它们是不同的命题，意义各异．初看起来，如果我们把它们看作是同一客体t，似乎会失去一些东西．但是，如果我们把命题3<5等同于t，但同时说这是谓词<以3与5为变目时所取之值，我们已把原来命题的所有意义都表示出来了．换句话说,命题3<5是和下一命题同义的：若把

1) 就有穷性观点说来,一函数只当有计算它的算法时才有意义(在§60，这样的函数看作与一般递归函数是等同的)．但是看来著者并没有限于只讨论这种函数(例如,见301页脚注)——俄译注．

2) 这个定义有说明的必要,如果用著者所采用的"有穷性"立场来解释，则所说的谓词只有下列一种才有意义,即存在一种判定过程的(在§60中,这种谓词看作与一般递归谓词是等同的)．照这样表述的作狭义理解的"谓词"说来(比通常的强一些)，$(Ey)R(x, y)$ 可以不表示任何谓词，因为可能不存在任何算法使得对于每个 $x$ 都可说出有没有一个 $y$ 使得谓词 $R(x, y)$ 成立.但下文著者并没有限于这个狭义，仍考虑非一般递归的谓词．在这情形之下，在下列两可能之中著者必须承认一种．(a)或者著者把谓词理解为古典的,广义的,因而把任意的，即使不是构造性的，由自然数到{t，f}的映象都看作谓词．(这样便放弃了自己的有穷性观点);(b)或者著者把"谓词"理解为某种在本书上还未说出的"构造性"的意义(在这意义下,谓词概念可如下定义,给出精确描述的构造法,可用以解决谓词的结构的)——俄译注．

谓词释义为以 $\{t, f\}$ 为值域，则当以 3 与 5 作变目时，谓词 $<$ 取 t 以为值.（更进一步，不管 t, f 意指"真""假"，如上文所说的，或只简单地是两个不同的客体，如 § 28，§ 36 那样，也是无关紧要的. 在两种释义之下，谓词仍是彼此同构的. $3<5$ 的值为 t 这句命题的抽象数学内容也是相同的）.

当详细地处理函数时，我们必须知道通常函数记法有两个意义，如 § 10 所指出的那样，对谓词而言则有三个可能的意义（如果把命题与真假值区别时，则有六种）.

| | "$P(x_1, \cdots, x_n)$" 的意义 | 另一记法 |
|---|---|---|
| 1. | 谓词 $P(x_1, \cdots, x_n)$. | $P$，或 $\lambda x_1 \cdots x_n P(x_1, \cdots, x_n)$. |
| 2. | 以 $x_1, \cdots, x_n$ 为变目时谓词 $P$ 的值（未定值）. | 无别的记法 |
| 3. | 命题：对一切 $x_1, \cdots, x_n$ 言，$P(x_1, \cdots, x_n)$ 都真. | $(x_1)\cdots(x_n)P(x_1, \cdots, x_n)$. |

这三个意义分别对应于命名式（§ 31），以及在形式系统中对公式 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 内的自由变元 $x_1, \cdots, x_n$ 所作的条件释义（§ 32）及全称性释义（§ 32）.

**例 2** 下二陈述句

$$\begin{cases} E(0) \ (\text{或 } E(0) \equiv t) \\ E(a') \equiv \bar{E}(a) \end{cases}$$

递归地定义了谓词 $E(a)$（$\equiv\{a$ 是偶的$\}$）——我们可用原始递归式定义一函数 $\varepsilon(x)$：

$$\begin{cases} \varepsilon(0) = 0 \\ \varepsilon(a') = \overline{\text{sg}}(\varepsilon(a)) \end{cases}$$

（参见 §44 #9）. 这样，有 $E(a) \equiv \varepsilon(a) = 0$.

函数 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 叫做谓词 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 的代表函数，如果 $\varphi$ 只取 0 与 1 为值，并且满足下列等价式

$$P(x_1, \cdots, x_n) \equiv \varphi(x_1, \cdots, x_n) = 0;$$

换句话说，既然 $P$ 只以 t 及 f 为值，故当 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 为 t 时，$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 为 0，当 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 为 f 时，$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$

为 1.

我们说谓词 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 是原始递归的，如果它的代表函数 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 是原始递归的(例如，例 2 中的 $E(a)$)．这定义得自哥德尔 [1931].

作为另一例子，可举相等性谓词．它的代表函数列在右边(参见 ## 10, 11).

#14. $a = b$ $\qquad$ $sg|a - b|$

我们说函数 $\varphi$ 或谓词 $P$ 是原始递归于谓词及函数 $\Psi$ 的，如果把 $P, \Psi$ 中的谓词换为它们的代表函数时，相应的陈述成立.

哥德尔 [1931] 给出一些定理，有关于原始递归函数及谓词的，今述如下 (## C—E)． 这些事实亦曾为斯科林 (Skolem) [1923] 所得到.

# C. 把函数 $\chi_1, \cdots, \chi_m$ 代入到谓词 $Q$ 的相应变元去，所得的谓词 $P$ 是原始递归于 $\chi_1, \cdots, \chi_m, Q$ 的.

**证明** 如果所给的谓词是 $Q(y_1, \cdots, y_m)$，其代表函数为 $\phi(y_1, \cdots, y_m)$，被代入的函数是 $\chi_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, \chi_m(x_1, \cdots, x_n)$，则新谓词 $Q(\chi_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, \chi_m(x_1, \cdots, x_n))$ 的代表函数为 $\phi(\chi_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, \chi_m(x_1, \cdots, x_n))$． 根据模式 (IV) 可知这函数是原始递归于 $\phi, \chi_1, \cdots, \chi_m$ 的． 由 § 44，我们知道把代入限于这种特殊形式是不致于丧失普遍性的；对 # D 亦仿此:

#D. 谓词 $\bar{Q}(x_1, \cdots, x_n)$ 是原始递归于谓词 $Q$ 的． 谓词 $Q(x_1, \cdots, x_n) \vee R(x_1, \cdots, x_n)$, $Q(x_1, \cdots, x_n) \& R(x_1, \cdots, x_n)$, $Q(x_1, \cdots, x_n) \rightarrow R(x_1, \cdots, x_n)$ 及 $Q(x_1, \cdots, x_n) \equiv R(x_1, \cdots, x_n)$ 是原始递归于 $Q$ 及 $R$ 的.

**证明** 设 $Q(x_1, \cdots, x_n)$ 及 $R(x_1, \cdots, x_n)$ 的代表函数分别为 $\phi(x_1, \cdots, x_n)$ 及 $\chi(x_1, \cdots, x_n)$． 则 $\bar{Q}(x_1, \cdots, x_n)$ 的代表函数为 $\overline{sg}(\phi(x_1, \cdots, x_n))$ (#9)，它是原始递归于 $\phi$ 的. $Q(x_1, \cdots, x_n) \vee R(x_1, \cdots, x_n)$ 的代表函数为 $\phi(x_1, \cdots, x_n) \cdot \chi(x_1, \cdots, x_n)$，它是原始递归于 $\phi$ 及 $\chi$ 的．本定理的其余部分可由众所周知

的把 &，→，≡表以一与V的等价式而得到(参见第六章，但注意符号体系的不同.)

#E. 谓词 $(Ey)_{y<z}R(x_1,\cdots,x_n,y)$，$(y)_{y<z}R(x_1,\cdots,x_n,y)$ 及函数 $\mu y_{y<z}R(x_1,\cdots,x_n,y)$ 是原始递归于谓词 $R$ 的.

**证明** 设 $R(x_1,\cdots,x_n,y)$ 的代表函数为 $\chi(x_1,\cdots,x_n,y)$. 则 $\prod_{y<z}\chi(x_1,\cdots,x_n,y)$ 为 $(Ey)_{y<z}R(x_1,\cdots,x_n,y)$ 的代表函数. 由#B 它是原始递归于 $\chi$ 的. 同样，$\mathrm{sg}\left(\sum_{y<z}\chi(x_1,\cdots,x_n,y)\right)$ 是 $(y)_{y<z}R(x_1,\cdots,x_n,y)$ 的代表函数(#10). 我们举一例来说明对 $\mu y_{y<z}R(x_1,\cdots,x_n,y)$ 的证明. 设 $x_1,\cdots,x_n$ 的值固定，并当 $x_1,\cdots,x_n$ 固定时把 $\chi(x_1,\cdots,x_n,y)$ 简单地记为"$\chi(y)$". 今设 $z=7$，并设当 $y=0,1,\cdots,6$ 时(第一行) $\chi(y)$ 取下列之值(第二行).

| $y$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $7=z$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\chi(y)$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| $\pi(y)=\prod_{s\leqslant y}\chi(s)$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| $\sigma(y)=\sum_{t<y}\pi(t)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

所求的数 $\mu y_{y<z}R(y)$ 是最小的 $y$ (第一行中) $<z$ 使得 $R(y)$ 为真的，即它使得 0 出现于第二行的，如果这样的 $y$ 存在的话. 在我们的例子里，它是存在的，而最小的是 3. 这数亦是第四行中最后一数 $\sigma(z)$. 这办法显然对任何情形均适用. 若改为另一例子使得 $\overline{(Ey)}_{y<z}R(y)$. 则在第二行中没有 0 出现，而 $\sigma(z)$ 将为 $z$，这正是在这情况下 $\mu y_{y<z}R(y)$ 所取的值. 把函数 $\sigma(z)$ 详细写出便是 $\sum_{t<z}\prod_{s<t}\chi(x_1,\cdots,x_n,s)$. 由#B，它是原始递归于 $\chi$ 的.

在应用这些定理时，我们可把几个应用合并于一个步骤中.由#14及#C，$\psi(x_1,\cdots,x_n)=\chi(x_1,\cdots,x_n)$ 是原始递归于 $\psi$ 及 $\chi$ 的；例如，若应用§44，$c'+a=b$ 是原始递归的. 由#  #E，C

及 § 44，$(Ey)_{y<\psi(x_1,\cdots,x_n)}R(x_1,\cdots,x_n,y)$ 是原始递归于 $\psi$，$R$ 的；例如，再用 § 44 可知下列一谓词是原始递归的.

\#15. $a<b$. $a<b\equiv(Ec)_{c<b}[c'+a=b]$ 或 $\mathrm{sg}(a'\dot{-}b)$[1].

在 #E 中的不等式"$y<z$"可换为"$y\leqslant z$"，"$w<y<z$"，"$w<y\leqslant z$"，"$w\leqslant y<z$"或"$w\leqslant y\leqslant z$"；例如，$(y)_{w<y<z}R(x_1,\cdots,x_n,y)\equiv(y)_{y<z'\dot{-}w}R(x_1,\cdots,x_n,y+w)$.

一组谓词 $Q_1,\cdots,Q_m$ 叫做不可兼的，如果对于每一组变目它们之中不多于一个是真的(参见 § 3).

\#F. 设如下定义函数 $\varphi$

$$\varphi(x_1,\cdots,x_n)=\begin{cases}\varphi_1(x_1,\cdots,x_n) & \text{如果 } Q_1(x_1,\cdots,x_n)\text{ 成立.}\\ \cdots & \cdots\\ \varphi_m(x_1,\cdots,x_n) & \text{如果 } Q_m(x_1,\cdots,x_n)\text{ 成立.}\\ \varphi_{m+1}(x_1,\cdots,x_n) & \text{如果此外情形成立.}\end{cases}$$

其中 $Q_1,\cdots,Q_m$ 为不可兼谓词(或 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 由首先成立的那句话而给值)，则 $\varphi$ 是原始递归于 $\varphi_1,\cdots,\varphi_{m+1}$，$Q_1,\cdots,Q_m$ 的.(穷举定义).

证明. 当 $Q_1,\cdots,Q_m$ 不可兼时. 第一法，设 $\psi_1,\cdots,\psi_m$ 为 $Q_1,\cdots,Q_m$ 的代表函数，则(为节省篇幅，删去"$(x_1,\cdots,x_n)$")

$$\varphi=\overline{\mathrm{sg}}(\psi_1)\cdot\varphi_1+\cdots+\overline{\mathrm{sg}}(\psi_m)\cdot\varphi_m+\psi_1\cdot\cdots\cdot\psi_m\cdot\varphi_{m+1}.$$

第二法.

$$\varphi=\mu y_{y<\varphi_1+\cdots+\varphi_{m+1}}(Q_1\&y=\varphi_1)\vee\cdots\vee(Q_m\&y=\varphi_m)\vee(\overline{Q}_1\&\cdots\&\overline{Q}_m\&y=\varphi_{m+1})$$

**质因子表示式** 设依大小排序时质数为 $p_0,p_1,p_2,\cdots,p_i,\cdots$. (即 $p_0=2$，$p_1=3$，$p_2=5$，$\cdots$). 算术基本定理(高斯(Gauss) 1801)说，任一给定的正整数 $a$ (按须 $>1$，——译者)可以分解为质因子的乘积，除因子次序外该分解是唯一的. 因此对 $a$ (这时 $a$ 可以 $=1$——译者)说，我们有下形的唯一的分解式

(1) $$a=p_0^{a_0}\cdot p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdot\cdots\cdot p_i^{a_i}\cdot\cdots$$

---

1) 按当作"或 $\equiv\mathrm{sg}(a'\dot{-}b)=0$"或当作"或以 $\mathrm{sg}(a'\dot{-}b)$ 为代表函数"——译者注.

其中 $a_i$ 是作为 $a$ 的因子的 $p_i$ 的个数(如果 $p_i$ 非 $a$ 的因子，则它为 0). 我们可以把积 (1) 当作无限地延长，但只有有穷个幂指数非 0.

现在我们再增列一些特殊的原始递归函数及谓词.

#16. $a|b \equiv a$ 除尽 $b$.

$$a|b \equiv (Ec)_{c\leqslant b}[ac = b] \text{ 或 } \mathrm{sg}(\mathrm{rm}(b, a))$$ [1)]

#17. $\Pr(a) \equiv a$ 为一质数.

$$\Pr(a) \equiv a > 1 \& \overline{(Ec)_{1<c<a}[c|a]}.$$

#18. $p_i =$ 第 $i+1$ 个质数.

$$\begin{cases} p_0 = 2 \\ p_{i'} = \mu x_{p_i < x \leqslant p_i! + 1} \Pr(x) \end{cases}$$

这里 $x$ 的上界 $p_i! + 1$ 可由欧几里德的证明而得. 它说对任何 $p$ 均有一个质数 $>p$ 而 $\leqslant p! + 1$ (§40). 把 # E 与原始递归式合并使用是合法的，这不过是下运算的缩写，先引入 $\chi(c) = \mu x_{c<x\leqslant c!+1} \Pr(x)$，然后把第二个递归方程写成 $p_{i'} = \chi(p_i)$ 即可.

#19. $(a)_i = \begin{cases} \text{在 (1) 中 } p_i \text{ 的方幂 } a_i & \text{当 } a \neq 0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } a = 0 \text{ 时} \end{cases}$

$$(a)_i = \mu x_{x<a}[p_i^x/a \& \overline{p_i^{x'}|a}].$$

我们将把 $((a)_i)_j$ 写为 $(a)_{i,j}$，把 $(((a)_i)_j)_k$ 写为 $(a)_{i,j,k}$ 等.

#20. $\mathrm{lh}(a) = \begin{cases} \text{在 (1) 中非 0 方幂的个数当 } a \neq 0 \text{ 时} \\ 0 \quad \text{当 } a = 0 \text{ 时} \end{cases}$

$$\begin{cases} \mathrm{lh}(0, a) = 0 \\ \mathrm{lh}(i', a) = \begin{cases} \mathrm{lh}(i, a) + 1 & \text{当 } p_i | a \text{ 时} \\ \mathrm{lh}|(i, a) & \text{此外} \end{cases} \\ \mathrm{lh}(a) = \mathrm{lh}(a, a). \end{cases}$$

我们可把正整数的有限数列 $a_0, \cdots, a_s$ 用数 $a = p_0^{a_0} \cdot \cdots \cdot p_s^{a_s}$ 来代表，这时 $\mathrm{lh}(a)$ 便是 $a$ 所代表的数列的长度 $s+1$.

---

1) 按当作"或 $\equiv \mathrm{sg}(\mathrm{rm}(b, a)) = 0$" 或作"或以 $\mathrm{sg}(\mathrm{rm}(b, a))$ 为代表函数"——译者注.

$\#\,21.\quad a*b = a\cdot\prod_{i<\mathrm{lh}(b)} p_{\mathrm{lh}(a)+i}^{(b)_i}$

如果 $a = p_0^{a_0}\cdot\cdots\cdot p_s^{a_s}\,(a_0, \cdots, a_s > 0)$, $b = p_0^{b_0}\cdot\cdots\cdot p_t^{b_t}$ $(b_0, \cdots, b_t > 0)$，则 $a*b = p_0^{a_0}\cdot\cdots\cdot p_s^{a_s}\cdot b_{s+1}^{b_1}\cdot\cdots\cdot b_{s+t+1}^{b_t}$. 对任何这样的 $a$ 与 $b$ 均有 $a*1 = a$, $1*b = b$, $1*1 = 1$.

## §46. 串值递归式

当用归纳法来证一定理 $T(y)$ 时，有时该定理的 $T(y')$ 情况并不仅仅依赖于紧靠它前面的情况 $T(y)$，而是依赖于前面的一个或多个情况．这种证明我们上文叫做‘串值归纳法’．它可化归成简单归纳，只须先用简单归纳而证明 $(s)_{s\leq y}T(s)$，然后令 $s = y$ 即得定理了(参见 §40, *162a).

在递归定义中亦出现同样情况．函数值 $\varphi(0)$ 直接给出；而函数值 $\varphi(y')$ 则用 $y$ 及一个或多个前面的值，$s\leqslant y$ 时的 $\varphi(s)$ 而表出．这种递归式叫做串值递归式．我们将看见，用类似的方法它可化归为原始递归式(参见培特 [1934]).

$\varphi$的定义中的两种情况可合而为一(参见*162b)，只须说$\varphi(y)$可用 $y$ 及 $s<y$ 时的 $\varphi(s)$ 而表出．当 $y=0$ 时这意指 $\varphi(0)$ 是直接给出的，因为 $s<y$ 时值 $\varphi(s)$ 的集是空的.

更一般地，设所定义的函数是 $\varphi(y, x_2, \cdots, x_n)$，而 $x_2, \cdots, x_n$ 为参数(在递归过程中它们是固定的)．作为一个辅助函数我们引入

$$(1)\qquad \tilde{\varphi}(y;\, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i<y} p_i^{\varphi(i, x_2, \cdots, x_n)}$$

它叫做所给函数 $\varphi(y, x_2, \cdots, x_n)$ 的(对 $y$) 串值函数.

若给出我们原来函数的值序列，即 $s<y$ 时的 $\varphi(s_1, x_2, \cdots, x_n)$，由 (1) 我们可得串值函数 $\tilde{\varphi}(y;\, x_2, \cdots, x_n)$ 的值．反之，若给出 $\tilde{\varphi}(y;\, x_2, \cdots, x_n)$，我们可借助于 #19，而把所有的值 $\varphi(s, x_2, \cdots, x_n)$ 抽出来如下

(2) $\varphi(s, x_2, \cdots, x_n) = (\tilde{\varphi}(y; x_2, \cdots, x_n))_s$, 当 $s < y$ 时.
因此,在某种意义下,知道了串值函数 $\tilde{\varphi}(y; x_2, \cdots, x_n)$ 便等于知道了原来函数的值序列 $\varphi(0, x_2, \cdots, x_n), \cdots, \varphi(y-1, x_2, \cdots, x_n)$.

#G. 如果 $\varphi$ 满足方程

(3) $\varphi(y, x_2, \cdots, x_n) = \chi(y, \tilde{\varphi}(y; x_2, \cdots, x_n), x_2, \cdots, x_n)$,

则 $\varphi$ 是原始递归于 $\chi$ 的.

**证明** 首先,我们作出 $\tilde{\varphi}$ 的原始递归式

(4) $$\begin{cases}\tilde{\varphi}(0; x_2, \cdots, x_n) = 1 \\ \tilde{\varphi}(y'; x_2, \cdots, x_n) = \tilde{\varphi}(y; x_2, \cdots, x_u) \cdot p_y^{\chi(y, \tilde{\varphi}(y; x_2, \cdots, x_n), x_2, \cdots, x_n)}\end{cases}$$。

然后由 $\tilde{\varphi}$ 用显式定义而得 $\varphi$,

(5) $$\varphi(y, x_2, \cdots, x_n) = (\tilde{\varphi}(y'; x_2, \cdots, x_n))_y.$$

**例 1** 设

(a) $$\varphi(y) = \prod_{s<y} (y + \varphi(s)).$$

这函数的值及它的串值函数的值所成序列如下:

| $y$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi(y)$ | 1 | 2 | 12 | 300 | 145920 | $\cdots$ |
| $\tilde{\varphi}(y)$ | 1 | $2^1$ | $2^1 \cdot 3^2$ | $2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^{12}$ | $2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^{12} \cdot 7^{300}$ | $\cdots$ |

注意, $\tilde{\varphi}(y')$ 的最后方幂永远是 $\varphi(y)$ 的值; 例如 $(\tilde{\varphi}(3))_2 = 12 = \varphi(2)$. 要应用#G, 可注意,由 (2) 得

(b) $$\varphi(y) = \prod_{s<y} (y + (\tilde{\varphi}(y))_s)$$

这便是 (3) 的样子. 由##1, 19, B 及 G, 可知 $\varphi$ 是原始递归的.

由 #G 的这个说法便把串值递归式化归为原始递归式, 不过只当串值递归式已经写成 (3) 的样子时, 亦即 $\varphi(y, x_2, \cdots, x_n)$ 已用 $\tilde{\varphi}(y; x_2, \cdots, x_n)$ 及 $y, x_2, \cdots, x_n$ 表出时.

我们将再举例说明当串值递归式尚未写成 (3) 的样子时如何把它化归.

**例 2** 双重奠基的递归式.

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} \varphi(0) = q_0, \\ \varphi(1) = q_1, \\ \varphi(y'') = \chi(y, \varphi(y), \varphi(y')). \end{cases}$$

首先我们把这写成更简洁的串值递归式(用##6, F)如下,

$$\text{(b)} \qquad \varphi(y) = \begin{cases} q_0 & \text{当 } y = 0 \text{ 时}, \\ q_1 & \text{当 } y = 1 \text{ 时}, \\ \chi(y \dot{-} 2, \varphi(y \dot{-} 2), \varphi(y \dot{-} 1)) & \text{此外情形时}. \end{cases}$$

然后把 $\varphi(y \dot{-} 2)$, $\varphi(y \dot{-} 1)$ 分别表成 $(\tilde{\varphi}(y))_{y \dot{-} 2}$, $(\tilde{\varphi}(y))_{y \dot{-} 1}$.

这方法亦可适用于对谓词所作的串值递归定义.

**例 3** 试考虑等价式

$$\text{(a)} \qquad T(y) \equiv y = 23 \vee V(y) \vee [y = 2^{17} \cdot 3^{(y)_1} \cdot 5^{(y)_2} \& T((y)_1) \& T((y)_2)] \vee [y = 2^{19} \cdot 3^{(y)_1} \cdot 5^{(y)_2} \& T((y)_1) \& T((y)_2)] \vee [y = 2^{21} \cdot 3^{(y)_1} \& T((y)_1)],$$

这里 $V$ 是一个给定的谓词. 这是就 $y$ 串值递归而定义 $T(y)$. 因为当 $y = 0$ 时, 右端各析取项, 可能除第二项外, 均是假的; 故 $T(0) \equiv V(0)$. 当 $y > 0$ 时则有 $(y)_1 < y$, $(y)_2 < y$.

因此 $T(y)$ 可用 $y$, $V$ 及 $s < y$ 时的 $T(s)$ 而表出. 设 $\tau(y)$ 为 $T(y)$ 的代表函数; 并设在 (a) 的右端中把 $T((y)_1)$, $T((y)_2)$ 分别表成 $(\tilde{\tau}(y))_{(y)_1} = 0$, $(\tilde{\tau}(y))_{(y)_2} = 0$. 这时 $T$ 的定义便具下形

$$\text{(b)} \qquad T(y) \equiv R(y, \tilde{\tau}(y)),$$

由##2, 3, 14, 19, A, C, 及D可知 $R(y, z)$ 是原始递归于 $V$ 的. 这不过是说 $R$ 的代表函数 $\rho$ 是原始递归于 $V$ 的代表函数 $\nu$; 故我们有下形的方程

$$\text{(c)} \qquad \tau(y) = \rho(y, \tilde{\tau}(y)).$$

这里 $\rho$ 是原始递归于 $\nu$ 的. 由 #G, $\tau$ 原始递归于 $\rho$, 故原始递归于 $\nu$; 即 $T$ 是原始递归于 $V$ 的(故当 $V$ 为原始递归时 $T$ 亦然).

在这些例子中, 应用 (2) 后我们经常可把给定的串值递归式化归成 (3) 形. 在 §47 的更精细的分析中可以说出为什么会是这

样，并使我们对 # G 可以表述成另一说法，在其中包含了这个化归的.

**例 4** 联立递归式. 函数值 $\varphi_1(y)$ 及 $\varphi_2(y)$ 由 $y$ 及 $s<y$ 时的 $\varphi_1(s)$，$\varphi_2(s)$ 而表出. 应用下列辅助函数后便可化归成# G 了

$$\varphi(y)=2^{\varphi_1(y)}\cdot 3^{\varphi_2(y)}.$$

## *§ 47. 一 致 性

在 ## A-G （暂时我们只讨论函数而不管谓词），我们所关心的主要不在于任何特殊的函数 $\varphi$ 及 $\Psi$，而在于当作未明指函数时由 $\Psi$ 而定义函数 $\varphi$ 的方法. 当用一个特殊方法而指出一个 $n$ 元函数 $\varphi$ 是原始递归于 $\Psi$ 的时，我们对模式 (I)—(V) 的应用并不依赖于 $\Psi$ 是怎样的一些函数，只要它们的个数 $l$ 以及它们各自的变元个数 $m_1,\cdots,m_l$ 固定便成. 换句话说，我们给出一个由 $\Psi$ 到 $\varphi$ 的原始递归导引模式，具有固定的分析. ‘分析’的定义与 § 20 中所给的相似. 当应用模式 (II) 时它须明指 $n$ 与 $q$ 之值；应用 (III) 时须明指 $n$ 与 $i$ 的值，等等. （类似地，我们经常用下法而得到一形式系统的导出规则，即用元数学字母表示未明指的公式，变元等等，从而建立一个‘推演模式’.）在这些情形之下，我们说，$\varphi$ 是一致地原始递归于 $\Psi$ 的.[1)]

---

1) 我们今对一致性略作阐明，但限于 $\Psi$ 只含一个函数 $\psi$ 的情形. 如果 $\varphi$ 与 $\psi$ 为具体的函数，则由 §45，“$\varphi$ 原始递归于 $\psi$”便指，有一个由 $\psi$ 到 $\varphi$ 的原始递归描述. 如果 $\varphi$ 与 $\psi$ 是变的函数，即字母 $\varphi$ 表示某类 A 中随便一个函数，而字母 $\psi$ 表示某类 B 中随便一个函数，并且每一函数 $\psi^*\in$ B 都用某一种方法对应于某一函数 $\varphi^*\in$ A，则“$\varphi$ 原始递归于 $\psi$”便指，对于每一次选取 $\psi^*\in$ B，相应的函数 $\varphi^*$ 都是原始递归于 $\psi^*$ 的. 在同样条件之下，“$\varphi$ 一致地原始递归于 $\psi$”便指，对于每一次选取 $\psi^*\in$ B，相应的函数 $\varphi^*$ 都原始递归于 $\psi^*$，而且对于所有的 $\psi^*\in$ B，相应的由 $\psi^*$ 到 $\varphi^*$ 的原始递归导引的分析都是一样的（由这可以推出，类 B 中各函数都具有同样个数的变目；类 A 中的亦然）、如果类 B 只由一个函数组成，则原始递归性与一致原始递归性是一样的，因为对具体的函数 $\varphi$ 与 $\psi$ 言，“$\varphi$ 一致原始递归于 $\psi$”就是“$\varphi$ 原始递归于 $\psi$”，没有任何新的内容.（读者容易看出，原始递归性与一致原始递归性之间的关系，很类似于连续性与一致连续性之间的关系）. 对一般情形言，当 $\Psi$ 包含多于一个函数时，类似的附注亦成立——俄译注.

我们亦可以如下地解释一致性的观念．当用一个特殊方法由数论函数$\Psi$而定义一数论函数$\varphi$时，我们可写$\varphi=\mathbf{F}(\Psi)$以表示从$\Psi$是什么可决定$\varphi$是什么．$\mathbf{F}$是一个高型的固定数学函数，即由$l$个分别为$m_1,\cdots,m_l$元的数论函数到$n$元数论函数$\varphi$去的数学函数．这样的一个函数$\mathbf{F}$叫做泛函[1]．我们亦写为$\varphi(x_1,\cdots,x_n)=\mathbf{F}(\Psi;x_1,\cdots,x_n)$（$\mathbf{F}$与上同）表示以下事实，（由于泛函$\mathbf{F}$之故），自然数$\varphi(x_1,\cdots,x_n)$是什么将取决于$\Psi$及各数$x_1,\cdots,x_n$是什么．

对任何固定的$n$与$m$而言，模式（IV）是一泛函，上文已经表示为$\mathbf{S}^n_m$了．对固定$n$言（当$n=1$时，还固定$q$），模式（V）亦是一泛函$\mathbf{R}^1_q$或$\mathbf{R}^n$．其余三个模式（I）—（III）则定义出特殊数论函数$S$，$C^n_q$及$U^n_i$（或者是$l=0$时的泛函）．

我们说泛函$\varphi=\mathbf{F}(\Psi)$是原始递归的或者$\varphi$是一致地原始递归于$\Psi$的，如果$\mathbf{F}$可以由泛函$\mathbf{S}^n_m$，$\mathbf{R}^1_q$，$\mathbf{R}^n$及常泛函$S$，$C^n_q$，$U^n_i$而显式地[2]定义．

**例1**　在§44例1中，$\varphi$是一致地原始递归于$\zeta,\eta,\theta$的．就一致性的第一个说法言，一致性可如下看出，其原始递归导引模式是$\zeta,\eta,\theta,U^3_1,\theta_1,U^3_3,\psi,C^3_2,\varphi$，其分析（1—9右端所列的）是固定的．就第二说法言，一致性可如下看出，依照（b）式，$\varphi=\mathbf{F}(\zeta,\eta,\theta)$已由$\mathbf{S}^3_3$，$\mathbf{S}^3_2$，$\mathbf{S}^3_1$及$U^3_1$，$U^3_3$，$C^3_2$而显式地定义了．

有时，只当对$\Psi$有一些限制时才明指出由函数$\Psi$决定函数$\varphi$的方法．要证明其一致原始递归性，我们便须指出有一个固定的一系列的对模式（I）—（V）的应用，它和所给的方法由$\Psi$决定同样的函数$\varphi$，只要对$\Psi$可以使用（或打算使用）所给的方法便成．但事实上，这一系列的对模式（I）—（V）的应用却可以由任何$\Psi$而决定一个函数$\varphi$，因为每一个模式都具有这种性质．因此，所给的方法只当$\Psi$在一个有限制的变域内时才定义一泛函$\varphi=\mathbf{F}(\Psi)$．而

1）原文为：Scheme function，schema，scheme，functional．今只译出最后一个——译者注．

2）"显式地"一语上文只对函数而讨论．一泛函怎样才算显式地定义？这问题似应补作讨论才对——译者注．

对 (I)—(V) 的这个一系列的应用却给出了一个完全有定义[1]的泛函 $\varphi = \mathbf{F}_1(\Psi)$，它是原始递归的，而且当 $\mathbf{F}$ 有定义时我们有

$$\mathbf{F}_1(\Psi) = \mathbf{F}(\Psi).$$

**例 2** 设函数 $\varphi$ 如下定义

$$\text{(a)} \qquad \varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{当 } \psi_1(x) = 0 \text{ 时,} \\ \varphi_2(x) & \text{当 } \psi_2(x) = 0 \text{ 时,} \\ \varphi_3(x) & \text{当此外情形时.} \end{cases}$$

这里 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2$ 为给定的函数，而且对每个 $x$ 言，$\psi_1(x)$ 及 $\psi_2(x)$ 均或为 0 或为 1 且不俱为 0. 我们便可写为

$$\text{(b)} \qquad \varphi(x) = \overline{\mathrm{sg}}(\psi_1(x) \cdot \varphi_1(x) + \overline{\mathrm{sg}}(\psi_2(x)) \cdot \varphi_2(x) + \psi_1(x) \cdot \psi_2(x) \cdot \varphi_3(x),$$

并可作结论说，$\varphi$ 是一致地原始递归于 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2$ 的(参见 §45 #F 的第一个证明). (a) 中的 $\varphi$ 只对适合所述限制的 $\psi_1, \psi^2$ 而有定义，但 (b) 所定义的 $\varphi$ 却没有任何限制，而当该限制满足时它和前者定义的是同一个 $\varphi$.

对含谓词的泛函言，我们说函数 $\varphi$ 或谓词 $P$ 是一致地原始递归于谓词及函数 $\Psi$ 的，如果把 $P$, $\Psi$ 中的谓词换为它们的代表函数后相应的叙述是成立的. 在引用模式 (I)—(V) 时如果把作为 $\Psi$ 中谓词的代表函数而引入的函数当作不受限制的函数变元而处理，则前段所说的话便可适用了.

应用上述的释义，即使当 $\Psi$ 中有些是特殊的函数(或谓词)时，我们仍可说一函数 $\varphi$ (或谓词 $P$) 是一致地原始递归于 $\Psi$ 的. 这时，如果 $\Psi$ 中那些特殊的函数或谓词是原始递归的，那么 $\varphi$ (或 $P$) 便一致地原始递归于 $\Psi$ 中其余的函数及谓词.

如果 $\varphi$ 是一致地原始递归于作为函数变元的 $\theta$ 及 $\Psi$，则当我们把 $\theta$ 取作 $\theta^*$ 时，结果所得的 $\varphi^*$ 便一致地原始递归于 $\theta^*$ 及 $\Psi$ (因此，如果 $\theta^*$ 是原始递归的，则一致地原始递归于 $\Psi$). 这原则不管 $\theta^*$ 是一特殊的函数或一函数变元均可适用，即使它还有新变

---

1) 即对每个 $\Psi$ 都有定义 — 俄译注.

元 $c_1, \cdots, c_p$ 作为参数时亦然．这原则下文将精确地叙述为引理 1．为了表明这些函数所含的变元个数以及变元本身为谁，我们写 $\theta = \lambda s_1\cdots s_q\theta(s_1, \cdots, s_q)$（$q$ 元函数）及 $\theta^* = \lambda s_1\cdots s_q c_1\cdots c_p\theta^*(s_1, \cdots, s_q, c_1, \cdots, c_p)$（$p+q$ 元函数），而 $\lambda s_1\cdots s_q\theta^*(s_1, \cdots, s_q, c_1, \cdots, c_p)$ 则是当 $c_1, \cdots, c_p$ 为固定的数时由 $\theta^*$ 所得的 $q$ 元函数，以 $s_1, \cdots, s_q$ 为变元．

**引理 I** 设给出一泛函 $\varphi = \mathbf{F}(\theta, \Psi)$ 如下，

$$\varphi(x_1, \cdots, x_n) = \mathbf{F}(\lambda s_1\cdots s_q\theta(s_1, \cdots, s_q), \Psi; x_1, \cdots, x_n),$$

又设如下地定义一个泛函 $\varphi^* = \mathbf{G}(\theta^*, \Psi)$，

$$\begin{aligned}&\varphi^*(x_1, \cdots, x_n, c_1, \cdots, c_p)\\&= \mathbf{G}(\lambda s_1\cdots s_q c_1\cdots c_p\theta^*(s_1, \cdots, s_q, c_1, \cdots, c_p),\\&\quad \Psi; x_1, \cdots, x_n, c_1, \cdots, c_p)\\&= \mathbf{F}(\lambda s_1\cdots s_q\theta^*(s_1, \cdots, s_q, c_1, \cdots, c_p), \Psi; x_1, \cdots, x_n).\end{aligned}$$

如果 $\mathbf{F}$ 是原始递归的，则 $\mathbf{G}$ 亦然．

**证明** 证明的要点在于：不论显式定义或递归定义，当引入参数时，仍是同样的显式定义及递归定义．

要详细地给出证明，设 $k$ 为由 $\theta$，$\Psi$ 到 $\varphi$ 的原始递归导引模式 $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ 的长度，我们就 $k$ 而作串值归纳．可分七种情况．即 $\varphi(=\varphi_k)$ 为 $\theta$，或 $\varphi$ 为 $\Psi$ 中之一（设为 $\psi_i$），或为由模式 (I)，(II) 或 (III) 而得的开始函数之一，或依模式 (IV) 或 (V) 而直接依赖于前面的函数．

**情形** 6：$\varphi(x_1, \cdots, x_n) = \psi(\chi_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, \chi_m(x_1, \cdots, x_n))$，而在导引 $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ 中 $\psi, \chi_1, \cdots, \chi_m$ 在 $\varphi(=\varphi_k)$ 之前．则有

$$\begin{aligned}&\varphi^*(x_1, \cdots, x_n, c_1, \cdots, c_p)\\&= \psi^*(\chi_1^*(x_1, \cdots, x_n, c_1, \cdots, c_p), \cdots, \chi_m^*(x_1, \cdots,\\&\qquad x_n, c_1, \cdots, c_p), c_1, \cdots, c_p).\end{aligned}$$

根据归纳假设，$\psi^*, \chi_1^*, \cdots, \chi_m^*$ 一致地原始递归于 $\theta^*, \Psi$．由＃A，$\varphi^*$ 一致地原始递归于 $\psi^*, \chi_1^*, \cdots, \chi_m^*$；因而一致地原始递归于 $\theta^*, \Psi$．

**例 3** 并不是每个数论函数都是原始递归的．（何故？参见§1，§2：是不是每个实数都是代数数？）设 $\xi(c)$ 为一个特殊的非原始递归函数．设 $\varphi$ 由一个未明指函数 $\theta$ 而如下定义

$$\varphi(x) = \xi(\theta(0)).$$

则对于每个特殊的 $\theta$，结果所得的 $\varphi$ 都是常函数，因而由模式(II)，$n = 1$，$q = \xi(\theta(0))$，可知它是原始递归的．对每个 $\theta$，$\varphi$ 更是原始递归于 $\theta$，而以 $C_q^1$，$q = \xi(\theta(0))$ 作为由 $\theta$ 到 $\varphi$ 的原始递归导引．但因为这个导引的分析是依赖于 $\theta$ 的，我们不能作结论说，$\varphi$ 是一致地原始递归于 $\theta$ 的．的确，如果是的话，则由引理 $I$，取 $U_2^2(s, c)$（这是原始递归的）作为 $\theta^*(s, c)$，则结果所得的函数 $\varphi^*(x, c)$ 该是原始递归的，因而 $\varphi^*(0, c)$ 亦然．但 $\varphi^*(0, c) = \xi(U_2^2(0, c)) = \xi(c)$．——由此可见，如果把引理 I 的假设，即 $\mathbf{F}$ 是原始递归的，亦即 $\varphi$ 是一致地原始递归于 $\theta$，$\Psi$ 的，改弱为对每个 $\theta$，$\Psi$ 言，$\varphi$ 是原始递归于 $\theta$，$\Psi$ 的，那末引理 I 便不再成立了．——当然，在本例，$\varphi$ 是一致地原始递归于 $\xi$，$\theta$ 的．

因为以前所给的证明实际上证出了一致性，故：

# # A—G（第二说法）．把原来说法中的“原始递归”改读为“一致地原始递归”．

串值递归式经常以下列形式出现．把 $\varphi$ 的未定值 $\varphi(y, x_2, \cdots, x_n)$ 用下列表示：$y, x_2, \cdots, x_n$，别的函数及谓词 $\Psi$，以及作为 $s$ 的函数（$x_2, \cdots, x_n$ 已经给定了）$\varphi(s, x_2 \cdots, x_n)$．所给的表达式总是由于在一个原始递归泛函中的函数变元 $\theta(s)$ 处代入以 $\varphi(s, x_2, \cdots, x_n)$ 而得的结果．这泛函又具有下列性质，如果只把 $s \geq y$ 时 $\theta(s)$ 的值加以更改，该泛函的值仍然不变．换句话说，有一个原始递归泛函 $\mathbf{F}(\lambda s\theta(s), \Psi; y, x_2, \cdots, x_n)$ 使得

$$(6) \qquad \varphi(y, x_2, \cdots, x_n) = \mathbf{F}(\lambda s\varphi(s, x_2, \cdots, x_n), \Psi; y, x_2, \cdots, x_n),$$

$$(7) \qquad \mathbf{F}(\lambda s\theta_1(s), \Psi; y, x_2, \cdots, x_n) = \mathbf{F}(\lambda s\theta_2(s), \Psi; y, x_2, \cdots, x_n)$$

而对于一切 $s < y$ 都有 $\theta_1(s) = \theta_2(s)$。

在这情形下，我们说，$\varphi(y, x_2, \cdots, x_n)$ 是一致地原始递归于（$s<y$ 时的）$\varphi(s, x_2, \cdots, x_n)$ 及 $\Psi$.

对谓词亦可用同样的用语（把"$\varphi$""$\theta$""$=$"改为"$P$"，"$H$""$\equiv$"）.

如果由 $\Psi$ 到 $\varphi$ 的定义只是就 $\Psi$ 的一个有限制的变域而言，则(6)(7)只须在这个域内成立便成了.

**例 4** 设 $\varphi(y, x)$ 如下定义

(a) $\qquad \varphi(y, x) = y \cdot \rho(\varphi(\sigma(y), x)) + \mu z_{z<y}[\varphi(z, x)|y]$

这里 $\rho$，$\sigma$ 为给定的函数且当 $y>0$ 时 $\sigma(y)<y$. 要看出 $\varphi(y, x)$ 是一致地原始递归于（$s<y$ 时的）$\varphi(s, y)$ 及 $\rho$，$\sigma$ 的，我们可在(a)的右端中 $\lambda s\varphi(s, x)$ 处代入以一个未明指函数 $\lambda s\theta(s)$，为方便起见，把结果所得的函数叫做 $\chi_1(y, x)$:

(b) $\qquad \chi_1(y, x) = y \cdot \rho(\theta(\sigma(y))) + \mu z_{z<y}[\theta(z)|y]$.

由## A, C, E, 16（用 A, C, E 的第二说法）可知 $\chi_1(y, x)$ 是一致地原始递归于 $\theta$，$\rho$，$\sigma$ 的；由于有 $\sigma$ 所受的限制可知仅把 $\theta(s)$ 在 $s \geqslant y$ 处的值加以更改，也不会更改 $\chi_1(y, x)$ 的值.

**例 5** 我们可以直接由 § 46 例 1 的 (a)（§ 46 例 2 的 (b)）看出 $\varphi(y)$ 是一致地原始递归于（$s<y$ 时的）$\varphi(s)$（一致地原始递归于 $s<y$ 时的 $\varphi(s)$ 及 $\chi$）的. 我们无需把 $\varphi$ 改写成 $\theta$，只须检查右端如何地由 $\varphi(s)$ 而构成便可，暂时把 $\varphi(s)$ 看作未明指的函数. 同样地由 § 46 例 3 (a) 可见，$T(y)$ 是一致地原始递归于 $s<y$ 时的 $T(s)$ 及 $V$ 的.

#G（第三说法）. 如果 $\varphi(y, x_2, \cdots, x_n)$ 一致地原始递归于 $s<y$ 时的 $\varphi(s, x_2, \cdots, x_n)$ 及 $\Psi$，则 $\varphi$ 一致地原始递归于 $\Psi$. 对谓词仿此（把"$\varphi$"读为"$P$"）.

证明，对函数 $\varphi$ 言. 由 (6)，(7) 及 (2) 得，

(8) $\varphi(y, x_2, \cdots, x_n)$

$$= \mathbf{F}(\lambda s(\tilde{\varphi}(y; x_2, \cdots, x_n))_s, \Psi; y, x_2, \cdots, x_n)$$

$$= \chi(y, \tilde{\varphi}(y; x_2, \cdots, x_n), x_2, \cdots, x_n)$$

这里

(9) $\chi(y, c, x_2, \cdots x_n) = \mathbf{F}(\lambda s(c)_s, \Psi; y, x_2, \cdots, x_n)$.

由引理 I，$\chi$一致地原始递归于 $\lambda sc(c)_s$ 及 $\Psi$；因此由 #19，亦一致地原始递归于 $\Psi$. 再用 #G 的第二说法便得.

如把谓词 $P$ 转到它的代表函数便可证关于谓词的结果.

**附注 1** 参见 §44 末附注 1. 如果 $\varphi$, $\Psi$ 分别是 $n, m_1, \cdots, m_l$ $(>0)$ 元的函数，则在基底 B 下 $\varphi$ 一致地原始递归于 $\Psi$ 当且仅当在基底 A 下亦然. 因为，在基底 A 下由 $\Psi$ 到 $\varphi$ 的任何一个原始递归导引模式都可以变成在基底 B 下的模式，只要每应用一次 (II) ((Va)) 便在基底 B 下增加 $C_q^n$ $(C_q^0)$ 的描述便成了. 反之，设给出一个在基底 B 下由 $\Psi$ 到 $\varphi$ 的原始递归导引模式 $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$，我们可用下法得到在基底 A 下的模式. 设 $n = l = m_1 = 1$，即这导引是由 $\psi(x)$ 到 $\varphi(x)$ 的. 今在每个函数 $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ 中都引入一个参数 $c$. 仿引理 I 的证明我们可得到一个在基底 A 下由 $\psi(x, c)$ 到 $\varphi(x, c)$ 的原始递归导引模式. 然后在前面再加 $\psi(y, c) = \psi(U_1^2(y, c))$，后面再加 $\varphi(x) = \varphi(U_1^1(x), C_0^1(x))$ 便成了. ——例如，设 $\varphi(0) = \psi(0)$，$\varphi(y') = \chi(y, \varphi(y))$，则在基底 B 下 $\varphi$ 是一致地原始递归于 $\psi$，$\chi$ 的（依次应用 $(\mathrm{II_B})$，(IV)，令 $n = 0$ 及 (Vb)，令 $n = 1$). 故在基底 A 下亦然.

## § 48. 哥德尔的 $\beta$ 函数

本章的第二个问题是，证明每一个原始递归函数都可在第四章的形式系统内数字地表示，尽管在该系统内只有三个函数符号 $'$, $+$, $\cdot$. 我们将在下节用哥德尔法（哥德尔 [1931, 1934]）而证明这结果.

对数论的形式化程序来说，这结果[1]并不是根本重要的. 如果不能这样表示的话，则除却 $+$ 及 $\cdot$ 的递归式定义外，其它函数的递归式定义便可列为该系统的公里. 的确，只用可数多个特殊的数

1）原文为"证明"，今改——译者注.

论公理，便可以把所有原始递归函数的递归方程都包括起来了.但是若能证明了，如果和逻辑常项及谓词=合用，只用有限个公理便够，那却是很有趣的，而能证明只用传统算术中的两个主要函数+与·便够，那更有趣了.

如果一谓词能够显式地表以常自然数，自然数变元，函数+及·，等号=，命题演算中运算 →，&，∨，¯，量词 $(x)$ 及 $(Ex)$，它们都依通常的造句法而结合，则依照哥德尔，我们便说该谓词是算术的. (这形容词'算术的'是用更狭的意义，见 §9.) 今后这种谓词我们将称为哥德尔意义下的算术谓词[1].

读者可立刻仿照形式系统中公式的定义而把这定义更完全地用归纳定义而作出来. 所谓算术的谓词恰巧便是在符号的通常的释义之下，形式系统中各命名式所能表示的谓词. (试比较 §39 及 §41 中的形式处理，可知 $a < b$ 及 $\mathrm{rm}(c, d) = w$ 是算术的).

但既用直觉的符号体系，目前我们便只作非形式的讨论. 要应用于原始递归谓词，我们只对量词作构造地[2]使用便够.

在下一节，我们需要有一方法来对有限自然数数列 $a_0, \cdots, a_n$ 作算术的处理，这时我们不能用 §44，§45 中的函数 $a^b$，$p_i$ 及 $(a)_i$，而 §§ 46，47 对有限数列作原始递归的处理时是用到这些函数的.

我们知道，谓词 $\mathrm{rm}(c, d) = w$ 是算术的，这里 $\mathrm{rm}(c, d)$ 是指 $d$ 除 $c$ 时的剩余.

一集正整数 $d_0, \cdots, d_n$ 叫做两两互质，如果除 1 外它们任意两者之间没有正整数的公因子. 例如，3，4，5 是两两互质的.

试固定 $n+1$ 个两两互质的除数 $d_0, \cdots, d_n$ 而考虑当 $c$ 增加时，$n+1$ 元矢 $\mathrm{rm}(c, d_0), \cdots, \mathrm{rm}(c, d_n)$ 的情况. 例如(设 $n=1$) 当 $d_0 = 3$，$d_1 = 4$ 时情况如下.

---

1) 这句是俄译者加的. 用来表明作者使用术语的改变，引起了把刚刚引进的哥德尔意义下的算术 (arithmetical) 谓词概念与前面(§ 45) 定义的简单算术 (number-theoretical) 谓词加以区分的必要性——俄译注.

2) 这里"构造地"意指"直觉主义地"——俄译注.

| $c$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14·· |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{rm}(c, 3)$ | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2··· |
| $\mathrm{rm}(c, 4)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2··· |

我们看见，当 $c$ 由 0 变到 11 时，两剩余 $\mathrm{rm}(c, 3)$ 及 $\mathrm{rm}(c, 4)$ 所作成的对偶恰巧穷尽了在条件 $a_0 < 3$，$a_1 < 4$ 之下 $a_0$，$a_1$ 可能作成的对偶(共 12 个)。

要一般地证明这点，设当 $c = j$ 及 $c = j + k$ 时各剩余 $\mathrm{rm}(c, d_0)$，$\mathrm{rm}(c, d_1)$，$\cdots$，$rm(c, d_n)$ 都分别取值 $a_0, a_1, \cdots, a_n$。既然以 $d_i(i = 0, 1, \cdots, \mathrm{n})$ 除 $j$ 及除 $j + k$ 时都得出同样的剩余 $a_i$，故后两者之差即 $k$ 必可被 $d_i$ 除尽；设 $k = b_id_i$，故

$$k = b_0d_0 = b_1d_1 = \cdots = b_nd_n.$$

故 $k$ 以 $d_0, \cdots, d_n$ 为因子．由假设 $d_0, \cdots, d_n$ 为两两互质，故由算术根本定理(§44)，$k$ 必须为它们的积 $d_0 \cdot d_1 \cdot \cdots \cdot d_n$ 的倍数。

因此当 $c$ 取少于 $d_0 \cdot d_1 \cdot \cdots \cdot d_n$ 个相继的值以前，有序n+1元矢 $\mathrm{rm}(c, d_0)$，$\mathrm{rm}(c, d_1)$，$\cdots$，$\mathrm{rm}(c, d_n)$ 不可能回到当初给定的自然数数列 $a_0, a_1, \cdots, a_n$。但在条件 $a_0 < d_0$，$a_1 < d_1$，$\cdots$，$a_n < d_n$ 下，$a_0, a_1, \cdots, a_n$ 恰巧组成 $d_0 \cdot d_1 \cdot \cdots \cdot d_n$ 个不同的数列．因此在 $c$ 的任何 $d_0 \cdot d_1 \cdot \cdots \cdot d_n$ 个相继的值中，每种数列只出现一次（而且各数列出现的顺序亦是顺次相同周而复始的——译者）。

依照哥德尔[1934]，我们可利用这事实来造一个具下列两性质的函数 $\beta(c, d, i)$，

(1) 谓词 $\beta(c, d, i) = w$ 是算术的，

(2) 对任何一个有限自然数数列 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 都可找出两数 $c, d$ 使得

$$\beta(c, d, i) = a_i \ (i = 0, 1, \cdots, n)$$

我们知道，只要 $d_0, d_1, \cdots, d_n$ 是这样一组数使得 (a) $d_0, d_1, \cdots, d_n$ 是两两互质的，(b) $a_0 < d_0, a_1 < d_1, \cdots, a_n < d_n$，则可以找出一数 $c(c < d_0 \cdot d_1 \cdot \cdots \cdot d_n)$ 使得 $\mathrm{rm}(c, d_i) = a_i \ (i = 0, 1, \cdots, n)$．因此，如果我们能找出函数 $\delta(d, i)$ 使得数 $d_0$，

$d_1, \cdots, d_n$ 为函数 $\delta(d, i)$ 在 $i = 0, 1, \cdots, n$ 时的值（对于适当的数 $d$），而且下函数

(i) $$\beta(c, d, i) = \mathrm{rm}(c, \delta(d, i))$$

亦满足 (1)，那末我们的问题便解决了.

若取

(ii) $$\delta(d, i) = 1 + (i + 1)d$$

则 (1) 便被满足. 因谓词 $\mathrm{rm}(c, d) = w$ 是算术的，而 $\delta(d, i)$ 又是由1，+及·而显式地定义的，把 $\delta(d, i)$ 代入前谓词的 $d$ 处后所得的谓词 $\beta(c, d, i) = w$ 便满足 (1) 了.

在所给的数列 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 中，设各项 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 及 $n$ 之中最大者为 $s$，并取 $d = s!$

这时，(a) 当 $i = 0, 1, \cdots, n$ 时各数 $d_i = \delta(d, i)$ 是两两互质的. 因设其中两者 $1+(j+1)s!$ 与 $1+(j+k+1)s!$ 除 1 以外还有公因子，则它们应有一质公因子 $p$，而 $p$ 便应该除尽它们的差 $k \cdot s!$. 但 $p$ 不能除尽 $s!$，否则 $p$ 应除尽 $(j+1)s!$ 而这是不可能的，因 $p$ 除尽 $1+(j+1)s!$. $p$ 亦不能除尽 $k$，因 $k \leqslant n \leqslant s$，而每个 $\leqslant s$ 的数都除尽 $s!$. 故 $p$ 不能除尽 $k \cdot s!$，由反证法便可证明 (a) 了.

其次，(b) 对每个 $i(i = 0, 1, \cdots, n)$ 而言，都有 $a_i \leqslant s \leqslant s! < 1 + (i+1)s! = \delta(d, i) = d_i$.

J. 罗宾逊 (Julia Robinson) [1949*] 指出，不用两函数+与·而用谓词 | (# 16) 及函数′亦可定义所有的算术的谓词；邱吉 (Church) 与奎因 (Quine) [1952] 指出，亦可改用一个适当的对称的二元谓词.

## § 49. 原始递归函数及数论形式体系

**定理 I** 如果 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 是原始递归函数，则谓词 $\varphi(x_1, \cdots, x_n) = w$ 是算术的.（哥德尔 [1931]）.

**证明** 就 $\varphi$ 的原始递归描述（参见 § 43）$\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ 的长度

$k$ 而作串值归纳．情形(I)—(V)相应于 $\varphi_k$ (即 $\varphi$) 出现于描述上时所根据的五个模式．(具有同样穷举的结构的证明，可参见 §21 定理 1)．

情形(I)：$\varphi(x)=x'$．则 $\varphi(x)=w\equiv w=x+1$，而 $w=x+1$ 是算术的．

情形(II)：$\varphi(x_1,\cdots,x_n)=q$．则 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)=w\equiv w=q$．

情形(IV)：$\varphi(x_1,\cdots,x_n)=\psi(\chi_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,\chi_m(x_1,\cdots,x_n))$，并依归纳假设，$\psi(y_1,\cdots,y_m)=w$，$\chi_1(x_1,\cdots,x_n)=y_1,\cdots,\chi_m(x_1,\cdots,x_n)=y_m$ 都是算术的．则 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)=w\equiv(Ey_1)\cdots(Ey_m)[\chi_1(x_1,\cdots,x_n)=y_1\&\cdots\&\chi_m(x_1,\cdots,x_n)=y_m\&\psi(y_1,\cdots,y_m)=w]$．

情形(Vb)：$\varphi(0,x_2,\cdots,x_n)=\psi(x_2,\cdots,x_n)$，$\varphi(y',x_2,\cdots,x_n)=\chi(y,\varphi(y,x_2,\cdots,x_n),x_2,\cdots,x_n)$ 而 $\psi(x_2,\cdots,x_n)=w$ 及 $\chi(y,z,x_2,\cdots,x_n)=w$ 都是算术的．假设 $y,x_2,\cdots,x_n,w$ 为一些数使得 $\varphi(y,x_2,\cdots,x_n)=w$ 为真，则有一个有穷数列

$$a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_y$$

(即当 $i=0,1,\cdots,y$ 时 $\varphi(i,x_2,\cdots,x_n)$ 的值)使得

$$\text{(A)}\qquad \begin{aligned} &a_0=\psi(x_2,\cdots,x_n),\\ &a_1=\chi(0,a_0,x_2,\cdots,x_n),\\ &a_2=\chi(1,a_1,x_2,\cdots,x_n),\\ &\cdots\\ &a_y=\chi(y-1,a_{y-1},x_2,\cdots,x_n),\\ &w=a_y. \end{aligned}$$

但这时对哥德尔 $\beta$ 函数言便有两数 $c$，$d$ 使得 $\beta(c,d,i)=a_i$ $(i=0,1,\cdots,y)$ 并且若用 $\beta(c,d,i)$ 代替 $a_i$，则事实(A)便可以如下表示

$$\text{(B)}\qquad (Ec)(Ed)\{\beta(c,d,0)=\psi(x_2,\cdots,x_n)\&\ (i)[i<y\rightarrow\beta(c,d,i+1)=\chi(i,\beta(c,d,i),x_2,\cdots,x_n)]\&w=\beta(c,d,y)\}.$$

反之，如果 (B) 真，则对于由 (B) 所给的任意的 $c$，$d$ 言，各数 $\beta(c, d, i)$，$i = 0, 1, \cdots, y$ 的确组成一个序列 $a_0, a_1, \cdots, a_y$ 并且满足 (A)；而 (A) 又蕴涵 $\varphi(y, x_2, \cdots, x_n) = w$. 故谓词 $\varphi(y, x_2, \cdots, x_n) = w$ 便等价于 (B). 如果把 (B) 重写为 (C)，并计及归纳假设以及谓词 $\beta(c, d, i) = w$ 与 $i < y$ 的算术性，便可知道 (B) 是 $y, x_2, \cdots, x_n$ 的算术的谓词了.

$$
\text{(C)}\quad \begin{aligned}
&(Ec)(Ed)\{(Eu)[\beta(c, d, 0) = u \& \psi(x_2, \cdots, x_n) \\
&\quad = u] \& (i)[i < y \to \\
&(Eu)(Ev)[\beta(c, d, i+1) \\
&\quad = u \& \beta(c, d, i) = v \& \chi(i, v, x_2, \cdots, x_n) \\
&\quad = u]] \& \beta(c, d, y) = w\}.
\end{aligned}
$$

这里所用的把原始递归式分析为有限项自然数数列的方法是把狄德金对原始递归式的分析（狄德金 (Dedekind) [1888]）从数论上作修整而得的.

**系** 每个原始递归谓词 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 都是算术的.

因设 $\varphi$ 为 $P$ 的代表函数，则 $P(x_1, \cdots, x_n) \equiv \varphi(x_1, \cdots, x_n) = 0$ (§ 45). 反之，若用 ## 14，C 则亦可由这个系而推得本定理. 但是，由于是就原始递归描述 $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ 的长度而作归纳证明的，所以只能写成定理的形状而不是系的形状.

若把直觉的算术符号体系翻译到形式体系中去，我们便得到一公式 $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w})$，在形式体系的释义之下，它表示谓词 $\varphi(x_1, \cdots, x_n) = w$. 因此我们便可以证明下定理.

**定理 27** 每个原始递归函数 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 在第四章的形式体系内都是数字地可表示的 (§41)；即有一个公式 $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w})$，除却不同的变元 $\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n$，w 以外不含别的自由变元，而对于每个自然数 $n$ 元矢 $x_1, \cdots, x_n$，都有

(v) 如果 $\varphi(x_1, \cdots, x_n) = w$ 则 $\vdash \mathrm{P}(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n, \mathbf{w})$，

(vi) $\vdash \exists ! \mathrm{w} \mathrm{P}(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n, \mathrm{w})$.

**证明** 对 $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w})$ 的作成以及对定理的证明都是就 $k$ 而作串值归纳，且依情形 (I)—(V) 而穷举，各情形和定理 I 的

证明相应.

情形 (Vb): 由归纳假设，有公式 $Q(x_2, \cdots, x_n, w)$ 及 $R(y, z, x_2, \cdots, x_n, w)$ 分别数字地表示函数 $\psi(x_2, \cdots, x_n)$ 及 $\chi(y, z, x_2, \cdots, x_n)$ 即若把 (v) (vi) 中的 P, $\varphi$ 分别换为 Q, $\psi$ 或 $R$, $\chi$ 时该性质仍成立.

根据 §41* (180), 有一公式 $B(c, d, i, w)$ 数字地表示哥德尔的 $\beta$ 函数 $\beta(c, d, i)[=\mathrm{rm}(c, 1+(i+1)d)=\mathrm{rm}(c,(i'\cdot d)')]$, 且还具性质* 180a.

我们说,表示 $\varphi(y, x_2, \cdots, x_n)$ 的公式 $P(y, x_2, \cdots, x_n, w)$ 便是下公式

$\exists c\exists d\{\exists u[B(c, d, 0, u)\&Q(x_2, \cdots, x_n, u)]\&\forall i[i<y\supset\exists u\exists v[B(c, d, i', u)\&B(c, d, i, v)\&R(i, v, x_2, \cdots, x_n, u)]]\&B(c, d, y, w)\}$. 为此我们须证明它具有性质 (v) 及 (vi).

要证明 (v), 设 $y, x_2, \cdots, x_n, w$ 为一些数,使得 $\varphi(y, x_2, \cdots, x_n)=w$ 成立的. 则将有如定理 I 的证明中所说的那些数 $a_0, a_1, \cdots a_y$.对这些数 $a_0, a_1, \cdots, a_y$ 有两数 $c$ 与 $d$ 使得 $\beta(c, d, i)=a_i$ $(i=0, 1, \cdots, y)$. 因为 B, Q, R 有性质 (v), 故下列的叙述是成立的:

$$\vdash B(\mathbf{c}, \mathbf{d}, 0, \mathbf{a}_0), \qquad \vdash Q(\mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n, \mathbf{a}_0),$$
$$\vdash B(\mathbf{c}, \mathbf{d}, 1, \mathbf{a}_1), \qquad \vdash R(0, \mathbf{a}_0, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n, \mathbf{a}_1),$$
$$\cdots$$
$$\vdash B(\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{y}, \mathbf{a}_y), \qquad \vdash R(\mathbf{y}-1, \mathbf{a}_{y-1}, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n, \mathbf{a}_y),$$
$$\vdash B(\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{y}, \mathbf{w}).$$

由此再用 & 引, $\exists$ 引及 § 41* 166 便可证 $\vdash P(\mathbf{y}, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n, \mathbf{w})$.

要证明 (vi), 我们对 $y$ 作直觉归纳. 归纳步骤. 设 $w=\varphi(y, x_2, \cdots, x_n)$ 及 $u=\varphi(y', x_2, \cdots, x_n)=\chi(y, w, x_2, \cdots, x_n)$. 因 R 具性质 (v) (vi) (为简单起见，现在使用 § 38 所开始使用的非形式表示法)，故得: (a)$R(\mathbf{y}, \mathbf{w}, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n, \mathbf{u})$ 及 (b)$\exists! uR(\mathbf{y}, \mathbf{w}, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n, u)$. 由性质 (v) (这已对 P 证明了)得: (c)$P(\mathbf{y}, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n, \mathbf{w})$ 及 (d)$P(\mathbf{y}', \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n, \mathbf{u})$. 由就 $y$ 的

归纳假设得 (e)$\exists!wP(\mathbf{y}, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n, w)$. 我们今须证 $\exists!wP(\mathbf{y}', \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n, w)$. 设: (f)$P(\mathbf{y}', \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n, w)$, 由 *170 及 (d), 只须推演出 $\mathbf{u} = w$, 而 w 保持固定,便够了. 为了对 (f) 而用 & 消及 $\exists$ 消可假设下列三事: (g) $\exists u[B(c, d, 0, u) \& Q(\mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n, u)]$, (h)$\forall i[i < y' \supset \exists u \exists v B(c, d, i', u) \& B(c, d, i, v) \& R(i, v, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n, u)]$ 及 (i) $B(c, d, \mathbf{y}', w)$. 今由 (h) 用 § 39* 138a (或 *167 及 *166) 可得:

(j) $\forall i[i < y \supset \exists u \exists v[B(c, d, i', u) \& B(c, d, i, v) \& R(i, v, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n, u)]]$ 及 (k)$\exists u \exists v[B(c, d, \mathbf{y}', u) \& B(c, d, \mathbf{y}, v) \& R(\mathbf{y}, v, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n, u)]$. 为了对 (k) 而用 & 消及 $\exists$ 消可假设下列三事: (l)$B(c, d, \mathbf{y}', u)$, (m)$B(c, d, \mathbf{y}, v)$ 及 (n)$R(\mathbf{y}, v, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n, u)$. 由 (g) (j) 及 (m) 用 & 引及 $\exists$ 引得 (o) $P(\mathbf{y}, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n, v)$: 由 (o) (c) (e) 用 *172 得 $v = \mathbf{w}$, 而这与 (n) 合并便得 (p)$R(\mathbf{y}, \mathbf{w}, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n, u)$. 由 (p) (a) (b) 及 *172 得 $u = \mathbf{u}$, 而这与 (l) 合并得 (q)$B(c, d, \mathbf{y}', \mathbf{u})$. 由 (q) (i)* 180a 及 *172 得 $\mathbf{u} = w$, 而这便是所要推演的.

**系** 每个原始递归谓词 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 在形式体系内都是数字地可表示的.

因为,设 $P(x_1, \cdots, x_n, w)$ 数字地代表 $P$ 的代表函数 $\varphi$, 则由 §41 (vii) (在那里是由 *173, *(164) 而得的) 可知 $P(x_1, \cdots, x_n, 0)$ 便数字地可表示 $P$.

**引理 18b** 定理 27 及系对罗宾逊形式系统(§§41,76)言亦是成立的, 后者是由谓词演算及下列 13 条特殊数论公理的系统组成: 公理 14—21 以及 *104—*107, *137 (或 *136) (中的公式).

用 §41 引理 18a 可证.

**附注 1** 一个更具野心的想法 (对完全数论系统而非对罗宾逊系统)是证明那些表示递归方程的公式的可证性, 例如, 就情形 (Vb) 言便是证明下事实:

(1) $\vdash P(0, x_2, \cdots, x_n, w) \sim Q(x_2, \cdots, x_n, w)$.

(2) $\vdash P(y', x_2, \cdots, x_n, w) \sim \exists z[P(y, x_2, \cdots, x_n, z)$

$$\&R(y, z, x_2, \cdots, x_n, w)].$$

由(1)(2)再对 y 作形式归纳(根据就 $k$ 的直觉归纳的假设，已有 $\vdash \exists! wQ(x_2, \cdots, x_n, w)$ 及 $\vdash \exists! wR(y, z, x_2, \cdots, x_n, w)$)，便得:

(3) $$\vdash \exists! wP(y, x_2, \cdots, x_n, w).$$

要证明(1)(2)便须首先把 § 48 中的非形式的 $\beta$ 函数理论加以形式体系化. 而这又只须证明

($\alpha$) $\vdash \exists c \exists d B(c, d, 0, w)$,

($\beta$) $\vdash \exists c_2 \exists d_2 \{\forall i[i \leqslant y \supset \exists u[B(c_1, d_1, i, u) \& B(c_2, d_2, i, u)]] \& B(c_2, d_2, y', w)\}$

便够了. 这时(1)(2)的四个蕴涵式便全可以证明: 用*180c,($\alpha$)以证第二蕴涵式. 用($\beta$)以证第四蕴涵式. 我们现在不想对($\alpha$)($\beta$)而作形式证明[1]. 希尔柏特一伯尔奈斯[1934]第 401—419 页实际上曾在另一形式体系中作了证明. 由其结果可得(方法见 § 74 例 9 前)对我们的(古典及直觉主义的)体系言,($\alpha$)($\beta$)亦成立.

---

1) 参见书末附录 II——俄译注.

# 第十章　元数学的算术化

## § 50. 元数学作为一般算术

正如我们在 §42 所指出的(用哥德尔 [1931] 法),若对形式客体选择一个特定的枚举，或在不同的自然数与不同的形式客体之间(不必用尽自然数)作出一个特定的对应，然后不谈形式客体而谈对应的自然数,那么元数学便变成了自然数算术的一个分支.在本章内我们便对元数学作出这个算术化,我们用希尔柏特-伯尔奈斯 [1939] 中的哥德尔编号法.[1]

但我们并不直接作出算术化，而首先把形式体系表成为一个一般算术,然后再把这个一般算术表示于通常的算术中.由这可以得出一些类比,它们具有由利的 (heuristic)[2] 价值,此外,把形式系统表为一般算术这事本身也将有其兴趣.

自然数算术是处理下列的客体域的,由一个原始客体 0 出发,经过一个原始运算′ 或 +1 而造成的客体的域(§ 6).

一般算术(目前所用到的)则用一个或多个零，一个或多个后继运算.我们约定(别的约定也可用)由原始客体经过不同的方式而作成的客体都是不同的.要把一形式体系表成一般算术有好几个可能性. 黑姆斯 (Hermes) [1938] 讨论下列的算术：把空表达式作为 0 而把后接一个形式记号作为后继运算.

作为算术来说,我们所选用的一般算术具有更复杂的结构,但它却能够更直接地表示形式客体的文法结构及逻辑结构. 它有 $r+1$ 个零 $0_0, 0_1, \cdots, 0_r$,这里 $r$ 是一个自然数,后面将明白指出;对每个(后面将明白指出的)容许的自然数值 $s$，都有一个后继运

1) 或译哥德尔配数法 (Gödel numbering)——译者注.

2) 原文指不严格的但可帮助发现的. 今用音译为“由利的”——译者注.

算可作用到变目的 $s+1$ 矢去，把 $x_0, x_1, \cdots, x_s$ 作为变目而施用后继运算的结果将写为"$(x_0, x_1, \cdots, x_s)$"，有时写为"$x_0(x_1, \cdots, x_s)$"。这个一般算术中的客体以后将叫做实体 (entity)。

我们将用归纳定义(类似于§6中对'自然数'的定义)而定义它. 1. $0_0, 0_1, \cdots, 0_r$ 是实体. 2. 对每个容许的 $s$ 来说，如果 $x_0, x_1, \cdots, x_s$ 为实体，则 $(x_0, x_1, \cdots, x_s)$ 为实体. 3. 只有由 1, 2 所给出的才是实体.

上面已经指出，两个实体是相等的，当且仅当它们由诸零用同样方式经过后继运算作成. 当 x 与 y 相等时，我们写"$x \asymp y$"(不等时则写为"$x \not\asymp y$"). 我们所以用"$\asymp$"而不用"="只是为了避免与形式体系内的"="相混乱.

用以刻画实体域的公理与皮亚诺的自然数公理(§6, §7)相仿. 在特例，相应于实体域的生成方式(或相应于刚才所给的归纳定义)它们包含有下形的数学归纳证明法：如果每个实体 $0_0, 0_1, \cdots 0_r$，都有某一性质，又如果对于每个容许的 $s$，只要实体 $x_0, x_1, \cdots, x_s$ 具有这性质，则实体 $(x_0, x_1, \cdots, x_s)$ 亦具有之，那么所有实体都具有这性质. 一般算术的别的皮亚诺公理读者可自行叙述之.[1)]

实体可按照其生成过程而排成偏序(§8末)，我们用"$x \prec y$"表示：在 y 的生成过程中，x 先于 y 而生成. 归纳地表示便是：1. 对每个容许的 $s$ 以及每个 $i \leqslant s$，$x_i \prec (x_0, x_1, \cdots, x_s)$. 2. 对每个容许的 $s$ 以及每个 $i \leqslant s$，如果 $x \prec x_i$ 则 $x \prec (x_0, x_1, \cdots, x_s)$. 3. 只有由 1, 2 所给出的才有 $x \prec y$.

对于一实体 x 及一自然数 $i$ 我们定义一函数，由它可以得出后继实体的一个前驱：

$$\{x\}_i \asymp \begin{cases} x_i & \text{如果 } x \asymp (x_0, x_1, \cdots, x_s) \text{ 及 } i \leqslant s \\ x & \text{此外情形.} \end{cases}$$

对本章的下文来说，我们明确指出：零 $0_0, 0_1, \cdots, 0_r$ 的个数

1) 参见附录 I——俄译注.

为 13，并把它们如下命名：

$$\supset, \&, \vee, \neg, \forall, \exists, =, +, \cdot, \prime, 0, \boldsymbol{a}, {}_1.$$

我们又明指 $s$ 可容许为 0，1 及 2. 这样便可以把我们的一般算术完全地定义为一个抽象客体域了，这些抽象客体是一些可以根据它们的生成方式而辨认及彼此区别的个体.

我们还要确定如何可把我们的形式体系(在第四章所引入的)在一般算术中表示出来. 这便须在实体与形式体系中的客体之间作出对应. 如 §16 所说的，形式客体包括形式符号，形式符号的有限序列(叫做'形式表达式')以及形式表达式的有限序列. 我们无须把每个形式客体都对应于一个实体，只是在元数学上有意义的形式客体才给以对应，比如说，不合文法的表达式如 ((0∀00 = 便不对应于实体. 又有些实体是不对应于形式客体的.

§ 16 中所列的前 11 个形式符号将对应于一般算术中前 11 个零，即 $\supset, \&, \vee, \neg, \forall, \exists, =, +, \cdot, \prime, 0$. 它们是用相同的符号表示的.

至于形式体系中的变元 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \cdots$，便分别地对应于下列的实体

$$\boldsymbol{a}, ({}_1, \boldsymbol{a}), ({}_1, ({}_1, \boldsymbol{a})), ({}_1, ({}_1, ({}_1, \boldsymbol{a}))), \cdots$$

(有时写为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_{11}, \boldsymbol{a}_{111}, \cdots$)，即对应于第十二个零以及依照下法所造成的实体，由第十二个零继续地使用一般算术中 $s = 1$ 时的后继运算而以第十三个零作为第一个前驱.

至于项，公式如 $r + s, r', r = s, A\&B, \neg A, \forall x A(x)$ 等便分别对应于实体 $(+, r, s), (\prime, r), (=, r, s), (\&, A, B), (\neg, A), (\forall, x, A(x))$，而 $r, s, A, B, x, A(x)$ 等便是对应于所给的 $r, s, A, B, x, A(x)$ 的那些实体，即我们对所给的 $r, s, A, B, x, A(x)$ 再重复相应的过程.

**例 1** 对应于公式 $\exists \boldsymbol{b}(\neg \boldsymbol{b} = 0)$ 的实体是 $(\exists, ({}_1, \boldsymbol{a}), (\neg, (=, ({}_1, \boldsymbol{a}), 0)))$.

但今后当表示实体时，除非想强调它们作为实体时的结构(即生成方式)，否则我们仍用以前的表达式. 例如，当 $\forall, x, A(x)$

为实体时，我们可把它们的后继者即 $(\forall, x, A(x))$ 写为“$\forall x A(x)$”；当 $+, r, s$ 为实体时，我们可把 $(+, r, s)$ 写为“$r+s$”. 把与形式体系中客体相应的实体照这方法而表示，可使得我们关于实体的叙述看起来和前面关于形式体系的客体的叙述一样.

更进一步，在处理一般算术时，更宜于把对应于一公式的实体 $\forall x A(x)$（即实体 $(\forall, x, A(x))$）简单地叫做“公式”，把实体 $r+s$ 叫做一“项”等等. 为与原来所描述的形式体系相区别起见，关于实体的体系可叫做“作为一般算术的形式体系”，当有必要时，原来的形式体系可叫做“形式语言体系”.

证明及推演将用相应的推演来表示，但用树枝形（§ 24 末）而不用公式的有限序列. 因此，设有一个序列形的推演及其分析，要想得到相应的实体，须先把推演写成树枝形. 在树枝形之下，它具有下列三形之一

$$D, \frac{P}{D}, \frac{PQ}{D},$$

这里，D是一公式，而 P, Q 是树枝形的推演. 在一般算术中，我们分别解释作实体 (D), (D, P) 及 (D, P, Q)，当然同时把 D, P, Q 等解释作相应于语言客体 D, P, Q 的实体.（在特例，公式D和只由一公式D所组成的推演便变成不同的实体；后者所变成的实体便是前者所变成的实体在 $s=0$ 时的后继者.）

**例 2.** § 21 的推演 (6)，如果写成树枝形，如 § 24 例 1 那样，便成为一实体如下：(8, (7, (1), (6)), (5, (3, (1), (2)), (4)))，这里数字 1—8 便是把 § 21 (6) 中的公式当作实体时的缩写.

这样便完成了实体与有意义的形式语言客体间的对应. 不同的实体对应于不同的形式语言客体（除却下列情形，两个写成序列形的推演只有非本质的差异，而写成树枝形时变成相同）. 要证明这点，就项与公式的情形言，有赖于下列结果：作为形式语言客体时项与公式中的运算子的辖域是唯一的（§ 17）.

这样，由形式语言体系而转到一般算术时，我们作了两个改

变，它们可以分别实行．第一个改变是属于形式客体的结构方面．在语言表达式中项与公式是形式符号的有限序列，其中有意义的部分必须作为子序列而认出，在一般算术中，它们则直接由有意义的部分经过广义后继运算而得到．对后者（一般算术——译者）而言，把一表达式分析成各个有意义部分（包括括号的使用）的分解，便由形式的水平提高到元数学叙述的水平，不须我们再劳神了．

例如，试把（A）⊃（B）作为语言系统的公式，而 A，B 为公式（即“A”“B”为表示公式的元数学字母）．这时我们明显地谈到一些符号的有限序列，其中写出来的两对括号亦为叙列中的符号，而由“A”及“B”所表示的序列亦出现于该序列中的指定位置（§16）．

另一方面，如果（A）⊃（B）当作实体系统中的公式，而 A，B 同样亦为公式．这时“（A）⊃（B）”便意指（⊃，A，B），是三个实体 ⊃，A，B 的后继者，在“（A）⊃（B）”中的括号以及在“（⊃，A，B）”中的括号及逗号都不是形式客体，而只是我们对所讨论的实体命名时所用的直觉上记号中的一部分．

第二个改变是，对于表示形式体系中符号体系的功用，我们采用了一个不同的观点．在第四章内，我们把形式体系内的客体看作是语言符号或一些标志，其它的语言客体便由它们构成．在研究它们时，原则上我们必须注意下列之间的区别，一客体与该客体的名或指称之间的区别，提到一表达式（本身当作被考虑的客体）和用一表达式（以表示另一客体或表示一命题）之间的区别．这曾由弗雷格（Frege［1893］第 4 页）卡纳普（Carnap［1934］第 153—160 页）及奎因（［1940］，第 23—27 页）所强调．要对一客体有所陈述，通常须用到该客体的名．（有时亦可应用的另一方法是，指着该客体，或用语言的构造而指着该客体，即叫人注意它而不是说出它的名．）我们并没有说我们的朋友，我们只是说我们的朋友的名．我们亦不会误把我们的朋友约翰当作是若干笔画的两个字，但对前几章所处理的元数学，我们却必须十分小心，因为我们正在处理着的一些客体其本身又是语言的东西．

要得到语言客体的名，一个方法是把它们放入引号之内．约翰的名是“约翰”，而约翰的名的名是““约翰””．约翰的名的名本是两个字放在引号之内；上面所用到的第二组引号只是用以命名它罢了．[1)]

第二个方法是：用不同的元数学字母及表达式来作为语言客体的名．

我们无须严格禁止有些语言客体本身便用作该客体的名；这时该客体便有两种用法，用作所研究的客体以及用作它自己的名．在后一种用法中它叫做自名的．

我们前几章所用的方法便是第二法与第三法的合并．

指称（designation）这个问题，如果明显地处理是很麻烦的，亦与作为数学的元数学无关．但这争论是可以避免的，我们只使用形式客体的名而不建立该客体本身．这样做法在一般算术中尤其方便，我们把“⊃”，“∀”，“∀xA(x)”等作为某些客体的名(这些名便是在引号之内的表达式）而不作为这些客体的本身．我们不明指这些客体到底是什么，只规定它们是属于一个抽象客体域内，这些客体我们叫做实体，彼此依照一定方式而发生关系（参见§8)．就第四章的意义来说，被命名的客体可以是形式记号亦可以是表达式等等，但目前我们不管这点，由于与元数学无关．(尽管这样一来，我们在元数学中可以避免了指称问题，但当把元数学应用到一个特殊语言系统时，我们必须面对这问题．)

形式系统既然不再是作为纸上标志的形式符号的系统而是作为抽象的客体系统，这样我们的元数学(即对形式体系的研究)便变成纯粹数论的一个分支，与自然数的算术以及类似的数学学科在概念上完全相同了．

**附注 1** 在非形式的数学著作中，通常的约定或实际是：一切符号都不加引号；因此当一符号被提到而不是被用到时它便是

---

1）一客体所以要与表示它的名字有所区别，为的是要避免下列的谬论：君士坦丁堡与伊斯坦布尔是同一东西(同一地方——译者)，但“君士坦丁堡”以“君”字开始，而“伊斯坦布尔”以“伊”字开始——俄译注．

自名的．在本书中，我们实行的是，在元数学的段落中有系统地使用引号，用以区别提到元数学的表达式和用到元数学表达式(即用以指称形式语言表达式)，但我们这样做也不过是强调而已．

## §51. 递归的元数学定义

当把一般算术映象到通常自然数的算术去后，元数学的算术化便可以在 §52 中完成了．我们的主要目的是证明哥德尔定理的引理以及证明定理 31． 这两者都可由下列结果推得，由元数学的谓词映象而来的一系列数论谓词都是原始递归的．

当我们考虑在一般算术中元数学谓词的定义的本质后，便可以在直觉上看见为什么会有这样的结果，而且会对有类似结构的任何形式系统都有类似结果．

因为各实体都是由零经过后继运算而生成的，所以有关这些实体的谓词及函数可由递归式而定义． 现在我们使用这种意念，但无需立即便对一般算术中的‘原始递归性’作一个精确的定义．

下面我们给出 13 个元数学谓词的定义，在每个定义中列出当谓词为真的情形．(有些句子加上星号以便 §52 引用．)

每个定义或者是显示的（所定义的谓词不出现于任何定义句中)，或者是一个原始递归式(对某一实体该谓词的值依赖于对直接前面的实体时该谓词的值，有参元时亦仿此处理)，只有在定义 5 及定义 11 中用到二元递归式（在定义 11 中有一元则是数元)．关于没有这种性质的元数学定义的讨论可参见 §53．

读者可核验，各定义的确定义了相应的谓词，由本书前几节（第四章及 § 41，§ 50）我们已经知道这些谓词了．

**把形式数论系统当作一般算术时元数学谓词的定义**

Dn 1． y 是一数字．(缩写为 $\mathfrak{N}(y)$．)

1． $y \asymp 0$

2． $y \asymp n'$ (即 $y \asymp (\prime, n)$，参见 §50)，而 n 为一数字．

Dn 2． y 是一变元．(缩写为 $\mathfrak{V}(y)$．)

1. $y \asymp \boldsymbol{a}$.

2. $y \asymp x_1$（即 $y \asymp ({}_1, x)$），而 x 为一变元.

Dn 3. y 是一项.（缩写为 $\mathfrak{T}(y)$.）

1. $y \asymp 0$.

2. y 为一变元.

3—5. $y \asymp r + s$ 或 $r \cdot s$，而 r，s 为项.

$y \asymp r'$，而 r 为项.

Dn 4. D是一公式.（缩写为 $\mathfrak{F}(D)$.）

1. $D \asymp r = s$，而 r 与 s 为项.

2—5. $D \asymp A \supset B$，$A \& B$ 或 $A \vee B$，而 A 与 B 为公式. $D \asymp \neg A$，而 A 为公式.

6—7. $D \asymp \forall x A(x)$ 或 $\exists x A(x)$，这里 x 为变元，$A(x)$ 为公式.

Dn 5.（t 为项，x 为变元，E 是项或公式）把 E 中的 x（的自由出现）代入以 t 时得 D.（缩写为 $\mathfrak{S}(D, E, t, x)$.）

1. t 为一项，x 为一变元，

$E \asymp x$ 而 $D \asymp t$.

2—3. t 为一项，x 为一变元，E 为 0 或一变元 $\divideontimes x$，而 $D \asymp E$.

4—5. E 为一项或一公式，E 为 $(e_0, e_1)$，而D为 $(e_0, d_1)$，这里 $e_0 \divideontimes {}_1$，而 $\mathfrak{S}(d_1, e_1, t, x)$（因此 t 为一项而 x 为一变元）.
E 为一项或一公式，E 为 $(e_0, e_1, e_2)$ 而D为 $(e_0, d_1, d_2)$，这里 $e_0 \divideontimes \forall$ 或 $\exists$，而 $\mathfrak{S}(d_1, e_1, t, x)$ 及 $\mathfrak{S}(d_2, e_2, t, x)$.

6—7. t 为一项，E 为 $(\forall, y, e_2)$ 而D为 $(\forall, y, d_2)$，这里 y 为一变元，$e_2$ 为一公式，又或则 $y \divideontimes x$ 及 $\mathfrak{S}(d_2, e_2, t, x)$，或则 $y \asymp x$，而 $D \asymp E$. 对 $\exists$ 仿此.

Dn 6.（E 为一项或一公式，x 为变元）E 含自由的 x.（缩写为 $\mathfrak{CF}(E, x)$.）

1. E 为一项或一公式，x 为变元而 $\bar{\mathfrak{S}}(E, E, 0, x)$.

Dn 7.（t 为一项，x 为一变元，E 为一公式）t 对 E 中的 x 是自由的.（缩写为：$\mathfrak{F}(t, x, E)$）. 对 E 作归纳，仿 Dn4 中的句

1—7. 例如 6. t 为一项，x 为一变元，而，$E \asymp \forall y A(y)$，这里 y 为一变元，A(y) 为一公式，并且或则 A(y) 不含自由的 x，或则 t 对 A(y) 中的 x 是自由的且 t 不含自由 y.

Dn 8. D 为一公理.（缩写为 $\mathfrak{A}(D)$.）

1—10. $D \asymp A \supset (B \supset A)$，而 A 与 B 为公式（公理模式 1a）. 对公理模式 1b，3，4a，4b，5a，5b，6，7，8 仿此.

（注意：我们把公理模式 10 分两种情形（句 11 及 13），视 A(x) 含自由的 x 与否. 对公理模式 11 仿此.）

*11—12. 有一 t 使得 $D \asymp \forall x A(x) \supset A(t)$，这里 A(x) 含自由的x，t 对 A(x) 中的 x 是自由的，并且 $\mathfrak{S}(A(t), A(x), t, x)$.

（注意：由条件"t 对 A(x) 中的 x 是自由的"可得 x 是一变元，A(x) 是一公式而 t 为一项. 这里我们不用 §18 的约定，假设 A(t) 是把 A(x) 中的 x 代以 t 的结果，而明显地写出"$\mathfrak{S}(A(t), A(x), t, x)$".）对公理模式 11 仿此.

13—14. $D \asymp \forall x A \supset A$，这里 x 是一变元，A 是一公式，A 不含自由的 x. 对公理模式 11 仿此.

15. $D \asymp A(0) \& \forall x(A(x) \supset A(x')) \supset A(x)$，这里 A(x) 是一公式且有 $\mathfrak{S}(A(0), A(x), 0, x)$ 及 $\mathfrak{S}(A(x'), A(x), x', x)$.

16—23. $D \asymp \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{b}' \supset \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$（公理 14）. 对公理 15—21 仿此.

Dn 9. D 是 E 的直接后承.（缩写为 $\mathfrak{C}(D, E)$.）

1—2. $E \asymp C \supset A(x)$ 而 $D \asymp C \supset \forall x A(x)$，这里 x 是一变元，A(x) 与 C 为公式，C 不含自由的 x（规则 9）. 对规则 12 仿此.

Dn 10. D 是 E 与 F 的直接后承.（缩写为 $\mathfrak{C}(D, E, F)$.）

1. D 与 E 为公式而 $F \asymp E \supset D$（规则 2）.

Dn 11. **x** 是相应于自然数 $x$ 的数字（缩写为 $\mathfrak{Nu}(\mathbf{x}, x)$.）

1. $\mathbf{x} \asymp 0$ 而 $x = 0$

2. $\mathbf{x} \asymp \mathbf{n}'$ 而 $x = n'$，并且 $\mathfrak{Nu}(\mathbf{n}, n)$。 ←

Dn 12. Y是一证明.（缩写为 $\mathfrak{Pf}(Y)$.）

1. $Y \asymp (D)$，而D是一公理.

2. $Y \asymp (D, P)$，而P是一证明，D是 $\{P\}_0$ 的直接后承.

3. $Y \asymp (D, P, Q)$，而P，Q是证明，D是 $\{P\}_0$，$\{Q\}_0$ 的直接后承.

Dn13. $A(\boldsymbol{a})$ 是一公式，$x$ 是一自然数，Y是公式 $A(\mathbf{x})$ 的证明（作为 $A(\boldsymbol{a})$，$x$，Y的谓词）.（缩写为：$\mathfrak{Pf}(A(\boldsymbol{a}), x, Y)$.）

*1. $A(\boldsymbol{a})$ 含自由的 $\boldsymbol{a}$，$\mathfrak{Pf}(Y)$，并有 $\mathbf{x}$ 使得 $\mathfrak{Nu}(\mathbf{x}, x)$ 及 $\mathfrak{S}(\{Y\}_0, A(\boldsymbol{a}), \mathbf{x}, \boldsymbol{a})$.

2. $A(\boldsymbol{a})$ 不含自由的 $\boldsymbol{a}$，$\mathfrak{Pf}(Y)$ 及 $\{Y\}_0 \asymp A(\boldsymbol{a})$.

Dn 13a. 对每 $n$ 个不同变元 $\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n$，$n$ 个自然数 $x_1, \cdots, x_n$，及公式 $A(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n)$：Y为 $A(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)$ 的一证明。（缩写为：$\mathfrak{Pf}_{\mathrm{x}_1,\cdots,\mathrm{x}_n, A(\mathrm{x}_1,\cdots,\mathrm{x}_n)}(x_1, \cdots, x_n, Y)$ 或 $\mathfrak{Pf}_A(x_1, \cdots, x_n, Y)$.）

仿上.

## §52. 哥德尔编号

我们今在自然数的算术内把一般算术加以表示，因而便完成了元数学的算术化。首先我们把零实体对应于不同的奇数：

| $\supset$ | & | $\vee$ | $\neg$ | $\forall$ | $\exists$ | $=$ | $+$ | $\cdot$ | $'$ | 0 | $\boldsymbol{a}$ | $_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 | 27 |

又如果实体 $\mathrm{x}_0, \cdots, \mathrm{x}_s$ 分别对应于数 $x_0, \cdots, x_s$，则其后继实体 $(\mathrm{x}_0, \cdots, \mathrm{x}_s)$ 便对应于数 $p_0^{x_0} \cdots p_s^{x_s}$（§45，# 18）.

根据与实体定义相应的数学归纳法，可知每个实体都对应于一自然数>0. 我们称这数是该实体的哥德尔数，或说它代表该实体（或代表该实体所对应的形式语言客体）. 因为后继实体必对应于偶数（由于 $p_0 = 2$ 及 $x_0 \neq 0$），又因为至多只有一个 $s$ 及一组 $x_0, \cdots, x_s$ 使得一给定的正整数具有 $p_0^{x_0} \cdots p_s^{x_s}$ 形 $(x_0, \cdots, x_s > 0)$，

故不同的实体必对应于不同的数.

**例 1** $\exists b(\neg b=0)$ 或实体

$(\exists, (_1, a), (\neg, (=, (_1, a), 0)))$ 的哥德尔数是

$$2^{13}\cdot 3^{2^{27}\cdot 3^{25}}\cdot 5^{2^{9}\cdot 3^{2^{15}\cdot 3^{2^{27}\cdot 3^{25}}\cdot 5^{23}}}.$$

因为 $x_i<p_0^{x_0}\cdots p_s^{x_s}$, $0\leqslant i\leqslant s$, 所以如果两实体 x, y 具有关系 x≺y, 则它们所对应的两数 $x$, $y$ 必有关系 $x<y$. (但是, $x<y$ 成立时, $x$, $y$ 所分别对应的实体 x, y 未必有关系 x≺y; 例如, 3<5 但没有 ⊃≺&.)

如果 x 是一个具后继者形 $(x_0, \cdots, x_s)$ 的实体, $x$ 为 x 的哥德尔数, 则前驱 $\{x\}_i (i\leqslant s)$ 的哥德尔数为 $(x)_i$ (§45 #19).

当我们由实体而转到它们的哥德尔数时, 关于实体的谓词或函数便变成关于该哥德尔数的谓词或函数. 如把后者的定义域推广到所有自然数去, 我们便得到一个数论谓词或数论函数, 可说是相应于原来谓词或函数的谓词或函数. 特别, 就谓词 $\mathfrak{P}(x_1, \cdots, x_n)$ 言, 所谓它的相应数论谓词 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 将指下列的谓词: 当 $x_1, \cdots, x_n$ 不全为哥德尔数时, 其值为 f. 即 $P(x_1, \cdots, x_n)\equiv\{x_1, \cdots, x_n$ 为实体 $x_1, \cdots, x_n$ 的哥德尔数且有 $\mathfrak{P}(x_1, \cdots, x_n)\}$.

当原来谓词中某些变元已经以整个自然数集为变域时 (例如 §51 Dn 11) 亦仿此.

**引理 19** 就 Dn 1—Dn 13, Dn 13a 所定义的谓词言, 其相应数论谓词是原始递归的.

**证明** 为了说明处理方法起见, 今处理 Dn3 而把 Dn2 作为已经处理好了.

我们可把 Dn3 符号地表示如下:

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{T}(y)\equiv y\asymp 0\\
&\qquad\vee\mathfrak{B}(y)\\
(1)\quad&\qquad\vee[y\asymp(+, \{y\}_1, \{y\}_2)\&\mathfrak{T}(\{y\}_1)\&\mathfrak{T}(\{y\}_2)]\\
&\qquad\vee[y\asymp(\cdot, \{y\}_1, \{y\}_2)\&\mathfrak{T}(\{y\}_1)\&\mathfrak{T}(\{y\}_2)]\\
&\qquad\vee[y\asymp({}', \{y\}_1, )\&\mathfrak{T}(\{y\}_1)].
\end{aligned}
$$

其中五个析取项相应于§51 Dn 3中五个句子. 对第三句我们注意，如果对任何实体 r，s 言有 y≍r + s 即 y≍(+，r，s)，则必 r≍$\{y\}_1$，s≍$\{y\}_2$. 所以有实体 r，s 使 y≍(+，r，s) 这事实可表示为 y≍(+，$\{y\}_1$，$\{y\}_2$).

今在 (1) 中把零实体 +，·，′，0 换以它们的哥德尔数 17，19，21，23，把已知谓词 𝔙(y) 换以它的相应的数论谓词 $V(y)$，≍ 换以=，后继者实体 $(x_0, \cdots, x_s)$ 换以 $p_0^{x_0}, \cdots, p_s^{x_s}$，前驱 $\{y\}_i$ 换以 $(y)_i$. 对目前所定义的谓词不写 𝔗(y) 而改写为 $T(y)$. 这样便形式地得到下列的数论等价式.

$$
(2)\quad \begin{aligned}
T(y) \equiv\ & y = 23 \\
& \vee V(y) \\
& \vee [y = 2^{17} \cdot 3^{(y)_1} \cdot 5^{(y)_2} \& T((y)_1) \& T((y)_2)] \\
& \vee [y = 2^{19} \cdot 3^{(y)_1} \cdot 5^{(y)_2} \& T((y)_1) \& T((y)_2)] \\
& \vee [y = 2^{21} \cdot 3^{(y)_1} \& T((y)_1)].
\end{aligned}
$$

这里，因为 $y \neq 0$ 时 $(y)_i < y$，故由自然数算术中的串值递归式可知 (2) 定义了一个谓词 $T(y)$；再由 #G 及 ##2，3，14，19，A，C，D 及我们所作的 $V$ 是原始递归的假设，可知 $T(y)$ 是原始递归的(参见§46 例3).

还须证明，由 (2) 所定义的谓词 $T(y)$ 就是 𝔗(y) 的相应数论谓词. 为此，我们对 $y$ 作串值归纳而证下列两命题：

(a) 如果 $T(y)$(由 (2))，则 $y$ 为某一实体 y 的哥德尔数并有 𝔗(y) (由 (1)).

(b) 如果 𝔗(y) (由 (1)) 而 $y$ 为 y 的哥德尔数，则 $T(y)$ (由 (2)).

证明. (a) 由 (2)，只当 (2) 的右边的析取项 (或"句子") 之一为真时 $T(y)$ 才真；因此我们须分五种情形讨论. 情形2：$V(y)$ 真. 因为 $V$ 是相应于 𝔙 的谓词，故 $y$ 便是一变元 y 的哥德尔数，即 𝔙(y) 真；故由 (1) 中的相应句子得 𝔗(y). 情形3：$y = 2^{17} \cdot 3^{(y)_1} \cdot 5^{(y)_2} \& T((y)_1) \& T((y)_2)$. 则有 $(y)_1, (y)_2 < y$；因此由关于 $y$ 的归纳假设知 $(y)_1$ 及 $(y)_2$ 为两实体 r 及 s 的哥德尔数且有 𝔗(r) 及

$\mathfrak{T}(s)$. 故 $y(=2^{17}\cdot 3^{(y)_1}\cdot 5^{(y)_2})$ 便是实体（+，r，s）的哥德尔数。试把这实体叫做 y，则 $r\asymp\{y\}_1$，$s\asymp\{y\}_2$；故 $y\asymp(+,\{y\}_1,\{y\}_2)\&\mathfrak{T}(\{y\}_1)\&\mathfrak{T}(\{y\}_2)$，再由（1）中相应句子得 $\mathfrak{T}(y)$.（b）的证明仿此，不过依（1）的右边五个析取项（或“句子”）而分情况.

对 Dn1—Dn 13，Dn 13a 中其它谓词的定义可同法处理，只是用到二元递归式的以及加星号的句子则其处理略有不同. 经过翻译之后（例如由（1）到（2）），所定义的数论谓词都必须以哥德尔数为变目时它才可以是真的，因为在原来定义的每一句中，每一变实体都要求满足表中在前面的谓词或要求是一些实体的后继者，而这些实体或者是固定的或者须满足固定的谓词，或须满足当前定义的谓词. 例如我们可把 Dn9 的句 1 翻译如下，

$$e=2^3\cdot 3^{(e)_1}\cdot 5^{(e)_2}\&d=2^3\cdot 3^{(e)_1}\cdot 5^{2^{11}\cdot 3^{(d)_{2,1}}\cdot 5^{(e)_2}}$$
$$\&V((d)_{2,1})\&F((e)_2)\&F((e)_1)\&\overline{CF}((e)_1,(d)_{2,1}),$$

这里“$(d)_{2,1}$”是“$((d)_2)_1$”的缩写. 注意 $\overline{CF}(e,x)$ 并不恰是 $\overline{\mathfrak{C}\mathfrak{F}}$(E，x) 的相应数论谓词，因为当 $e$ 或 $x$ 不是哥德尔数时它仍是真的. 但在这里却没有关系，因为 $(e)_1$ 又出现于 $F((e)_1)$ 中，$(d)_{2,1}$ 又出现于 $V((d)_{2,1})$ 中，这相应于 Dn 9 句 1 中的 C 是一公式及 x 是一变元这些条件.

Dn 5 与 Dn 11 是二元（简单）递归式. 对 Dn5 言，若令 $T(z,t,x)\equiv\{z=2^d\cdot 3^e$ 而 $S(d,e,t,x)\}$，则 $T$ 便满足一个对一变元 $x$ 的串值递归式，且有 $S(d,e,t,x)\equiv T(2^d\cdot 3^e,t,x)$.

还须考虑有星号的 Dn 8 的句 11 及句 12 及 Dn 13 的句 1 及 Dn13a 句 1. 我们把 Dn8 句 11 译为：

$$(Et)_{t<d}[d=2^3\cdot 3^{2^{11}\cdot 3^{(d)_{1,1}}\cdot 5^{(d)_{1,2}}}\cdot 5^{(d)_2}\&CF((d)_{1,2},(d)_{1,1})$$
$$\&F(t,(d)_{1,1},(d)_{1,2})\&S((d)_2,(d)_{1,2},t,(d)_{1,1})],$$

然后再用 #E. 上界 $t<d$ 可证明如下，当 A(x) 含自由的 x 时，$t\prec$ A(t)$\prec\forall x$A(x)$\supset$A(t)$\asymp$D. 我们把 Dn 13 句 1 译为

$$CF(a,25)\&Pf(y)\&(En)_{n<y}[Nu(n,x)\&S((y)_0,a,n,25)].$$

这样便完成了引理 19 的证明. 这个证明的要点在于：一般算术中的原始递归式变成了通常算术中的串值递归式，因为哥德

尔编号虽则破坏了直接后继的关系却保持了次序关系．每一变元如果不是作为所定义的谓词的自变元而引入，而是随着量词而引入的（例如 Dn 8 句 11 中的 t 及 Dn 13 句 1 中的 **x**)，则必须核验，其变域是可加限的(即有上界的——译者).

**引理 20** 在本节的哥德尔编号下，§ 42 引理 21 中的谓词 $A(a, b)$ 及 $B(a, c)$ 是原始递归的.

**证明** Dn 13 中的谓词 $\mathfrak{Pf}(\mathrm{A}(\boldsymbol{a}), x, \mathrm{Y})$ 的相应的数论谓词为 $Pf(a, x, y)$，我们可用它来表示 $A(a, b)$ 及 $B(a, c)$ 如下，

$$A(a, b) \equiv Pf(a, a, b), \quad B(a, c) \equiv Pf(2^9 \cdot 3^a, a, c),$$

再由引理 19 得证.

又由 § 49 定理 27 系便可证明 § 42 引理 21.

**定理 31** 对任意给定的公式 $\mathrm{A}(\boldsymbol{a})$ 言（参见 Dn 13)，谓词 ‚$\mathrm{A}(\mathbf{x})$ 是可证的’(作为 $x$ 的谓词，而 $\mathbf{x}$ 为相应于 $x$ 的数字）恒可表成 $(Ey)\,R(x, y)$ 形，而 $R$ 为原始递归的；即，给出一公式 $\mathrm{A}(\boldsymbol{a})$ 后，可找出一原始递归谓词 $R(x, y)$ 使得

$$(Ey)R(x, y) \equiv \vdash \mathrm{A}(\mathbf{x}).$$

(对 $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n)$ 仿此，参见 Dn13 a.)

**证明** 一公式是可证的当且仅当对它有一证明．设定理假设中的公式 $\mathrm{A}(\boldsymbol{a})$ 的哥德尔数为 $a$，则令

$$R(x, y) \equiv Pf(a, x, y)$$

便可.（对 $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n)$ 言令 $R(x_1, \cdots, x_n, y) \equiv Pf_{\mathrm{A}}(x_1, \cdots, x_n, y)$.)

**例 2** 设 $\mathfrak{S}(\mathrm{E}, \mathrm{t}, \mathrm{x}) \asymp$ {当 t 为一项，x 为一变元 E 为一项或一公式时把 E 中的 x 代以 t 的结果；否则便为 E}；并令 $\mathfrak{Nu}(x) \asymp$ {相应于自然数 $x$ 的数字 $\mathbf{x}$}． 这两个元数学函数 $\mathfrak{S}(\mathrm{E}, \mathrm{t}, \mathrm{x})$ 及 $\mathfrak{Nu}(x)$ 是可用递归式定义的，仿谓词 $\mathfrak{S}(\mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{t}, \mathrm{x})$ (Dn5) 及 $\mathfrak{Nu}(\mathbf{x}, x)$ (Dn11) 便可． 这时其相应数论函数 $S(e, t, x)$ ($=e$，当 $e$，$t$，$x$ 不全为哥德尔数时)及 $\mathfrak{Nu}(x)$ 便是原始递归的.

## *§ 53. 归纳定义与递归定义

'项'与'公式'的定义首先在 § 17 中作为归纳定义而给出. 归纳定义的其它例子为'自然数'的定义 (§ 6), 第一种说法的'可证公式'定义 (§ 19), '原始递归函数'定义 (§ 43) 及'实体'的定义 (§ 50). 本章的结果可根据归纳定义与递归定义之间的关系而探究之. 现在我们先一般地对归纳定义作一些注解.

归纳定义有两个不同的作用, 可叫做根本的或非根本的. 一个给定的归纳定义到底属于哪一种, 可因上下文或它所在的理论而有所不同.

对一般算术说, '实体'的定义是根本的归纳定义. 它建立了该算术的客体域. 当且仅当在'实体'定义中所说的产生方式给定以后我们才算该实体是给出了.

至于非根本的归纳定义,如'项','公式'及'可证公式', 则只是对已经知道它是实体的那些客体才施用. 这些定义都定义一个实体类,即实体类的子类. 我们可以在算术中询问,一个给定的实体是不是属于这子类;对这子类我们可以定出一个谓词,对属于该子类的实体言该谓词取值 t, 对不属于子类的实体言则取值 f. 我们可把非根本归纳定义看作这些谓词的定义.

因此根本归纳定义是确立一变元的变域, 以后我们便可以用非根本归纳定义来定义在该变域之上的谓词了(包括常谓词 t 作为特例).

用非根本归纳定义以定义一谓词其方式如下. 直接句子告诉我们,对某些客体言谓词取值 t. 限制句子告诉我们, 使它取得值 t 的那些客体便尽于此了,因此只要我们看得出直接句子并未要求它取值 t 时,我们便给以值 f.

一般地说,直接句子中有些是基本句子,率直地告诉我们,(或者在某些假设下, 而假设中只牵涉到已经定义的谓词,)对某些客体言它是取值 t 的,有些是归纳句子, 它告诉我们说, 如果对某些

客体它取值 t(可能是在某些假设之下，这些假设使用已经定义了的谓词)，那么对与这些有某种方式连系的客体言它亦取值 t.（如果缺少基本句子，那么对一切变目言这谓词取值 f. 如果缺少归纳句子，则这定义便简单地是显式穷举定义.）[1]

非根本归纳定义亦可用以定义多元谓词. 这样的意义有时便是一个依赖于参数的类的归纳定义(例如，§6 中“<”的定义)，一般说，都可以当作是对有序的 $n$ 元矢类的归纳定义.

不管根本或否，均可根据归纳定义而证明相应的‘数学归纳证法’. 相应于‘自然数’归纳定义的以及相应于‘实体’归纳定义的，上文已经指出过了（§7，§50). 再举一例，相应于‘可证公式’的归纳定义的，有归纳原则如下：如果每一公理均有某一性质，又在任一形式推论中只要前提有这性质则结论亦具有之，那么每个可证公式都具有这性质.（在 §28 定理 9 的证明中，可利用这个归纳原则而无须对证明的长度来作串值归纳. 这时，引理 12 a 及 12b 便是证明中的奠基及归纳步骤.）

同样地，根本归纳定义(再约定由不同方式产生的客体是不同的)便可用以辩解一函数的‘递归定义’，或‘归纳定义’，该函数以该根本归纳定义所建立的域为变域.（反之，就某一类的非根本归纳定义言，如果能够根据不同的直接句子而认出一客体是属于该类的，则用相应的递归过程而定义一函数时，对于该客体可能给出不同的函数值，例如，“$\varphi(A)=0$ 如果 A 为公理，$\varphi(A)=\varphi(B)+1$ 如果 A 为 B 的直接后承，$\varphi(A)=\varphi(B)+\varphi(C)+1$，如果 A 为 B 与 C 的直接后承”，便不能定义一个单值的、由可证公式到自然数的函数.）

谓词可由把递归地定义的函数作为它的代表函数而得出，但正如 §51 中那样，谓词经常直接由递归过程而引入.

在递归式(指第九章对简单算术所讨论的那些)中，一函数式谓词在某一给定的非 0 变目处的值都只由在给定变目以前的变目

1) 沙宁 (H. A. Шанин 1955) 详细研究了在随便一种字母表内各种不同的非根本归纳定义的类型——俄译注.

处的函数值(谓词值)而决定的，所谓在前是就根本归纳定义对该域的产生次序而说的，因此我们便可以由相应的归纳证明来证出对每个变目而言递归地定义的谓词都取值 t 或 f. 因而可以直觉主义地证明，对任何命题言，只要它是递归地定义的谓词的值，都可以使用排中律.

但一般说来，归纳地定义的谓词并不如此，因此即使用限制句子把凡属直接句子不给以值 t 的地方都给以值 f，这时我们往往没有一个能行的（有效的）方法决定对应于某一给定变目时该谓词的值.

就下列特例言却是可以的，即(设就某类的归纳定义言)当归纳句子对该类的元素的引入次序恰和根本归纳定义对该客体的产生次序一样时，这一种的归纳定义我们可以改作递归定义，正如我们对'项'和'公式'所做的那样（§ 51).

不具这性质的归纳定义可举第一说法的'可证公式'定义为例(§ 19). 在第二说法下，它所以不列入 § 51 的元数学的定义中，原因在于，使用了存在量词"有一证明 Y" 而对于变元 Y 却无法知其界限(与 Dn 8 句 11—12 或 Dn 13 句 1 不同). (参见 §30.)由这第二说法我们得到一个相应的数论谓词 $(Ey)\,[Pf(y)\&(y)_0=d]$ (参见 Dn 12)，它呈 $(Ey)R(d,y)$ 形而 $R$ 为原始递归的.

当用一种很自然的方式而给出归纳定义的形式（只用初等的直接句子）时，在自然数的算术中能够用归纳定义而定义的谓词 $P(x_1,\cdots,x_n)$ 便恰巧只是可表为下形的谓词，$(Ey)\,R(x_1,\cdots,x_n,y)$ 而 $R$ 为原始递归的. 其证明可由推广上面的方法而得，如克林 [1943]，第 66—67 页所暗示的；或用克林 [1944*] 第 48 页上所指出的别的方法.

# 第十一章　一般递归函数

## § 54. 原始递归函数的形式计算

§ 43 中所直觉地考虑的模式 (I)—(V)，每一个都是一运算，由零个或多个已知函数而定义一函数 $\varphi$. 实际上我们把这些模式用方程来叙述.

让我们回顾用方程以定义一函数 $\varphi$ 的方式，并试看，当用它们来决定 $\varphi$ 的特殊值时，能否分解成为一些形式运算.

**例 1**　设 $\chi$ 为一给定函数，有两个值为

1. $\chi(0, 4) = 7$.　　2. $\chi(1, 7) = 7$.

而 $\varphi$ 则由 $q = 4$ 时的模式 (Va) 而引入如下.

3. $\varphi(0) = 4$.　　4. $\varphi(y') = \chi(y, \varphi(y))$.

在 § 43 我们已经证明，对任何数 $y$ 言，$\varphi$ 的递归方程都决定 $\varphi$ 的相应值 $\varphi(y)$，只要 $\chi$ 的值是已经决定的便成. 在特例，现既已给出上述的 $\chi$ 的二值，由 §43 的推理我们便得 $\varphi(2) = 7$. 我们现在要问：根据什么样的形式推理可使我们由方程 1—4 推演出方程 "$\varphi(2) = 7$"?

在方程 4 中以 "0" 代 "$y$" 得

5. $\varphi(1) = \chi(0, \varphi(0))$.

根据方程 3 把方程 5 右端的 "$\varphi(0)$" 换以 "4" 得

6. $\varphi(1) = \chi(0, 4)$.

再实行四次这两种步骤便完成推演了.

7. $\varphi(1) = 7$——替换，6，1.

8. $\varphi(2) = \chi(1, \varphi(4))$——代入，4.

9. $\varphi(2) = \chi(1, 7)$——替换，8，7.

10. $\varphi(2) = 7$——替换，9，2.

因此只用代入运算及替换运算便足以由所给的方程1—4而推演出方程“$\varphi(2)=7$”，后者说，在变目2处$\varphi$的值为7. 更进一步，显然，继续使用这两种推理绝不可能由方程1—4而推到别的任何方程，其左端为“$\varphi(2)$”而右端为数字的.

**例2** 假设，更特殊地，$\chi$为常函数($C_7^2$)，由下方程而定义

$$-2. \qquad \chi(y,z)=7,$$

而$\varphi$之由$\chi$而定义仍和例1同.（$\varphi$便是原始递归的，以$\chi,\varphi$作为原始递归描述.）现在我们可用代入法由方程—2而推出方程1，2如下:

—1. $\chi(0,z)=7$——代入，—2.

0. $\chi(1,z)=7$——代入，—2.

1. $\chi(0,4)=7$——代入，—1.

2. $\chi(1,7)=7$——代入， 0.

把这两推演和例1中的推演合并，我们便得到由从头地[1]定义$\varphi$的三个方程——2，3，4而到“$\varphi(2)=7$”的推演.

在这两例子里，我们只是讨论形式方面的问题并没有预先明显地作出一个形式系统. 现在我们便建立一个适当的形式系统，并且使我们的讨论成为这系统的元数学的讨论因而得以严格起来.

这个新形式系统我们叫做递归函数的形式系统. 现在我们先用语言来描述它，以后(§56)再描述为一种一般算术.

这系统的形式符号是: =(等于)，′(后继者)，0(零)，$a$，$b$，$c$，$\cdots$，$a_1$，$a_2$，$\cdots$(自然数变元)，$f$，$g$，$h$，$\cdots$，$f_1$，$f_2$，$\cdots$(函数字母，即未明指的数论函数的符号)，(，)，(括号)，，(逗号). 我们假定给出(潜伏的)无穷多个变元及函数字母.

我们所以把$f$，$g$，$h$，$\cdots$，$f_1$，$f_2\cdots$叫做“函数字母”而不叫做“函数符号”，为的是与′有所区别. 这个名称是很适当的，因为它们的作用类似于纯谓词演算中的谓词字母，即在不同的时候它

1) 拉丁文为 ab initio. 这里指“不用开始函数”——俄译注.

们表示不同的函数，但并未假设有相应的代入规则[1]. 在一讨论中，如果 $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{h}$ 等表示固定的函数，并且和′，+，· 等受到同样对待，这时它们亦可叫做“函数符号”.

形式表达式 0, 0′ 0″, … 叫做数字. 如前（§ 41），它们将被缩写为“0”，“1”，“2”，…；我们继续使用下列的约定：“**x**”“**y**”等指定的数字是分别相应于“$x$”，“$y$”等所指定的自然数的.

项便是 0，变元，或者形为 r′ 的表达式而 r 为一项，或者形为 $\mathrm{f}(\mathrm{r}_1, \cdots, \mathrm{r}_n)$ 的表达式而 f 为函数字母，$\mathrm{r}_1, \cdots, \mathrm{r}_n$ 为项（$n \geqslant 0$，当 $n = 0$ 时把括号省去[2]）.

当 r，s 为项时形式表达式 r = s 叫做一方程. 这系统的所有“公式”都是方程. 方程系指方程的有限序列 $\mathrm{e}_0, \cdots, \mathrm{e}_l$（如无特别声明必为不空序列）.

没有公理；因而我们将只定义“可推演性”而不定义“可证性”.

推论规则只有具一前提的代入规则 R1 以及具两前提的替换规则 R2 如下.

R1: 由一个含变元 y 的方程 d 变到另一方程，把 d 中的 y 代以一数字 **y** 而得的.

R2: 由一个不含变元的方程 r = s（大前提）及方程 $\mathrm{h}(\mathbf{z}_1, \cdots, \mathbf{z}_p) = \mathbf{z}$，h 为函数字母而 $\mathbf{z}_1, \cdots, \mathbf{z}_p$，**z** 为数字（小前提）变到另一方程，由把 r = s 内右端 s 中某一个 $\mathrm{h}(\mathbf{z}_1, \cdots, \mathbf{z}_p)$ 的出现（或几个出现同时地）换以 **z** 而得的.

由方程系 E（或方程集，可能是无穷的）到方程 e（推演中的尾方程）的推演是指树枝形的推演（§ 24 末）；即它将具下列三形之一：

c　　而 c 为 E 中方程之一.

$\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{c}}$　　而W为由 E 而作的一个推演，c 为W中尾公式根据 R1 而得的直接后承.

---

1）如果假设有这规则便将被叫做“函数变元”了——译者注.

2）即只写“f”——译者注.

$\dfrac{\mathbf{WX}}{\mathrm{c}}$ 而W与X为由E而作的推演，c 为W及X中尾公式根据R2

而得的直接后承.

如果有一个由E到 e 的推演，则说 e 可由E推演出(符号表示为：E⊢e).

**例 2**(续) 试把方程 −2 到 10 翻译到新形式体系来(用形式函数字母 $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{h}$ 表直觉函数字母"$\varphi$""$x$"，用 $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 表直觉的数变元"$y$"，"$z$")，并把序列形改为树枝形，我们便得到下列的图式.

(a)

$$
\dfrac{
\dfrac{4_1.\ f(b')=h(b,f(b))}{8.\ f(2)=h(1,f(1))}
\quad
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{4_2.\ f(b')=h(b,f(h))}{5.\ f(1)=h(0,f(0))}\quad 3.\ f(0)=4}{6.\ f(1)=h(0,4)}
\quad
\dfrac{\dfrac{-2_1.\ h(b,c)=7}{-1.\ h(0,c)=7}}{1.\ h(0,4)=7}
}{7.\ f(1)=7}
}{9.\ f(2)=h(1,7)}
\quad
\dfrac{\dfrac{-2_2.\ h(b,c)=7}{0.\ h(1,c)=7}}{2.\ h(1,7)=7}
$$

$$10.\ f(2)=7$$

这便是由下方程系到方程 $\boldsymbol{f}(2)=7$ 的一个推演.

$$
\text{(b)}\qquad
\begin{cases}
h(b,\ c)=7, & \}\ (b_1)\\
f(0)=4, & \multirow{2}{*}{$\Big\}\ (b_2)$}\\
f(b')=h(b,\ f(b)). &
\end{cases}
$$

**例 1**(续) 试在(a)中把方程 $-2_1, -1, -2_2, 0$ (的出现)除去，叫它为($a_2$). 这便是由 $\boldsymbol{h}(0,\ 4)=7$，$\boldsymbol{h}(1,\ 7)=7$ 及($b_2$)到 $\boldsymbol{f}(2)=7$ 的推演.

**附注 1** 有人会问：为什么要搞翻译呢？其理由当然与下列做法一样，我们在第四章的数论形式体系内不用直觉数论的符号体系而选用不同的特殊符号体系. 这理由可重述如下. 在形式体系的语言概念之下，现在所以要由"$\varphi$"，"$x$"，"$y$"，"$z$"而译为 $\boldsymbol{f}$，$\boldsymbol{h}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是因为形式符号必须取自预给的固定的符号表，在元数学中它们仅仅是个标志. 为了可以依自名法(§50，§16)使用它而不致于混乱，它们大多数必须是一些特殊的字母. 如果把形式体

系看作广义算术，喜欢的话，可以把 $\boldsymbol{f}$ 认为是"$\varphi$"（即"$\boldsymbol{f}$"是"$\varphi$"的名）（但这时它便只是"$\varphi$"的名，而不能够有时又是"$\psi$"的名，等等）. 反之，在'项'的定义中，"f"却被用为 $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{h}$ 等中未明指的一个的名（如果我们把"$\boldsymbol{f}$"作为"$\varphi$"的名，"$\boldsymbol{g}$"作为"$\psi$"的名，"$\boldsymbol{h}$"作为"$\chi$"的名，那末"f"便是"$\varphi$"，"$\psi$"，"$\chi$"等中未明指的一个的名）. 翻译的好处便在于能够很清楚地谈论到与函数，数等等有所区别的符号，而无须重重复复地使用引号（按指""$\varphi$""等——译者）以及有关的技巧（如奎因［1940］的"角括号" Corners ——按指⌈$\varphi$⌉等——译者）.

今设一 $n$ 元函数 $\varphi$ 已经直觉地由 $l$ 个（$l \geq 0$）分别为 $m_1$, …, $m_l$ 元的函数 $\psi_1$, ···, $\psi_l$ 而定义. 要想讨论在形式体系内一个给定的方程系 E 是否从 $\psi_1$, ···, $\psi_l$ 而定义 $\varphi$，我们必须说明哪一些函数字母 f, $g_1$, ···, $g_l$ 是分别地表示 $\varphi$, $\psi_1$, ···, $\psi_l$ 的.

因此，应该作一些约定使得我们可以直接从 E 本身认出这些字母.为此我们的系 E 只限于其中最后一方程的开始(最左的)字母是字母 f；我们说这是 E 的主要函数字母，并用它来表示 $\varphi$. 在 E 中的方程的右端中出现而不在左端出现的不同函数字母我们叫做 E 的已给函数字母. 我们可把系 E 限于只具有 $l$ 个已给函数字母的；并依照预先指定的函数字母表的次序而用 $g_1$, ···, $g_l$ 来分别表示 $\psi_1$, ···$\psi_l$. 我们可把系 E 限于其中的 f, $g_1$, ···, $g_l$ 只用以作成分别具有 $n$, $m_1$, ···, $m_l$ 个变目的项的（对现在的目的言，亦可把同一函数字母但具有不同个数的变目的函数字母当作不同的函数字母，正和我们在 § 31 中对谓词字母的处理那样）；在 E 内的方程中出现的其它函数字母叫做 E 的辅助函数字母.

当 $l > 0$ 时，作为"假定方程"的不但有方程系 E，它是相应于从 $\psi_1$, ···, $\psi_l$ 而定义 $\varphi$ 的模式的，还需有给出函数 $\psi_1$, ···, $\psi_l$ 的值的方程式. 命"$E_{g_1 \cdots g_l}^{\psi_1 \cdots \psi_l}$"表示下列的方程组 $g_j(\mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_{m_j}) = \mathbf{y}$，这里对于 $j = 1$, ···, $l$ 及一切的自然数 $m_j$ 元矢 $y_1$, ···, $y_{m_j}$ 言都有 $\psi_j(y_1, \cdots, y_{m_j}) = y$（而 $\mathbf{y}_1$, ···, $\mathbf{y}_{m_j}$, $\mathbf{y}$ 为相应于数 $y_1$, ···, $y_{m_j}$, $y$ 的数字）. 当 $l > 0$（及 $m_1 + \cdots + m_l \neq 0$）时，这方程组

是无穷的[1]；当 $l=0$ 时(或 $m_1+\cdots+m_l=0$ 时——译者)则是空集.

我们把这些意念合并而得下列的元数学定义. 我们说方程系 E 递归地从 $\psi_1,\cdots,\psi_l$ 而定义 $\varphi$，如果对于每个自然数 $n$ 元矢 $x_1,\cdots,x_n$ 言，我们有：$E^{\psi_1\cdots\psi_l}_{g_1\cdots g_l}$, $E\vdash f(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n)=\mathbf{x}$ 当且仅当 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)\simeq x$，这里 f 是E的主要函数字母，$g_1,\cdots,g_l$ 为E的已给函数字母，依照它们在预先指定的函数字母表上的次序而写的，而 $\mathbf{x}$ 为数字.

换句话说，E 递归地从 $\psi_1,\cdots,\psi_l$ 而定义 $\varphi$ 是指：(f, $g_1,\cdots,g_l$ 如上所述)：我们之有 $E^{\psi_1\cdots\psi_l}_{g_1\cdots g_l}$, $E\vdash f(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n)=\mathbf{x}$，这里 $\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n$ 为数字，当(完备性)且仅当(相容性) $f(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n)=\mathbf{x}\varepsilon E^{\varphi}_{f}$.

**例 1 与例 2**(续) (b) 中的主要函数字母是 $f$; $h$ 是辅助函数字母；显然地 (b) 递归地定义了 $\varphi$(这里当 $y=0$ 时 $\varphi(y)=4$, $y>0$ 时 $\varphi(y)=7$). 方程系 ($b_1$) 递归地定义了 $\chi(=C^2_7)$；而 ($b_2$) 递归地从 $\chi$ 而定义 $\varphi$，而 $h$ 为已给函数字母.

**定理 II** 如果 $\varphi$ 原始递归于 $\psi_1,\cdots,\psi_l$，则有一个方程系 E 它递归地从 $\psi_1,\cdots,\psi_l$ 而定义 $\varphi$.

显然地，如果把从 $\psi_1,\cdots,\psi_l$ 到 $\varphi$ 的任何原始递归导引 $\varphi_1,\cdots,\varphi_k$ 中的模式应用翻译到形式体系来，只要我们适当地选择函数字母而且预先安排好(如果必要的话)使得每个 $\psi_i$ 都在某些模式应用中被用到(根据我们的约定，函数字母 $g_1,\cdots,g_l$ 分别表示 $\psi_1,\cdots,\psi_l$，须全都出现于E中)，这时我们便得到这个方程系E了. 但是我们却想详细地给出元数学的分析，共得五条引理，作为今后对类似问题作简单处理时的根据.

所谓一推演的主支是指下列的一支，当从尾方程逆溯时，含有使用 R2 时的大前提的. 在主支的顶点处的方程叫做主要方程. 小前提(沿主支而应用 R2 时的小前提)的推演(这是所给的推演的一

---

1) (俄)译者不明白，这样考虑如何和作者的有穷性方法相协调——译者注.

部分)叫做贡献推演.

**例 2**(续) (a)的主支，从上而下是：方程 $4_1$，8，9，10．主要方程是 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}')=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}))$. 两个贡献推演是以方程 7 及 2 为尾的树枝.

在一个形为 $\mathrm{f}(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n)=\mathbf{x}$ 的方程的推演中，这里 f 是函数字母,而 $\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n$, $\mathbf{x}$ 为数字，它的主支,从上而下,将包括有零次或多次的 R1 的应用，然后跟着零次或多次的 R 2 的应用. R 1 的应用是把主要方程的变元分别地代以数字，直到左端变为 $\mathrm{f}(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n)$ 为止. R2 的应用是把右端中的形为 $\mathrm{h}(\mathbf{z}_1,\cdots,\mathbf{z}_n)$ 的部分(原有的或在替换时新出现的) 替换以相当的数字 $\mathbf{z}$, 直到右端变为 $\mathbf{x}$ 为止.

恒等模式是指下模式

$$\varphi(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n)=\psi(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n).$$

**引理 IIa** 如果根据模式(I)—(V)之一或根据恒等模式言，$\varphi$ 是直接依赖于 $\psi_1,\cdots,\psi_l$ 的，则把模式应用时的非形式方程翻译到形式体系后(用任何适当选择的函数字母)，所得的方程系 E 便递归地从 $\psi_1,\cdots,\psi_l$ 而定义 $\varphi$.

**引理 II a 的证明** 当我们认出在定义该函数时使用什么样的模式,我们便仿该非形式推理而作证明.

模式(Vb). 方程系 E 呈下形，$\mathrm{f}(0,\mathrm{x}_2,\cdots\mathrm{x}_n)=\mathrm{g}(\mathrm{x}_2,\cdots,\mathrm{x}_n)$, $\mathrm{f}(\mathrm{y}',\mathrm{x}_2,\cdots,\mathrm{x}_n)=\mathrm{h}(\mathrm{y},\mathrm{f}(\mathrm{y},\mathrm{x}_2,\cdots,\mathrm{x}_n),\mathrm{x}_2,\cdots,\mathrm{x}_n)$. 任选 $n-1$ 个数 $x_2,\cdots,x_n$. 我们对 $x_1$ 作归纳. 奠基. $x_1=0$, 则 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)=\psi(x_2,\cdots,x_n)$. 当 $x=\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 时，若把 E 的第一个方程作为主要方程，并用 $\mathrm{E}_{\mathrm{gh}}^{\psi\chi}$ 中的方程 $\mathrm{g}(\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_n)=\mathbf{x}$ 作为 R2 的小前提，可知有 $\mathrm{E}_{\mathrm{gh}}^{\psi\chi},\mathrm{E}\vdash\mathrm{f}(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n)=\mathbf{x}$. 其次，若要对随便一个数字 $\mathbf{x}$ 而推演出 $\mathrm{f}(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n)=\mathbf{x}$, 我们必须用同样的主要方程,以及用 R1 来作同样的数字代入(除却次序可能不同外),因为在 $\mathrm{E}_{\mathrm{gh}}^{\psi\chi}$, E 中找不出别的方程，也作不出别的代入足以使我们得出一个以 $\mathrm{f}(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n)$(当 $x_1=0$ 时)为左端的方程的. 既然如此，此后根据 R2 所作的替换便是唯一决定的.

故只当 $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)$ 时才有 $E_{gh}^{\psi x}$, E$\vdash$f $(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{x}$. 归纳推步：$x_1 = y'$，仿此.

**引理 IIb** 设D为一组方程(有穷或无穷)，F为一方程系，它的方程的左端不含有在D(的方程)中所出现的函数字母，设g为在D中出现的函数字母. 如果D, F$\vdash$g $(\mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_m) = \mathbf{y}$，这里 $\mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_m, \mathbf{y}$ 为数字，则必 D$\vdash$g$(\mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_m) = \mathbf{y}$.

**引理 IIb 的证明** 试研究由D, F到具有所说形状的方程 g$(\mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_m) = \mathbf{y}$ 的任一推演. 我们就该推演的高度 $t$ 而作串值归纳，从而证明只有D中的方程才作为它的假定方程(即出现于各支的顶端的). 主要方程必是D的方程之一，因为它的第一个符号是g，这只出现于D中而不出现于F的任何方程的左端中. 每个贡献推演的高度都 $<t$，且以 h$(\mathbf{z}_1, \cdots, \mathbf{z}_p) = \mathbf{z}$ 为尾，而h是一个出现于主要方程的右端中因而为出现于D中的函数字母. 因此根据归纳假设，该贡献推演只用D中的方程作为假定方程.

**引理 IIc** 设D与F如引理 IIb 中那样. 设G为一组具有下列形状的能由D推演出的方程 g$(\mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_m) = \mathbf{y}$，这里g为同时出现于D与F中的函数字母而 $\mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_m, \mathbf{y}$ 为数字. 设f为不出现于D中的函数字母. 如果D, F$\vdash$f$(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_m) = \mathbf{x}$, $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_m, \mathbf{x}$ 为数字，则有 G, F$\vdash$f$(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_m) = \mathbf{x}$.

**引理 IIc 的证明** 就所给的由D, F到 f$(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_m) = \mathbf{x}$ 的推演的高度 $t$ 而作串值归纳. 主要方程是F中方程之一，因它的第一个符号是f而这不出现于D的任何方程之中. 沿主支上的任何一个小前提都具下形 h$(\mathbf{z}_1, \cdots, \mathbf{z}_p) = \mathbf{z}$，这里h出现于主要方程的右端中因而出现于F中. 分两情况. 如果h出现于D中，则由引理 IIb 知，h$(\mathbf{z}_1, \cdots, \mathbf{z}_p) = \mathbf{z}$ 是形为 g$(\mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_m) = \mathbf{y}$ 的方程而可由D推演出，即 h$(\mathbf{z}_1, \cdots, \mathbf{z}_p) = \mathbf{z} \varepsilon$G. 如果h不出现于D中，则由关于 $t$ 的归纳假设得，h$(\mathbf{z}_1, \cdots, \mathbf{z}_p) = \mathbf{z}$ 可由G, F推演出.

**引理 IId** (1) 设 $f_1, \cdots, f_k$ 为不同的函数字母，依所给的函数字母表中出现的次序而排列. (2) 设 $\varphi_1 = \psi_1, \cdots, \varphi_l = \psi_l$.

(3) 对 $i = l+1, \cdots, k(k \geqslant l)$ 言，设 $E_i$ 递归地从 $\varphi_{i_{i_1}}, \cdots, \varphi_{i_{i_{q_i}}}$ $(q_i \geqslant 0, j_{i_1}, \cdots, j_{i_{q_i}} < i)$ 而定义 $\varphi_i$，而以 $f_i$ 作为主要函数字母，以 $f_{i_{i_1}}, \cdots, f_{i_{q_i}}$ 作为已给函数字母. (4) $E_i$ 中的辅助函数字母(如果有的话) 都与 $E_j, j \neq i$, 的辅助函数字母以及与 $f_1, \cdots, f_k$ 不同. 那么对 $i = 1, \cdots, k$ 言，当且仅当 $f_i(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_{u_i}) = \mathbf{x}\varepsilon E_{f_i}^{\varphi_i}$ 时我们有: $E_{f_1 \cdots f_l}^{\psi_1 \cdots \psi_l}$, $E_{l+1} \cdots E_k$[1] $\vdash f_i(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_{n_i}) = \mathbf{x}$, 这里 $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_{n_i}, \mathbf{x}$ 为数字.

**例 2** (续完) 令 $k = 2$; $l = 0$; $\varphi_1, \varphi_2$ 为原始递归描述 $x$, $\varphi$; 而 $E_1, E_2$ 为 $(b_1), (b_2)$ 而把 $\boldsymbol{f}$ 与 $\boldsymbol{h}$ 互换.

**例 3** 设 $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ (故 $k = 9, l = 3$) 为 § 44, § 45 例 1 中的原始递归导引 $\zeta, \eta, \theta, U_1^3, \theta_1, U_3^3, \phi, C_2^3, \varphi$ 而 $E_i(i = 4, \cdots, 9)$ 为方程 $(c_i)$:

$$
(c)\begin{cases}
\boldsymbol{f}_4(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}, & (c_4) \\
\boldsymbol{f}_5(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{f}_3(\boldsymbol{f}_4(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b})), & (c_5) \\
\boldsymbol{f}_6(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}, & (c_6) \\
\boldsymbol{f}_7(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{f}_6(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}), \boldsymbol{f}_5(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b})), & (c_7) \\
\boldsymbol{f}_8(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) = 2, & (c_8) \\
\boldsymbol{f}_9(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{f}_4(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}), \boldsymbol{f}_7(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}), \boldsymbol{f}_8(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b})). & (c_9)
\end{cases}
$$

**引理 II d 的证明** 容易看见，由$\vdash$的一般性质可得，如果 $f_i(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_{u_i}) = \mathbf{x}\varepsilon E_{f_i}^{\varphi_i}$ 便有 $E_{f_1 \cdots f_l}^{\psi_1 \cdots \psi_l}$, $E_{l+1} \cdots E_k \vdash f_i(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_{n_i}) = \mathbf{x}$. 其逆理可就 $k$ 归纳而证得. 奠基: $k = l$. 这时 $E_{l+1} \cdots E_k$ 是空的. 由 $E_{f_1 \cdots f_l}^{\psi_1 \cdots \psi_l}$ 的结构(注意，它不含有 R1 的前提，亦不含有 R2 的大前提) 可得到结论. 归纳推步: $k > l$. 由归纳假设，只有 $\varepsilon_{f_i}^{\varphi_i}$ 且形如 $f_i(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_{n_i}) = \mathbf{x}(i < k)$ 的方程才能从 $E_{f_1 \cdots f_l}^{\psi_1 \cdots \psi_l}$, $E_{l+1} \cdots E_{k-1}$ 推演出. 由 $i = k$ 时的假设 (3) (并把 "$\varphi_k$"写为"$\varphi$", "$\varphi_{i_{k_s}}$"写为"$\varphi_{i_s}$", "$f_k$"写为"f"等)，只有 $\varepsilon E_f^{\varphi}$ 且形如 $f(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{x}$ 的方程才能从 $E_{f_{j_1} \cdots f_{j_q}}^{\varphi_{j_1} \cdots \varphi_{j_q}}$, $E_k$ 推演出; 由引理 IIc，当在假定方程表

1) 从这里起，原文把 "$E_{l+1}, \cdots E_k$" 省写为 "$E_{l+1} \cdots E_k$" (省去逗号) 而未作任何声明，读者须注意——译者注.

中把 $E^{\varphi_{j_1}\cdots\varphi_{j_q}}_{f_{j_1}\cdots f_{j_q}}$ 换为

$$E^{\psi_1\cdots\psi_l}_{f_1\cdots f_l}, E_{l+1}\cdots E_{k-1}$$

时再也没有其它方程可推演出.

**引理 IIe.** 设 $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ 为有限函数序列使得 $\varphi_k$ 为 $\varphi$，并且对于每个 $i$ ($i=1, \cdots, k$)，或者 (A)$\varphi_i$ 是函数 $\psi_1, \cdots, \psi_l$ 之一，或者 (B) $\varphi_i$ 被一方程系 $E_i$ 从 $\varphi_{j_{i_1}}, \cdots, \varphi_{j_{i_{q_i}}}$($q_i \geqslant 0, j_{i_1}, \cdots, j_{i_{q_i}} < i$) 而递归地定义.则有一方程系 E 递归地从 $\psi_1, \cdots, \psi_l$而定义 $\varphi$.

**引理 IIe 的证明** 只要引用恒等模式(参见引理 IIa)及增大$k$，我们恒可使成下列情况: 每个 $\psi$ 都根据 (A) 作为一个 $\varphi$ 而被引入，再根据 (B) 作为 $\varphi_{j_{i_1}}, \cdots, \varphi_{j_{i_{q_i}}}$ 之一而被应用于定义 $\varphi_i$. 然后把各 $\varphi$ 及各 $E_i$ 重新排序及重新编号，并把 $E_i$ 中的函数字母改变(如果必要的话)，这样便可以达到引理 II d 所描述的情况而 $k > l$, $\varphi_k = \varphi$ 并且 $f_1, \cdots, f_k$ 就是 $E_{l+1}\cdots E_k$ 的已给函数字母. 取 $E_{k+1}\cdots E_k$ 为E 便成.

**定理 II 的证明** 由引理 IIa 及定理的假设，可知引理 IIe 的假设是满足的.

## §55. 一般递归函数

要从头[1]或从别的数论函数而用方程系来定义一数论函数，并且在方程中只使用函数字母，′，数目变元及数字，其可能使用的模式绝不限于模式 (I)—(V) 五者.

我们试考虑别的模式，并把它们都叫做"递归式". 在目前，我们暂把方程表以非形式的语言；为了把它们限于上述的种类，我们还删除一些在第九章内所使用的别种样式的表达式，如 $\prod_{y<z}$ (#13)，$\mu y_{y<z}$ (#E) 及穷举 (#F).

1) 拉丁文为 ab initio，这里指"不用开始函数"——俄译注.

因此，§46 的例 1 现在便写成

$$(a)\qquad \begin{cases}\pi(0,\ y)=1,\\ \pi(z',\ y)=(y+\varphi(z))\cdot\pi(z,\ y),\\ \varphi(y)=\pi(y,\ y).\end{cases}$$

（它同时定义 $\varphi$ 及辅助函数 $\pi$），而 §46 例 2 则已经是现在所考虑的形状了．在 § 46 中我们证明了，这种串值递归式可以化归为原始递归式，即同一函数亦可由一系列地应用模式 (I)--(V) 而得．

另一个非常简单的例子是下列递归式

$$(b)\qquad \begin{cases}\varphi(0,z)=z,\\ \varphi(y',z)=\varphi(y,\sigma(y,z)).\end{cases}$$

这不是原始递归式，因为在定义式的递归步骤中，$z$ 并不是作为固定的参数而是要求代入以 $\sigma(y,z)$ 的．但这递归式亦可以化归到原始递归式去．试对 $y=0,1,2,\cdots$ 而展开 (b)（正如在 § 43 中展开 (1) 那样)，我们可知值 $\varphi(y,z)$ 是

$$\sigma(0,\sigma(1,\sigma(2,\cdots\sigma(y-3,\sigma(y-2,\sigma(y-1,\\ z)))\cdots))).$$

试考虑数列 $z,\sigma(y-1,z),\sigma(y-2,\sigma(y-1,z)),\cdots,\sigma(0,\sigma(1,\sigma(2,\cdots\sigma(y-3,\sigma(y-2,\sigma(y-1,z)))\cdots)))$，这是在构成该函数值时依次从内到外而出现的．试用下列原始递归式而定义一函数 $\mu(u,y,z)$

$$(b_1)\qquad \begin{cases}\mu(0,y,z)=z\\ \mu(u',y,z)=\sigma(y\dot{-}u',\mu(u,y,z)).\end{cases}$$

则 $u=0,1,2,\cdots,y$ 时该函数的值恰分别和上面那列数的值相同．因为 $u=y$ 时 $\mu$ 的值恰和值 $\varphi(y,z)$ 一样，故得

$$(b_2)\qquad \varphi(y,z)=\mu(y,y,z);$$

并且若对 $u$ 作归纳可证

$$(c)\qquad \mu(u',\ y',\ z)=\mu(u,\ y,\ \sigma(y,\ z)),$$

故知由 $(b_1)$ 及 $(b_2)$ 所定义的 $\varphi$ 是满足 (b) 的．

用同样方法，培特[1934]，[1935 a]（及 [1951]§5——译者)证明了，每一个如下的递归式(叫做“有套的” nested)，即 $\varphi(0,z)$ 是

一个给定的 $z$ 的函数，而 $\varphi(y', z)$ 则显式地表以 $y, z$，已给函数(及常数)及作为 $t$ 的函数的 $\varphi(y, t)$ 四者，那么它都可以归到原始递归式.

有没有一些递归式它们是不能化归到原始递归式的呢？在特例，能不能有些递归式它们可以定义一些非原始递归函数呢？

这个问题是由希尔柏特 [1926] 关于连续统问题的猜测而引起的，并由阿克曼 (Ackermann) [1928] 而加以解决. 设 $\xi_0(b, a) = a + b$，$\xi_1(b, a) = a \cdot b$，$\xi_2(b, a) = a^b$；并将这系列的函数继续地由下形的原始递归式而伸展着：$\xi_{n'}(0, a) = a$，$\xi_{n'}(b', a) = \xi_n(\xi_{n'}(b, a), a)(n \geqslant 2)$，因此例如 $\xi_3(b, a) = a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}$ (共有 $b$ 层指数). 今把 $\xi_n(a, b)$ 作为三元函数 $\xi(n, b, a)$. 设 $\alpha$ 为用下法所定义的原始递归函数

(d)
$$\alpha(n, a) = \begin{cases} 0 & \text{当 } n = 0 \text{ 时} \\ 1 & \text{当 } n = 1 \text{ 时} \\ a & \text{其他情形时} \end{cases}$$

则下列递归式便定义了 $\xi(n, b, a)$，

(e)
$$\begin{cases} \xi(0, b, a) = a + b \\ \xi(n', 0, a) = \alpha(n, a) \\ \xi(n', b', a) = \xi(n, \xi(n', b, a), a) \end{cases}$$

这是“二重递归式”的例子，即同时对两个变元而递归. 如果由 (e) 所定义的函数 $\xi(n, b, a)$ 是原始递归的，那么由它而显式地定义出来的一元函数 $\xi(a)$

(f)
$$\xi(a) = \xi(a, a, a)$$

亦将是原始递归的. 阿克曼的研究指出了，当 $a$ 增大时 $\xi(a)$ 的增加比 $a$ 的任何原始递归函数更快(正如 $2^a$ 快过 $a$ 的任何多项式)，即，给出任何原始递归函数 $\varphi(a)$，都可找出一个自然数 $c$，使得 $a \geqslant c$ 后有 $\xi(a) > \varphi(a)$. 因此可知 $\xi(a)$ 乃至 $\xi(n, b, a)$ (因由显式 (f) 由它可得 $\xi(a)$) 非原始递归的. 这个例子后来由培特 Péter [1935] (参见希尔柏特-柏尔奈斯 [1934]，第 330 页) 及 R.

罗宾孙 [1948] 加以简化.

培特 [1935] 用另一方法而作出另一例子. 由模式 (I)—(III) 所能定义的开始函数集是可数的. 再应用模式 (IV) 或 (V) 一次而定义的原始递归函数集亦是可数的，因为，由可数集而作成的 m + 1 元矢 $\psi, \chi_1, \cdots, \chi_m$(IV) 及作成的对偶 $\psi, \chi$ (或 $q, \chi$)(V) 亦是可数的 (见 § 1). 再一次使用模式 (IV) 或 (V)，所定义的原始递归函数集亦是可数的；等等. 因此，一切原始递归函数集是可数的(这亦可由枚举 §54 定理 II 中的方程系 E 而证出). 在特例，一元原始递归函数集是可数的. 因此由康托对角方法 (§2)，它们不能够包括所有一元数论函数；如果

$$\varphi_0(a), \varphi_1(a), \varphi_2(a), \cdots$$

是对它们的任何一种容许重复的枚举 (即把它们排成任何一个无穷序列，每函数至少出现一次)，那么 $\varphi_a(a)+1$ 便是一个不在上枚举之内的一元数论函数，因而它不是原始递归的. 而枚举函数 $\varphi(n, a)$，即 $\varphi(n, a)=\varphi_n(a)$，便是一个非原始递归的二元函数，因 $\varphi_a(a)+1=\varphi(a, a)+1$. 当然，这只是证明了可找出非原始递归的数论函数 $\varphi_a(a)+1$ 及 $\varphi(n, a)$. 培特所证明的则是，如果对原始递归函数作一个适当的枚举 (容许重复)，则该枚举函数可由二重递归式而定义(除应用模式 (I)—(V) 外).

**例 1** 由二重递归式能否得出非原始递归谓词? 是的，因 $1 \dot{-} \varphi(a, a)$ 只以 0 为 1 为值而不能出现于上述枚举中，因此它是一个非原始递归谓词的代表函数. (斯科林 [1944])

培特 [1936] 对任何 $k$ 而研究 $k$ 重递归式. 当 $k=1$ 时，它即原始递归式，$k=2$ 时为二重递归式，等等. 她证明了，$k$ 的每次增大都给出一些新函数. 用 $k$ 重以下的递归式(以及显式)而定义的函数叫做“$k$ 递归函数”. 她证明了，每个 2 递归函数都可用一个下形的二重递归式而定义(除应用模式 (I)—(V) 以外)

$$(g) \begin{cases}\varphi(0, b)=\varphi(n, 0)=1, \\ \varphi(n', b')=\alpha(n, b, \varphi(n, \beta(n, b, \varphi(n', b))), \varphi(n', b));\end{cases}$$

对每个 $k \geq 2$ 亦有类似模式(当 $k=2$ 时该模式化归为 (g)).

**例 2** 要解决 § 45 中提出的问题，设 $\varphi$ 为 3 递归而非 2 递归，$\psi$ 为 2 递归而非 1 递归即非原始递归．那末，“如果 $\psi$ 是原始递归则 $\varphi$ 是原始递归”是空虚地成立的，但“$\varphi$ 原始递归于 $\psi$” 是假的，否则 $\varphi$ 将是 2 递归了．

这些问题在培特 [1951] 书中有所讨论(在本书写作时该书尚未得见)．

不要以为有了 $k$ 重递归式 ($k$ 有穷)便穷尽了用递归式而定义新函数的可能性．在 1950 年培特应用“超穷递归式”(首先为阿克曼 [1940] 所应用)来定义新函数．

这便引起一个新问题，我们能否用一个精确的方式来刻划“递归式”的概念以及刻划一切“递归函数”集？

上面关于一函数的定义的模式而我们赞同叫做“递归式”的，如 (I)—(V)，(a)，(b)，(e) (及其它)等，具有两个特点：(i) 它们是用方程表示的，表示方式正如我们在 § 54 所形式地分析的那样(特别对 (I)—(V) 如此)． (ii) 它们多多少少是用数学归纳法而定义的，除却极简单的是用显式而定义以外．

对一切“递归函数” 的刻划由哥德尔 [1934] 的“一般递归函数”的定义而完成，他建立在厄尔勃朗(Herbrand)的一个暗示上．这定义是作一个大胆的推广，即只根据上面的第一个特点而作定义．

因此，我们说，$\varphi$ 是一般递归的，如果有一个方程系 E 递归地定义它 (§ 54，$l=0$)．

这个选择好象出于意外，因为‘递归的’这个字根源于动词 recur (按即召回，唤回，回跑诸义——译者)，而我们处理 recurrent (循环，再现，递归)过程的方法便是数学归纳法．这个选择的意思并不是说在某一个特殊的递归式中将会缺少特点(ii)，不过这特点不在定义中出现而在对定义的应用中出现罢了． 要用有穷性方法来证明两个模式具有特点 (i)，除却一些平凡的情形外，我们都必须多多少少使用数学归纳法．不过在定义一般递归函数的总体时，我们却不企图预先刻划什么样子的直觉归纳原则必须体现于其中．(根据 §42 哥德尔定理，我们知道，要想在形式数论系

统内作这样的刻划是不可能完备的.)

在精确地叙述厄尔勃朗-哥德尔的关于一般递归函数的定义时,在形式化的细节方面却容许一些自由,因此可以对定义给出另外一些说法,与哥德尔的说法等价但却简单一些(参见克林[1936]及[1943], §8). 这里所用的说法是克林[1943]的,但却对R1及R2作了一些无关大体的更改以使§56可以简化一些,并把0元函数亦包括入处理之内. (关于现在的说法与克林[1943]说法的关系,我们可指出: (1) 把零元函数加入一事,对于$n>0$元函数的一般递归性并没有影响. 因为可以证明,如果有一个辅助函数字母h作为具零变目的一项而出现于假定方程中,则该项的一切出现均可换为k(c), k为一个新函数字母而c为一新变元,而不致于影响只含主要函数字母的那些可推演方程的集.以后,(2) 我们可以简单地证明,无论应用这里的R1及R2,或应用[1943]的R1及R2,都可以由同一的给定的假定方程而推演出完全同样的具有下形的方程$f(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)=\mathbf{x}$,这里f为函数字母,而$\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n$, $\mathbf{x}$为数字;或者只要略为增加一些麻烦,亦可根据[1943]的R1及R2而把§54及§56的处理作出来.)

如果有一方程系E递归地由$\psi_1, \cdots, \psi_l$而定义$\varphi$(§54),则说函数$\varphi$是一般递归于函数$\psi_1, \cdots, \psi_l$的[1]. 这包括一般递归函数的定义作为$l=0$的特例. 当$l>0$时(克林 Kleene [1943]),我们常常讨论一泛函$\varphi=\mathbf{F}(\psi_1, \cdots, \psi_l)$(§47),它从任何$l$个分别为$m_1, \cdots, m_l$元的数论函数或受到某些限制的$l$个这样的函数而定义一数论函数$\varphi$. 当$n, l, m_1, \cdots, m_l$固定时,如果E可以与$\psi_1, \cdots, \psi_l$无关地给出,我们说泛函$\mathbf{F}$是一般递归的,亦说$\varphi$是一致地一般递归于$\psi_1, \cdots, \psi_l$的[2]. 因为在我们的处理中,经常对诸$\psi$(有限制与否)具有一致性,所以除了为强调以外,"一致地"三字经常省去. (如果原来的模式只对于有限制的$\psi_1, \cdots,$

1) 如果根据著者所宣扬的有穷性观点,那么"数论函数"和"一般递归函数"是等同的(参见第246页脚注),因而下列的断语真确:"不管数论函数$\varphi, \psi_1, \cdots, \psi_l$为何,函数$\varphi$是一般递归于$\psi_1, \cdots, \psi_l$的". 这未必被著者所赞同——俄译注.

2) 参见第255页的脚注——俄译注.

$\psi_l$ 而适用的，并不能因而便说该模式可以推广成为一个一般递归式，使对于无限制的 $\psi_1, \cdots, \psi_l$ 也能够定义一函数 $\varphi$，这与 § 47 原始递归性的情形不同.)

若用现在的用语把引理 IIa 与 IIe 的结果重述，便得

**定理 II**（第二说法） 如果依次使用一般递归定义模式能由 $\psi_1, \cdots, \psi_l$ 而定义 $\varphi$，则 $\varphi$ 一般递归于 $\psi_1, \cdots, \psi_l$.

在特例，模式 (I)—(V) 是一般递归的. 故如果 $\varphi$ 是原始递归于 $\psi_1, \cdots, \psi_l$ 的，则它一般递归于 $\psi_1, \cdots, \psi_l$. 任何原始递归泛函是一般递归泛函. 如果 $\varphi$ 是原始递归它是一般递归.

上面的一般递归性定义是对已知的函数 $\varphi$ 而叙述的，函数 $\varphi$ 或由方程(形式化后便是 E) 的直觉意义而知之，或由其它方法而知之. 这是因为我们目的在于对好些预先知道的，与递归函数形式体系无关的、各种函数或泛函而证明其一般递归性之故(正如我们对原始递归函数及泛函所作的那样). 对不预先知道的 $\varphi$ 而言，我们有：E 递归地由 $\psi_1, \cdots, \psi_l$ 而定义一函数，如果对于每个自然数 $n$ 元矢 $x_1, \cdots, x_n$，都恰巧有一个数字 $\mathbf{x}$ 使得 $E_{g_1 \cdots g_l}^{\psi_1 \cdots \psi_l}, E \vdash f(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{x}$，这里 f 为 E 的主要函数字母，$g_1, \cdots, g_l$ 为 E 的已给函数字母，按它们在给定的函数字母表中的次序而排列. 这时，被 E 所递归地定义的函数 $\varphi$ 便是下函数：以自然数 $x_1, \cdots, x_n$ 作变目时其值 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 恰为数字 $\mathbf{x}$ 所对应的自然数 $x$.

正如原始递归性那样 (§ 45, § 47)，函数的一般递归性的概念亦可推广于谓词或混合情形 (按指杂有谓词及函数的——译者)，只要对谓词使用代表函数便可推广了.

## § 56. 递归函数形式体系的算术化

我们今把递归函数的形式体系作为 §50 中所描述的一般算术而处理. 在下面我们列出这个一般算术的定义，如 § 51 那样. 同时我们还指出如何借助于哥德尔编号而变成简单算术，如 § 52 那样.

这个一般算术有六个零，其哥德尔数分别如下。

| 零: | = | ′ | 0 | $\boldsymbol{a}$ | $_1$ | $\boldsymbol{f}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 相应的哥德尔数: | 15 | 21 | 23 | 25 | 27 | 29 |

我们将容许对于任何多个实体都可造成其后继者，即一切自然数均可作为 $s$ 的值.

作为我们的函数字母表 $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}, \cdots$ 我们改用实体 $\boldsymbol{f}, ({}_1, \boldsymbol{f}), (1,({}_1,\boldsymbol{f})), \cdots$(有时写为 $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_{11}, \cdots$),它们由零实体 $\boldsymbol{f}$ 而作成的方法正如(数值)变元由零实体 $\boldsymbol{a}$ 而作成那样。

我们把具下形的项 $\mathrm{f}(\mathrm{r}_1\cdots, \mathrm{r}_n)$ 表成实体 $(\mathrm{f}, \mathrm{r}_1, \cdots, \mathrm{r}_n)$，这里 f 为函数字母而 $\mathrm{r}_1, \cdots, \mathrm{r}_n$ 为项($n \geqslant 0$). 因此在特例，当 $n = 0$ 时项 $\mathrm{f}(\mathrm{r}_1, \cdots, \mathrm{r}_n)$ 的写法通常在文字上(linguistically)虽和函数字母 f 的写法同,亦不把它们当作同一的实体;在一般算术中,如果后者是 f, 则前者是(f).(当 $n = 0$ 时在文字上把 $\mathrm{f}(\mathrm{r}_1,\cdots, \mathrm{r}_n)$ 省去括号而写为“f”的办法如果看作是一种缩写，那么对于文字上的每个有意义的客体仍只有唯一的实体相对应.)例如，方程式 $\boldsymbol{f} = 0$ 便是实体 $(=,(\mathrm{f}), 0)$.

方程系 $\mathrm{e}_0, \cdots, \mathrm{e}_s$ 将以实体 $(\mathrm{e}_0, \cdots, \mathrm{e}_s)$ 表示之.

在依据哥德尔编号而由一般算术转到自然数算术的过程中，用到可变多个即 $s + 1$ 个前驱的那些句子可借助于 #E 及 # 20 (§45) 而处理. 对这些句子(以及别的一些定义)我们附列相应的数论句子(或定义).

**把递归函数论形式体系作为一般算术时元数学谓词与函数的定义**

Df1. y 是一数字. (缩写为 $\mathfrak{N}(\mathrm{y})$.) 同 §51 Dn 1.

Df2. y 是一变元. (缩写为 $\mathfrak{B}(\mathrm{y})$.) 同 §51 Dn 2.

Df3. y 是一函数字母. (缩写为 $\mathfrak{FL}(\mathrm{y})$.) 仿 Df2.

Df4. y 是一项. (缩写为 $\mathfrak{Tm}(\mathrm{y})$.)

1. $\mathrm{y} \asymp 0$.
2. y 为一变元.
3. $\mathrm{y} \asymp \mathrm{r}'$ (即 $\mathrm{y} \asymp (', \mathrm{r})$), 而 r 为一项.

4. $y \asymp f(r_1, \cdots, r_n)$（即 $y \asymp (f, r_1, \cdots, r_n)$，参见 § 50），而 f 为一函数字母，$r_1, \cdots, r_n$ 为项（$n \geqslant 0$）。

$Fl((y_0))\&(i)_{0<i<\mathrm{lh}(y)}Tm((y)_i)$.

Df5. z 是一方程.（缩写为 $\mathfrak{Eq}(z)$.）

1. $z \asymp r = s$，而 r 与 s 为项.

Df6. Z 是一方程系.（缩写为 $\mathfrak{SE}(Z)$.）

1. $Z \asymp (z_0, \cdots, z_s)$，而 $z_0, \cdots, z_s$ 为方程.

$\mathrm{lh}(z) > 0\&(i)_{i<\mathrm{lh}(z)}Eq((z)_i)$.

Df7. （t 为一项，x 为一变元，e 为一项或一方程）把 t 代入 e 中的 x 处后得 d.（缩写为：$\mathfrak{Sb}(d, e, t, x)$.）

1. t 为一项，x 为一变元，$e \asymp x$ 而 $d \asymp t$.

2—3. t 为一项，x 为一变元，e 为 0 或一变元但 $\not\asymp x$，而 $d \asymp e$.

4. t 为一项，x 为一变元，e 为具 $(e_0, e_1, \cdots, e_n)$ 形的一项或一方程，而 d 为 $(d_0, d_1, \cdots, d_m)$，这里 $m = n$，$e_0 \not\asymp '$，$d_0 \asymp e_0$，$\mathfrak{Sb}(d_1, e_1, t, x), \cdots, \mathfrak{Sb}(d_n, e_n, t, x)$.

$Tm(t)\&V(x)\&(Tm(e) \vee Eq(e))\&\mathrm{lh}(e) > 0\&$

$\mathrm{lh}(d) = \mathrm{lh}(e)\&(e)_0 \neq 27\&(d)_0 = (e)_0\&(i)_{0<i<\mathrm{lh}(e)}Sb((d)_i, (e)_i, t, x)$.

Df8. （e 为一项或一方程，x 为一变元）e 含有 x.（缩写为 $\mathfrak{Ct}(e, x)$.）仿 Dn6.

Df9. c 是 d 的（根据 R1 的）直接后承.（缩写为 $\mathfrak{Cn}(c, d)$.）

*1. d 为一方程，有一（变元）y 及一数字 n 使得 d 含有 y 而 $\mathfrak{Sb}(c, d, n, y)$. $Eq(d)\&(Ey)_{y<d}(En)_{n<c}[N(n)\&Ct(d, y)\&Sb(c, d, n, y)]$.

如果 d 为一方程而 $\mathfrak{Ct}(d, y)$，则 y 是一变元 $\prec d$，如果又有 $\mathfrak{Sb}(c, d, n, y)$，则 $n \prec c$.

Df10. c 是 d 与 e 的（根据 R2 的）直接后承.（缩写为 $\mathfrak{Cn}(c, d, e)$.）

1*. $e \asymp h(\mathbf{z}_1, \cdots, \mathbf{z}_p) = \mathbf{z}$，这里 h 是一函数字母，而

$\mathbf{z}_1, \cdots, \mathbf{z}_p, \mathbf{z}$ 为数字（$p \geqslant 0$）；d 为一方程不含任何变元，命它为 $d_1 = d_2$；而 c 呈 $d_1 = c_2$ 形，并有某个含 $\boldsymbol{\alpha}$ 的项 u 使得 $\mathfrak{Sb}(d_2, u, h(\mathbf{z}_1, \cdots, \mathbf{z}_p), \boldsymbol{\alpha})$ 及 $\mathfrak{Sb}(c_2, u, \mathbf{z}, \boldsymbol{\alpha})$。 $Eq(e) \& FL((e)_1, 0) \& (i)_{0<i<lh((e)_1)} N((e)_{1,i}) \& N((e)_2) \& Eq(d) \& (y)_{y<d} \overline{Ct}(d, y) \& c = 2^{15} \cdot 3^{(d)_1} \cdot 5^{(e)} \& (Eu)_{u<d}[T_m(u) \& Ct(u, 25) \& Sb((d)_2, u, (e)_1, 25) \& Sb((c)_2, u, (e)_2, 25)]$. 因为 $\boldsymbol{\alpha}$ 比任何函数字母都具有更小的哥德尔数，故 $\boldsymbol{\alpha}$ 比之 $h(\mathbf{z}_1, \cdots, \mathbf{z}_p)$ 具有更小的哥德尔数；因而 u 比 d 具有更小的哥德尔数。

Df11. $\mathbf{x}$ 是相应于自然数 $x$ 的数字.（缩写为：$\mathfrak{Nu}(\mathbf{x}, x)$.）同 Dn 11。

Df12. （Z 是一方程系）Y 是由 Z（依据 R1 及 R2）而作的推演。（缩写为 $\mathfrak{D}(Z, Y)$.）

1. Z 是一方程系 $(z_0, z_1, \cdots, z_s)$，而 $Y \asymp (z_i)$ $(i \leqslant s)$。
   $SE(z) \& (Ei)_{i<lh(z)}[y = 2^{(z)_i}]$.
2. $Y \asymp (c, Y_1)$，而 $Y_1$ 是由 Z 而作的一个推演，c 是 $\{Y_1\}_0$ 的一个直接后承.
3. $Y \asymp (c, Y_1, Y_2)$，而 $Y_1, Y_2$ 是由 Z 而作的两个推演，c 是 $\{Y_1\}_0$ 及 $\{Y_2\}_0$ 的一个直接后承.

Df13. Y 是由 Z 到形为 $f(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{x}$ 的方程的推演，这里 f 是 Z 的主要函数字母，$\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n$ 分别是相应于自然数 $x_1, \cdots, x_n$ 的数字，而 $\mathbf{x}$ 为一数字.（对每个固定的 $n \geqslant 0$，都作为 $Z, x_1, \cdots, x_n, Y$ 的谓词）.（缩写为 $\mathfrak{S}_n(Z, x_1, \cdots, x_n, Y)$.）

1. Y 是由 Z 而作的一个推演，$\{Y\}_0 \asymp f(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{x}$，而 f 为一函数字母，如果 $Z \asymp (z_0, \cdots, z_s)$ 则 $f \asymp \{z_s\}_{1,0}$ 等等.

   $D(z, y) \& lh((y)_{0,1}) = n' \& FL((y)_{0,1,0}) \& (y)_{0,1,0} = (z)_{lh(z)\dot{-}1,1,0} \& Nu((y)_{0,1,1}, x_1) \& \cdots \& Nu((y)_{0,1,n}, x_n) \& N$

$((y)_{0,2})$.

Df 14. $\mathfrak{Nu}^{-1}(\mathrm{y}) = \begin{cases} x, & \text{当 y 为一数字}\mathbf{x}\text{时(即当 }\mathfrak{Nu}(\mathrm{y}, \mathrm{x})\text{时)}. \\ \text{y 的哥德尔数,当此外情形时}. \end{cases}$

$Nu^{-1}(y) = \mu x_{x<y} Nu(y, x)$[1].

Df15. $\mathfrak{A}(\mathrm{Y}) = \mathfrak{Nu}^{-1}(\{\mathrm{Y}\}_{0,2})$.

故当 Y 为形如 $\mathrm{r}=\mathbf{x}$ ($\mathbf{x}$ 为一数字)的方程的推演时 $\mathfrak{U}(\mathrm{Y}) = x$.

$U(y) = Nu^{-1}((y)_{0,2})$[1].

由 § 52 所说的方法以及这些定义中所附列的指示，我们得:

**引理 III** 对 Df1—Df15 所定义的每个谓词及函数言，其相应的数论谓词或相应的数论函数都是原始递归的.

## § 57. $\mu$ 运算子，枚举，对角过程

我们现在开始使用最小数运算子 $\mu y$ (§45) 而不对 $y$ 加以上界.因此如果数论谓词 $R(y)$ 满足 $(Ey)R(y)$，则 $\mu y R(y)=\{$使得 $R(y)$ 成立的最小(自然数)$y\}$. 暂时我们只在存在条件$(Ey)R(y)$成立的情形下才使用 $\mu y R(y)$.

因此我们有一个新模式

(VIa) $\quad \varphi(x_1, \cdots, x_n) = \mu y[\chi(x_1, \cdots, x_n, y) = 0]$

用以由任何一个 $n+1$ 元函数 $\chi$ 而定义一个 $n$ 元 ($n \geqslant 0$) 函数 $\varphi$，只要 $\chi$ 满足

(1a) $\quad (x_1)\cdots(x_n)(Ey)[\chi(x_1, \cdots, x_n, y) = 0]$

便成. 如果 $\chi$ 先给出，可取 $R(x_1, \cdots, x_n, y) \equiv \chi(x_1, \cdots, x_n, y) = 0$，如果 $R$ 先给出则取 $\chi$ 为 $R$ 的代表函数，从而又可把上模式写如下型

(VIb) $\quad \varphi(x_1, \cdots, x_n) = \mu y R(x_1, \cdots, x_n, y)$

用以由谓词 $R$ 而定义一函数 $\varphi$，只要 $R$ 满足

1) 按，当 y 非数字时关于 $Nu^{-1}(y)$ 的式子似不对；又当 $(y)_{0,2}$ 非数字时，$U(y)$ 亦未必与 $\mathfrak{U}(\mathrm{Y})$ 相对应——译者注.

(1b) $(x_1)\cdots(x_n)(Ey)R(x_1,\cdots,x_n,y)$

便成.

**定理 III** 如果(1a)成立，则模式(VIa)(如果(1b)成立则模式(VIb))是一般递归的. 故由定理 II: 一函数 $\varphi$ 如由函数及谓词 $\Psi$ 根据模式(I)—(VI)而定义，在应用(VI)时须(1)成立,则 $\varphi$ 是一般递归于 $\Psi$ 的.(邱吉[1936]，克林[1936].)

**证明** 我们把(VI)改写成(VI′)以便翻译到递归函数论形式体系中去,如下:

$$(\mathrm{VI}')\quad \begin{cases} \pi(x_1,\cdots,x_n,y)=\prod\limits_{s<y}\chi(x_1,\cdots,x_n,s) \\ \tau(z',0,y)=y \end{cases} (\mathrm{VI}_1')$$

$$\begin{cases} \varphi(x_1,\cdots,x_n)=\tau(\pi(x_1,\cdots,x_n,y), \\ \qquad \pi(x_1,\cdots,x_n,y'),y), \end{cases} (\mathrm{VI}_2')$$

这里 $\tau(u,v,y)$ 是一个辅助函数,当 $u=0$ 或 $v>0$ 时它无定义.(别的简单方法可见克林[1943].)

首先我们非形式地证明(VI′)是等价于(VI)的. 试考虑任何固定的 $x_1,\cdots,x_n$ 值，并把"$\chi(x_1,\cdots,x_n,y)$"简单地写为"$\chi(y)$"等等. 假设当 $y=0,1,2,\cdots$(下列第一行)时 $\chi(y)$ 所取的值如下(第二行).

| $y$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7··· |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\chi(y)$ | 3 | 1 | 2 | 0 | 9 | 0 | 1 | 5··· |
| $\pi(y)=\prod\limits_{s<y}\chi(s)$ | 1 | 3 | 3 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0··· |

根据(VI), $\varphi=\mu yR(y)=\mu y[\chi(y)=0]$, 即 $\varphi$ 是能够使第二行出现 0 的最小的 $y$, 在这例子里那便是 3. 这个数 3 也就是唯一的 $y$ 它在第三行所对应的数是一个非零的数(在这例里为 6)但却直接在零之前. 而根据($\mathrm{VI}_2'$)可如下地给出这数而非别数以作为 $\varphi$ 之值. 试在最后方程中以 3 代 $y$ 并求其值得

$$\varphi=\tau(\pi(3),\pi(4),3)=\pi(6,0,3)=3.$$

如果我们在最后一方程中把 3 以外任何一数代 y，我们都不能求

出 $\tau$ 之值.（如果这例子更改使得 $(Ey)R(y)$，则我们便不能得 $\varphi$ 之值.）

今把 (VI$'_2$) 翻译而分别用 $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{a}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_n$, $\boldsymbol{b}$ 来译 "$\pi$", "$\tau$", "$\varphi$", "$x_1$", $\cdots$, "$x_n$", "$y$", 所得的方程系叫做 $E_2$.

下面的命题 (i)—(v) 是就任何固定的 $n$ 元矢 $x_1, \cdots, x_n$ 而言的，不必用到 (1). 就 (i) 与 (ii) 言，$\pi$ 必须是由 $\chi$ 或 $R$ 依据 (VI$'_1$) 而定义的函数.

(i) 如果 $(Ey)R(x_1, \cdots, x_n, y)$，则当 $x = \mu y R(x_1, \cdots, x_n, y)$ 时有 $E_p^\pi$, $E_2 \vdash \boldsymbol{f}(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{x}$. (ii) 如果 $E_p^\pi$, $E_2 \vdash \boldsymbol{f}(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{x}$ 而 $\mathbf{x}$ 为一数字，则 $(Ey)R(x_1, \cdots, x_n, y)$ 并且 $x = \mu y R(x_1, \cdots, x_n, y)$.

其证明与非形式的说明密切相似.

但 $\pi$ 是原始递归于 $\chi$ 的 (§45 # B)，故有一方程系 $E_1$ 它递归地由 $\chi$ 定义 $\pi$ (§ 54 定理 II). 我们可选择 $E_1$ 使得 $\boldsymbol{p}$ 是其主要函数字母，$\boldsymbol{h}$ 为已给函数字母而其辅助函数字母不出现于 $E_2$ 中. 命 E 为 $E_1 E_2$. 显然，如果 $E_p^\pi$, $E_2 \vdash \boldsymbol{f}(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{x}$，则 $E_h^\chi$, $E \vdash \boldsymbol{f}(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{x}$；其逆理则由 §54 引理 IIc 而得，正如引理 IId 的证明那样. 把这结果应用到 (i) 及 (ii) 并合并成一句，则得：

(iii) 有某数字 $\mathbf{x}$ 使得 $E_h^\chi$, $E \vdash \boldsymbol{f}(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{x}$ 当且仅当 $(Ey)R(x_1, \cdots, x_n, y)$ 时，这时 $x = \mu y R(x_1, \cdots, x_n, y)$.

若用 (i) 及 (iii) 可得，对每个 $n$ 元矢 $x_1, \cdots, x_n$, $E_h^\chi$, $E \vdash \boldsymbol{f}(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{x}$，而 $\mathbf{x}$ 为一数字，当且仅当 $x = \mu y R(x_1, \cdots, x_n, y)$ 时；亦即当 E 递归地从 $R$ 而定义一函数 $\mu y R(x_1, \cdots, x_n, y)$ 时.

**定理 IV 的证明**[1] 今设 $R(x_1, \cdots, x_n, y)$ 是一般递归的. 设 D 为一方程系，递归地定义了 $R$ 的代表函数 $\chi$，而以 $\boldsymbol{h}$ 为主要函数字母，其辅助函数字母不出现于 E 中. 设 F 为 DE. 则有

(iv) 对某数字 $\mathbf{x}$ 而有 $F \vdash \boldsymbol{f}(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{x}$，当且仅当 $(Ey)$

1) 定理 IV 本文的叙述见后——译者注.

$R(x_1, \cdots, x_n, y)$时，这时 $x = \mu y R(x_1, \cdots, x_n, y)$.

若用 §56 Df13，可把这结果(删去最后一句附注) 写成符号形式如下:

(2) $(Ey)R(x_1, \cdots, x_n, y) \equiv (EY)\mathfrak{S}_n(\mathrm{F}, x_1, \cdots, x_n, \mathrm{Y})$.

今设F的哥德尔数为 $f$. 根据 §52 的'相应数论谓词'定义，可得 $S_n(f, x_1, \cdots, x_n, y) \equiv \{y$ 是一实体Y的哥德尔数，而Y满足 $\mathfrak{S}_n(\mathrm{F}, x_1, \cdots, x_n, \mathrm{Y})\}$. 故 $(EY)\mathfrak{S}_n(\mathrm{F}, x_1, \cdots, x_n, \mathrm{Y}) \equiv (Ey) S_n(f, x_1, \cdots, x_n, y)$. 故由 (2) 得

(3) $(Ey)R(x_1, \cdots, x_n, y) \equiv (Ey)S_n(f, x_1, \cdots, x_n, y)$.

根据引理 III, $S_n$ 是原始递归的.

在把这结果叙述成一定理时，我们把 $S_n$ 换为如下地定义的谓词 $T_n$,

$T_n(z, x_1, \cdots, x_n, y) \equiv S_n(z, x_1, \cdots, x_n, y) \& (t)_{t<y}\bar{S}_n(z, x_1, \cdots, x_n, t)$.

对给定的 $z, x_1, \cdots, x_n, y$ 言, $T_n(z, x_1, \cdots, x_n, y)$ 至多只对一个 $y$ 成立(参见 §41* 174). 不用 $S_n$ 而改用 $T_n$ 作本理论中的基本谓词，其好处将在 §58 中看见. 由##D 及 E 可知 $T_n$ 亦是原始递归的. 根据 & 消, §32 *70 及 §40 *149a 的非形式意义 (注意，因 $S_n$ 是原始递归的，故直觉主义地有

$$S_n(z, x_1, \cdots, x_n, y) \vee \bar{S}_n(z, x_1, \cdots, x_n, y),$$

这将在 §60 及 §62 中讨论到)，我们便得

(4) $T_n(z, x_1, \cdots, x_n, y) \rightarrow S_n(z, x_1, \cdots, x_n, y)$,

(5) $(Ey)T_n(z, x_1, \cdots, x_n, y) \equiv (Ey)S_n(z, x_1, \cdots, x_n, y)$.

**定理 IV** 对每个 $n \geq 0$ 言，任给一个一般递归谓词 $R(x_1, \cdots, x_n, y)$, 都可找出数 $f$ 及 $g$ 使得

(6) $(Ey)R(x_1, \cdots, x_n, y) \equiv (Ey)T_n(f, x_1, \cdots, x_n, y)$,

(7) $(y)R(x_1, \cdots, x_n, y) \equiv (y)\bar{T}_n(g, x_1, \cdots, x_n, y)$,

这里, $T_n(z, x_1, \cdots, x_n, y)$ 是上面所定义的一个原始递归谓词. 对多个量词的情形亦仿此；例如，任给一般递归谓词 $R(a_1, \cdots, a_n, x, y)$, 都有一数 $g$ 使得

(8) $$(Ex)(y)R(a_1, \cdots, a_n, x, y) \equiv (Ex)(y)\overline{T}_{n+1}(g, a_1, \cdots, a_n, x, y).$$

(枚举定理．克林 Kleene [1943].)

**证明**(续完)　由(3)(5)可得(6)．要证(7)我们可把(6)应用到谓词 $\overline{R}(x_1, \cdots, x_n, y)$ 去，相应于这谓词的 $f$ 叫做"$g$"，并依照 § 26 *30 及 § 35 *80 的非形式意义而把这结果加以变形得

$$(y)\overline{\overline{R}}(x_1, \cdots, x_n, y) \equiv (y)\overline{T}_n(g, x_1, \cdots, x_n, y).$$

因为 $R$ 是一般递归的，我们有 $R \vee \overline{R}$，故(参见 § 27* 49c) $\overline{\overline{R}} \equiv R$．要证明(8)，我们应用(7)，把 $n$ 改为 $n+1$，把 $x_1, \cdots, x_n$ 改为 $a_1, \cdots, a_n, x$，把 $y$ 作为 $y$，并用 §33 *72 的非形式意义．

**讨论**　根据这定理，我们可对形如 $(Ey)R(x_1, \cdots, x_n, y)$ ($R$ 为一般递归)的 $n$ 元谓词加以枚举(容许重复)，只须在具有固定的同形的 $n+1$ 元谓词 $(Ey)T_n(z, x_1, \cdots, x_n, y)$ 中依次取 $z = 0, 1, 2, \cdots$便成．简单地说，$(Ey)T_n(z, x_1, \cdots, x_n, y)$ '枚举'了下列的谓词：$(Ey)R(x_1, \cdots, x_n, y)$ 而 $R$ 一般递归．同样地，$(y)\overline{T}_n(z, x_1, \cdots, x_n, y)$ 枚举了下列的谓词：$(y)R(x_1, \cdots, x_n, y)$ 而 $R$ 一般递归，等等．因为 $T_n$，$\overline{T}_n$，$\overline{T}_{n+1}$ 等是原始递归的，故有：

**系**　设在谓词 $R$ 之前加上一些有固定次序的量词，则不管允许 $R$ 是一般递归或只允许它是原始递归，它所能表示的谓词的总集是一样的．(克林 [1943]，推广了罗歇 (Rosser) [1936]，87 页的一条引理．)

今以上述的枚举作为基础，应用康托对角方法而证明下一定理．设任给一个一般递归谓词 $R(x, y)$，并用 $n=1$ 时的(6)，则有一数 $f$ 使得

(9) $$(Ey)R(x, y) \equiv (Ey)T_1(f, x, y).$$

在这等价式中代 $x$ 以 $f$ 得

(10) $$(Ey)R(f, y) \equiv (Ey)T_1(f, f, y).$$

因此，由 §27* 50a 的非形式意义得

(11) $$(Ey)R(f, y) \not\equiv (Ey)\overline{T}_1(f, f, y).$$

若用 §35 *86 的非形式意义,则下定理中的公式(12)便得到了. 要证明 (13), 可用 (7) 得

$$(y)R(g, y) \equiv (y)\overline{T}_1(g, g, y) \equiv \overline{(Ey)}T_1(g, g, y)$$
$$\not\equiv (Ey)T_1(g, g, y).$$

要证明 (14) (15), 试任给一般递归谓词 $R(x)$, 令 $R(x, y) \equiv R(x) \& y = y$ 或 $R(x, y) \equiv R(U_1^2(x, y))$ (§44), 则 $R(x, y)$ 为一般递归而且 $R(x) \equiv (Ey)R(x, y) \equiv (y)R(x, y)$.

**定理 V** (第一部分) 任给一般递归谓词 $R(x, y)$, 都可找出数 $f$ 与 $g$ 使得

(12) $$(Ey)R(f, y) \not\equiv (y)\overline{T}_1(f, f, y),$$

(13) $$(y)R(g, y) \not\equiv (Ey)T_1(g, g, y).$$

从而更有: 任给一般递归谓词 $R(x)$, 可找出数 $f$ 与 $g$ 使得

(14) $$R(f) \not\equiv (y)\overline{T}_1(f, f, y),$$

(15) $$R(g) \not\equiv (Ey)T_1(g, g, y).$$

**讨论** 由这定理, 可见 $(y)\overline{T}_1(x, x, y)$ 便是具有下述性质的谓词的一个例子: 它具 $(y)R(x, y)$ 形而 $R$ 是一般递归,但它不能表成其对偶形, $(Ey)R(x, y)$, $R$ 一般递归. 即下式

$$(x)[(y)\overline{T}_1(x, x, y) \equiv (Ey)R(x, y)]$$

对任何一般递归谓词 $R(x, y)$ 都不能成立;任给 $R(x,y)$, (12) 中的 $f$ 便是反驳它的 $x$ 值. $(y)\overline{T}_1(x, x, y)$ 当然更不能是一般递归的了 (参见 (14)).

(上述的)证明,简单地说便是: $z = 0, 1, 2, \cdots$ 时, $(Ey)T_1(z, x, y)$ 便枚举了(容许重复)一切形如 $(Ey)R(x, y)$ ($R$ 是一般递归) 的谓词. 根据康托对角法, $\overline{(Ey)}T_1(x, x, y)$ 便是一个不在枚举之内的谓词. 而后者等价于 $(y)\overline{T}_1(x, x, y)$.

不必用到现在的理论, 仅由方程系 E 的可枚举性便可得出结论说,一般递归函数是可数的,因此下形的谓词亦是可数的: $(Ey)R(x, y)$ 而 $R$ 递归. 因此由康托的结果 (§2), 它们不能包括所有

的数论谓词．本定理的新内容在于，作出一个既非一般递归的又不能表成下形的谓词，$(Ey)\ R(x,y)$ 而R递归，但这谓词却可表成其对偶形 $(y)R(x,y)$ 而 $R$ 递归．反之亦真．

为节省篇幅起见，我们只就一变元 $a$ 的谓词而叙述本定理的第二部分；但对于任何 $n$ 元 $(n \geqslant 1)$ 谓词，它亦是成立的．在(b)的证明中，我们使用一个古典的等价式，它是不能直觉主义地证明的．因此我们把(b)附标以"c"（参见 §37)．在本章中附有"c"的各种结果都是在数论的水平上的（按即不用到集合论的——译者)．

**定理 V**（第二部分） 试讨论下列的谓词形式

$$R(a) \quad \begin{matrix} (Ex)R(a,x) & (x)(Ey)R(a,x,y) & (Ex)(y)(Ez)R(a,x,y,z),\cdots \\ (x)R(a,x) & (Ex)(y)R(a,x,y) & (x)(Ey)(z)R(a,x,y,z),\cdots \end{matrix}$$

这里每个 $R$ 都是一般递归的．对每个具有 $k+1$ 个 $(k \geqslant 0)$ 量词的形式，都有一个谓词使得(a)可表成该形式的否定，((b)$^c$ 可表成另一 $k+1$ 量词形式）但不能表成该形式的本身，亦不能表成具 $\leqslant k$ 量词的任何形式．根据第一部分，当 $k=0$ 时，"c"是不必要的．（克林[1943]，莫斯托夫斯基（Mostowski）[1947].）

**证明** 试取 $k=1$ 为例． 正和由(6)而推出(11)那样，由(8)（当 $n=1$ 时）可推得

(16) $\qquad (Ex)(y)R(g,x,y) \not\equiv (\overline{Ex})(y)\overline{T}_2(g,g,x,y).$

因此，$(\overline{Ex})(y)\overline{T}_2(a,a,x,y)$（古典地等价于 $(x)(Ey)\ T_2(a,a,x,y)$，参见 §35 定理 18）不能表成 $(Ex)(y)\ R(a,x,y)$ 的形式．同样，$(\bar{x})(Ey)T_2(a,a,x,y)$（古典地等价于 $(Ex)(y)\ \overline{T}_2(a,a,x,y)$）不能表成 $(x)(Ey)\ R(a,x,y)$ 的形式． 当然这些谓词不能表成只具有一个量词或没有量词的形式．

**定理 VI** 对每个 $n \geqslant 0$: (a) 每个一般递归谓词 $P(x_1,\cdots,x_n)$ 既可表成 $(Ey)\ R\ (x_1,\cdots,x_n,y)$ 的形式亦可表成 $(y)\ S\ (x_1,\cdots,x_n,y)$ 的形式，而 $R$, $S$ 为原始递归．(b)$^c$ 反之，凡能同

时表成这两形式谓词(而 $R, S$ 为一般递归的)都是一般递归[1]. (c) 谓词 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 为一般递归当且仅当 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 与 $\bar{P}(x_1, \cdots, x_n)$ 都可表成 $(Ey)\ R(x_1, \cdots, x_n, y)$ 的形式而 $R$ 为一般递归,并且 $(x_1)\cdots(x_n)[P(x_1, \cdots, x_n) \vee \bar{P}(x_1, \cdots, x_n)]$. (克林 [1943], 坡斯特 (Post) [1944], 莫斯托夫斯基 [1947].)

**证明** (a) 取 $P(x_1, \cdots, x_n, y) \equiv P(x_1, \cdots, x_n) \& y = y$, 因此得 $P(x_1, \cdots, x_n) \equiv (Ey)P(x_1, \cdots, x_n, y) \equiv (y)P(x_1, \cdots, x_n, y)$, 再应用定理 IV 系. (b) 设 $P(x_1, \cdots, x_n) \equiv (Ey)R(x_1, \cdots, x_n, y) \equiv (y)S(x_1, \cdots, x_n, y)$. 由古典逻辑 (参见 § 35 *85) 得 $\bar{P}(x_1, \cdots, x_n) \equiv (Ey)\bar{S}(x_1, \cdots, x_n, y)$. 由古典的排中律有 $P(x_1, \cdots, x_n) \vee \bar{P}(x_1, \cdots, x_n)$. 故得

$$P(x_1, \cdots, x_n) \equiv R(x_1, \cdots, x_n, \mu y[R(x_1, \cdots, x_n, y) \vee \bar{S}(x_1, \cdots, x_n, y)])$$

由定理 III, 右端是一般递归的. (c) 最后一假设使这叙述亦直觉主义地成立[2].

在克林 1943, 1944 中, 一谓词叫做 '初等的', 如果它可显式地用常自然数,变自然数,一般递归谓词,命题演算的运算子 →, &, ∨, ― 以及量词,根据通常的语法而作成.

**定理 VII** (a) 每个算术谓词 (§48) 都是 '初等的', (b) 逆理亦真. (c) 能够表成冠有量词于一般递归谓词之前的谓词亦可表成定理 V 中各形式之一而 $R$ 为一般递归. (d)[c] 每个算术谓词都能表成定理 V 中各形式之一而 $R$ 为一般递归.

**证明** (a) 由 ##1, 2, 14, C (§44, §45) 可知, 凡由 +, ·, = 而显示地作成的谓词都是原始递归的, 故亦是一般递归的. (b) 由定理 VIa 及 §49 定理 I 系. (c) 当 $x$ 经历一切自然数时, 则下列原

1) 参见附录 VII—— 俄译注.

2) 这一句话是指表述于 (c) 项内的条件的充分性(对谓词 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 的一般递归性)而言的. 所说条件的必要性可由 (a) 项及下事实推出, 任何一般递归谓词 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 都是可能行地判定的(参见下文 §60), 即析取式

$$P(x_1, \cdots, x_n) \vee \bar{P}(x_1, \cdots, x_n)$$

是直觉主义地真确的, 下列的析取表达式亦然(由于全称性解释) $(x_1)\cdots(x_n)[P(x_1, \cdots, x_n) \vee \bar{P}(x_1, \cdots, x_n)]$——俄译注.

始递归函数的 m + 1 元矢：$(x)_0, \cdots, (x)_m$ (§ 45 # 19) 便取得(容许重复)一切的自然数的 m + 1 元矢．故

(17) $(Ex_0)\cdots(Ex_m)A(x_0,\cdots,x_m) \equiv (Ex)A((x)_0,\cdots,(x)_m)$,

(18) $(x_0)\cdots(x_m)A(x_0, \cdots, x_m) \equiv (x)A((x)_0, \cdots, (x)_m)$.

我们利用这些事实而把依次相继的同类量词凝缩．(d) 由 (a)，§35 定理 19 的非形式意义及 (c)．

**附注 1** 对任何谓词 $A(i, x)$ 均有

(19) $(i)_{i<a}(Ex)A(i, x) \equiv (Ex)(i)_{i<a}A(i, (x)_i)$.

试把 $A(i, x)$ 代以 $\overline{A}(i, x)$，并应用 *30，*85，*86，*58，*49 (的非形式意义)(参见定理 8 系及定理 18 的证明)，我们便可古典地推得

(20)$^c$ $(Ei)_{i<a}(x)A(i, x) \equiv (x)(Ei)_{i<a}A(i, (x)_i)$.

(但一般地，(20) 并不直觉主义地真确，由 § 82 例 4 可知．) 又由 *95 及 *77 得 $(i)_{i<a}(x)A(i, x) \equiv (x)(i)_{i<a}A(i, x)$；对 $(Ei)_{i<a}(Ex)$，$(i)_{i<a}(x)_{x<b}$ 及 $(Ei)_{i<a}(Ex)_{x<b}$ 仿此．

虽则‘算术的’与‘初等的’这两概念之间有根本的区别，需用两条基本定理(定理 I 及 IV) 作为桥梁，但今后为统一用语起见，我们经常用‘算术的’一语(即使我们原意是指另一概念)．

**例 1** 卡尔马 Kalmár [1943*] 对‘初等的’一语给以另一意义如下．一函数是“初等的”，如果它可显式地表以自然数变元，常数 1，函数 +，$\dot{-}$，$[a/b]$ 及算子 $\sum_{y<z}$，$\prod_{y<z}$．如果依照熟知的方式推广这个概念到谓词去，并推广到具有假定函数及谓词的情形去，我们便可依次地看出在我们的原始递归函数谓词表 ## 1—21 中 (§44，§45)，下列的函数谓词是初等的，在我们的结果 ##A—G 中，如改‘原始递归’为‘初等’，则下列各结果是成立的：#1，#2，#13，##A—C，#3，#4，#9 ($\overline{sg}(a) = [1/(a+1)]$)，#10，#D，#E ($\prod_{s\leq t}$ 就是 $\prod_{s<t+1}$)，#15 (其代表函数为 sg $[(a+1)/(b+1)]$)，#6 ($a \dot{-} b = \mu c_{c\leq b}[\overline{b + c < a} \vee a < b]$)，#5，#7，#8，#11，#12 ($\mathrm{rm}(a, b) = a \dot{-} b[a/b]$)，#14，#F，#16，

#17，作为 $a$ 的函数（对每个固定的 $i$）的#19；又哥德尔的 $\beta$ 函数（§48）．——其次我们可证：(A) 如果 $\varphi$ 由 $\psi$，$\chi$（或由 $\chi$）经原始递归式（即模式 (V)）而作成，并且 $\varphi(y, x_2, \cdots, x_n) \leqslant \eta(y, x_2, \cdots x_n)$，则 $\varphi$ 初等于 $\psi$，$\chi$，$\eta$（于 $\chi$，$\eta$）．在 §49 定理 I 的证明的情形 (Vb) 处，其中的 (B) 呈下形：$(Ec)(Ed)R(y, x_2, \cdots, x_n, w, c, d)$，而 $R$ 是初等于 $\psi$ 与 $\chi$ 的，且有 $(c)(d)[R(y, x_2, \cdots, x_n, w, c, d) \rightarrow \varphi(y, x_2, \cdots, x_n) = w]$．故 $\varphi(y, x_2, \cdots, x_n) = (\mu t \mathrm{R}(y, x_2, \cdots, x_n, (t)_0, (t)_1, (t)_2))_0$．因此根据# $E$，只须对 $t$ 找一上界，该上界初等于 $\eta$ 便成了．但由 § 48，我们可选取 $d = (\max(y, a_0, \cdots, a_y))!$，这里 $a_i = \varphi(i, x_2, \cdots, x_n)$，故 $d \leqslant D$ 这里 $D = \left(y + \sum_{i \leqslant y} \eta(i, x_2, \cdots, x_n)\right)!$ 又 $c < \prod_{i \leqslant y} \delta(d, i) = \prod_{i \leqslant y} (1 + (i+1)d) \leqslant C$，这里 $C = \prod_{i \leqslant y} (1 + (i+1)D)$．因此可取 $t < 2^E \cdot 3^C \cdot 5^D$，这里 $E = \eta(y, x_2, \cdots, x_n)$．（按 (A) 的证明至此完毕——译者）．——现在我们可找出 $p_i$（#18）的初等的上界从而证明 $p_i$ 是初等的，这上界是 $p_i \leqslant 2^{2^i}$（只当 $i = 0$ 时才取等号），这可对 $i$ 作串值归纳而证明如下．当 $i = 0, 1$ 时它是真的．当 $i \geqslant 2$ 时，$p_i \leqslant p_0 \cdot p_1 \cdot \cdots \cdot p_{i-1} - 1$（恰和 § 40 证明欧几里得定理那样推理）$< 2^{2^0} \cdot 2^{2^1} \cdot \cdots \cdot 2^{2^{i-1}}$（归纳假设）$= 2^{2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{i-1}} = 2^{2^i - 1} < 2^{2^i}$．——因而亦知道下列函数是初等的：#19，#20 $(\mathrm{lh}(i, a) \leqslant a)$，# 21．其次又可证（见 #G）(B) 如果 $\varphi$ 由 $\chi$ 应用 § 46 的串值递归式 (3) 而得，并且 $\varphi(y, x_2, \cdots, x_n) \leqslant \eta(y, x_2, \cdots, x_n)$，则 $\varphi$ 初等于 $\chi$，$\eta$．因为，这样一来，在 § 46 的原始递归式 (4) 中出现的 $\tilde{\varphi}(y; x_2, \cdots, x_n)$ 便有一上界为 $\prod_{i<y} p_i^{\eta(i, x_2, \cdots, x_n)}$ 而这是初等于 $\eta$ 的．——因此 § 51 Dn 1—Dn 13a（参见 §52 引理 19）及 §56 Df1—Df15（参见引理 III）中相应于各元数学谓词及函数的那些数论谓词及函数便都是初等的．因为在一般算术内这些定义所用的递归式都只用以引进谓词（的代表函数），因此在简单算术中每个相应的递归式都可适用 (B)，只须取

$\eta = 1$ 便成．在特例，$S_n$(Df 13) 因而 (C)$T_n$ (定理 IV 之前的) 与 $U$ (Df 15) 都是初等的． 这便得出了贝列斯基 (Ilona Bereczki) ([1949*]，未发表)的结果(她用卡尔马 (Kalmár) [1943] 中的技巧)，即凡在克林 [1936] 中而证明是原始递归的每个谓词或函数，都或者是初等的或者可换以一个初等的而不致于影响该文的论证．——因此 (D) 在定理 IV 系中，可加入"或者 $R$ 是初等的 (卡尔马 Kalmár 意义下)"一语．——在我们书中用原始递归函数表示哥德尔定理及一些其它结果，卡尔马 ([1943]，[1948]，[1950]，[1950a]) 改用初等函数来表示．贝列斯基小姐 ([1952]) 证明了，如下定义的原始递归函数 ${}^b a$ 不是初等的: ${}^0 a = 1$，${}^{b'} a = a^{({}^b a)}$ (因此 ${}^{b+1} a = \xi_3(b, a)$§55)，因为 $a$ 增大时 ${}^a a$ 增长太快．她又用下法得出另外一例的非初等的原始递归函数，即对一元初等函数而作出它们的原始递归枚举函数 $\varphi(n, a)$ (参见 §55)． 由此可知存在非初等的原始递归谓词(仿 § 55 例 1)．

**定理 VIII^C** 设如下文定义了原始递归的 $V$，$v$，则就 $k$ 而递归所定义的谓词 $M(a, k)$

$$\begin{cases} M(a, 0) \equiv V(a), \\ M(a, 2k+1) \equiv (Ex)M(v(a, x), 2k), \\ M(a, 2k+2) \equiv (x)M(v(a, x), 2k+1), \end{cases}$$

不是算术的．(克林 [1943].)

卡尔马首先得出这一类结果，它亦出现于斯科林 [1936—1937]，(第 86 页以后)中． 又参见王浩 (Wang) [1953]，莫斯托夫斯基 [1951]．

**证明** (可以略去) 设在 $S_n(z, x_1, \cdots, x_n, y)$ (§ 56 Df 13) 的表达式中把 "$n'$" 换为 "$(x)_0'$"，把 "$N_u\ ((y)_{0,1,1}, x_1) \& \cdots \& Nu\ ((y)_{0,1,n}, x_n)$" 换为 "$(i)_{1 \leq (i) \leq (x)_0} Nu\ ((y)_{0,1,i}, (x)_i \dot{-} 1)$"，其结果是一个原始递归谓词 $S(z, x, y)$ 且有

$$(21) \qquad S(z,\ 2^n \cdot p_1^{x_1'} \cdot \cdots \cdot p_n^{x'_n} \cdot p_{n'}^u,\ y) \equiv S_n(z, x_1, \cdots, x_n, y).$$

命 $T(z, x, y) \equiv S(z, x, y) \& (t)_{t<y} \bar{S}(z, x, t)$．则有

(22) $$T(z, 2^n \cdot p_1^{x_1'} \cdot \cdots \cdot p_n^{x'_n} \cdot p_{n'}^{u}, y) \equiv T_n(z, x_1, \cdots, x_n, y).$$

今令 $V(a) \equiv T((a)_1 \dot{-} 1, a, (a)_{(a)_0'} \dot{-} 1)$. 则当 $n \geq 1$ 时有

(23) $$V(2^n \cdot p_1^{x'_1} \cdot \cdots \cdot p_n^{x'_n} \cdot p_{n'}^{u}) \equiv T_n(x_1, x_1, \cdots, x_n, y).$$

设 $\nu(a, x) = a * 2^{x'}$(参见 §45#21). 今当 $k = 0, 1, 2, \cdots$ 时 $M(a, k)$ 取值 $V(a)$, $(Ex)V(a * 2^{x'})$, $(x)(Ey)\ V((a * 2^{x'}) * 2^{y'}), \cdots$. 今设 $M(a, k)$ 为算术的. 由定理 VII (d) 它将可表成定理V中之一形式. 作为例子,设 $M(a, k) \equiv (Ex)R(a, k, x)$而 $R$ 为递归. 则将有 $(Ex)R(2^2 \cdot 3^{a'}, 2, x) \equiv M(2^2 \cdot 3^{a'}, 2) \equiv (x)(Ey)\ V(((2^2 \cdot 3^{a'}) * 2^{x'}) * 2^{y'}) \equiv (x)\ (Ey)V\ (2^2 \cdot 3^{a'} \cdot 5^{x'} \cdot 7^{y'}) \equiv (x)(Ey)T_2(a, a, x, y)$. 但 $(Ex)R(2^2 \cdot 3^{a'}, 2, x)$ 是具有 $(Ex)\ R(a, x)$ 的形式而 $R$ 递归的; 由定理 V 第二部分的证明, 我们知道 $(x)(Ey)T_2(a, a, x, y)$ 是不能表成这个形式的.

如果读者愿意的话,可从这里直接跳到 § 60—§ 62, 它们只是偶尔地用到 §58 与 §59 的结果.但 §58 中却有一结果对 §63—§ 66 及其后说来是根本的.

## § 58. 范式,坡斯特定理

应用 Df 13 及 Df15 (§ 56) 我们可把 '一般递归函数' 的定义 (§55, §54) 重述如下. 一函数 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 是一般递归的当且仅当有一方程系 E (没有给定函数字母)使得

(24) $$(x_1)\cdots(x_n)(EY)\mathfrak{S}_n(\mathrm{E}, x_1, \cdots, x_n, \mathrm{Y}),$$

(25) $$(x_1)\cdots(x_n)(\mathrm{Y})[\mathfrak{S}_n(\mathrm{E}, x_1, \cdots, x_n, \mathrm{Y}) \rightarrow \mathfrak{U}(\mathrm{Y}) = \varphi(x_1, \cdots, x_n)].$$

若依哥德尔编号而由一般算术转到简单算术去, $\mathfrak{S}_n$ 便变成 $S_n$, $\mathfrak{U}$ 变成 $U$, E 变成它的哥德尔数$e$,而由 (24) (25) 得

(26) $$(x_1)\cdots(x_n)(Ey)S_n(e, x_1, \cdots, x_n, y),$$

(27) $$(x_1)\cdots(x_n)(y)[S_n(e, x_1, \cdots, x_n, y)$$

$$\to U(y) = \varphi(x_1, \cdots, x_n)].$$

由引理 III，$U$ 和 $S_n$ 都是原始递归的.

由 (26)(27) 可得，函数 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 可用数 $e$ 表示如下，

(28) $\quad \varphi(x_1, \cdots, x_n) = U(\mu y S_n(e, x_1, \cdots, x_n, y))$.

由 §57 的 (5) 及 (4)，可知在 (26)，(27) 以及 (28) 中如把 $S_n$ 换为 $T_n$，结果仍然成立.

**定理 IX.** 对每个 $n \geqslant 0$：任给一个一般递归函数 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$，都可找得一数 $e$ 使得

(29) $\quad (x_1)\cdots(x_n)(Ey)T_n(e, x_1, \cdots, x_n, y)$,

(30) $\quad \varphi(x_1, \cdots, x_n) = U(\mu y T_n(e, x_1, \cdots, x_n, y))$,

(31) $\quad (x_1)\cdots(x_n)(y)[T_n(e, x_1, \cdots, x_n, y) \to U(y) = \varphi(x_1, \cdots, x_n)]$,

这里 $T_n(z, x_1, \cdots, x_n, y)$ 及 $U(y)$ 乃上面所定义的特殊原始递归谓词及函数.（范式定理，克林 [1936]，[1943].）

把 $S_n$ 改为 $T_n$ 的好处在于，对任何 $e$ 言，只要 (29) 与 (30) 成立则 (31) 必成立（反之，如果方程系 E 缺乏递归地定义 $\varphi$ 的相容性，则其哥德尔数 $e$ 即使使 (26)，(28) 成立而 (27) 可能不真.）

对任何一个一般递归函数 $\varphi$ 言，任何数 $e$（不管它是否递归地定义 $\varphi$ 的方程系 E 的哥德尔数）只要它使 (29) 及 (30)（因而 (31)）成立，便说它递归地定义 $\varphi$ 或说它是 $\varphi$ 的一个哥德尔数.

如果数 $e$ 递归地定义一个一般递归谓词 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 代表函数，我们说 $e$ 递归地定义谓词 $P$ 或说 $e$ 是谓词 $P$ 的一个哥德尔数. 这时我们有

(32) $\quad P(x_1, \cdots, x_n) \equiv (Ey)[T_n(e, x_1, \cdots, x_n, y) \& U(y) = 0] \equiv (y)[T_n(e, x_1, \cdots, x_n, y) \to U(y) = 0]$.

要构造性地证明一函数 $\varphi$ 是一般递归的，必须作出（或说出作法）递归地定义 $\varphi$ 的方程系 E. 因此，能行地给出一般递归函数便意指给出 E 或给出它的一个哥德尔数.

关于递归函数的哥德尔数的理论将在下一章 (§65) 讨论.

**例 1** 是不是每个一般递归函数 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 都可表成下

形 $\mu y R(x_1, \cdots, x_n, y)$ 而 $R$ 为原始递归(且 (1b) 成立)? 暗示: 用 §55 例 1 及 §45 #E. (坡斯特 [1946a] 用不同的方法.)——试把一函数 $\theta(y)$ 叫做"通用的",如果对于每个一般递归函数 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 都有一个原始递归谓词 $R(x_1, \cdots, x_n, y)$ 使得 (1b) 成立且 $\varphi(x_1, \cdots, x_n) = \theta(\mu y R(x_1, \cdots, x_n, y))$; 又把 $\theta(y)$ 叫做"大振幅的",如果 $(x)(z)(Ey)_{y>z}\theta(y) = x$. 马尔科夫 (Марков) [1947c] [1949] 证明了,一原始递归函数 $\theta$ 之为通用的, 其一个充分而且古典地必要的条件是: 它是大振幅的. 库兹涅佐夫 (Кузнесов) [1950] 发表了关于这样函数 $\theta$ 的一些结果.

**系** 每个一般递归函数 $\varphi$ 都可由应用模式 (I)—(VI) 而得, 在应用 (VI) 时须 (1) 成立. (定理 III, 当 $\Psi$ 为空时,之逆.)

为简单起见,以上从定理 IV 起我们只注意绝对的一般递归函数及谓词, 即递归于 $\psi_1, \cdots, \psi_l$ 而 $l = 0$. 现在我们要推广到相对一般递归性,即 $l > 0$ 的情形.

只要把原始递归谓词 $T_n$ 换为一个原始递归于 $\psi_1, \cdots, \psi_l$ 的谓词, 则定理 IX 及其前的结果都仍成立. 试先就 $l = 1$ 及 $\psi(=\psi_1)$ 为一元函数 ($m_1 = 1$) 的情形而讨论.

由定义 (§55), 如果有一方程系 E 递归地由 $\psi$ 而定义 $\varphi$ (§54) 则 $\varphi$ 一般递归于 $\psi$. 如果有这样的 E, 我们可选取固定的函数字母表中第一个字母 g (该字母的哥德尔数为 $g$) 作为 E 的已给函数字母.

现在我们把 §56 中的 Df12 及 Df13 作适当的修正.

Df 12* ($l = m_1 = 1$ 时). (Z 是一方程系) Y 是由 $E_g^\psi$, Z (根据 R1, R2) 而作的推演. (缩写为 $\mathfrak{D}^\psi(Z, Y)$.)

*0. Z 是一方程系;有自然数 $u_1$ 使 Y 是 ($\mathrm{g}(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}$) 而 $u = \psi(u_1)$.

$SE(z)\&y = 2\exp 2^{15} \cdot (3\exp 2^g \cdot 3^{(y)_{0,1,1}}) \cdot 5^{(y)_{0,2}}\& (Eu_1)_{u_1<y}[Nu((y)_{0,1,1}, u_1)\&Nu((y)_{0,2}, \psi(u_1))]$.

1—3. 仿 Df 12 句 1—3, 除却把"由 Z 而作的"改为"由 $E_g^\psi$, Z 而作的".

Df13* ($l=m_1=1$ 时). 仿 Df 13 但把"由 Z 而作的", 改为"由 $E_g^\psi$, Z 而作的", 把"$D(z, y)$"改为"$D^\psi(z, y)$". (缩写为 $\mathfrak{S}_n^\psi(Z, x_1, \cdots, x_n, Y)$.)

上面我们证明 $D(z, y)$ 和 $S_n(z, x_1, \cdots, x_n, y)$ 是原始递归的(§ 56 引理 III), 用同样推理现在可以证明 $D^\psi(z,y)$ 和 $S_n^\psi(z, x_1, \cdots, x_n, y)$ 是原始递归于 $\psi$ 的; 上面对一般递归函数 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 有 (26) 和 (27), 现在对一般递归于 $\psi$ 的函数 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 则有

$$(33)\qquad (x_1)\cdots(x_n)(Ey)S_n^\psi(e, x_1, \cdots, x_n, y),$$

$$(34)\qquad (x_1)\cdots(x_n)(y)[S_n^\psi(e, x_1, \cdots, x_n, y) \to U(y) = \varphi(x_1, \cdots, x_n)].$$

我们可照前面那样继续下去; 但我们还将指出, 对 $\psi$ 的依赖性可以用一个特殊形式而给出.

$\psi$ 的串值函数 $\tilde{\psi}(y)$ $\left(=\prod_{i<y} p_i^{\psi(i)}, §46\ (1)\right)$ 是原始递归于 $\psi$ 的(§44, §45 ##A, B, 3, 18).

应用 § 46(2), 因 $u_1<y$, 可把 Df 12* 句 0 中的 $\psi(u_1)$ 写为 $(\tilde{\psi}(y))_{u_1}$, 甚至可写为 $(\tilde{\psi}(v))_{u_1}$ 对任意 $v \geqslant y$. 设当我们把 Df 12* 句 0 中的 $\psi(u_1)$ 写为 $(w)_{u_1}$ 后, 谓词 $D^\psi(z, y)$ 变成 $D^1(w, z, y)$, 这时 $D^1(w, z, y)$ 是原始递归的; 再就 $y$ 而作串值归纳(就 $D^1$ 及 $D^\psi$ 的递归定义中的四句而分别情形, 参见 § 52), 可知

$$(35)\qquad (v)_{v\geqslant y}[D^1(\tilde{\psi}(v), z, y) \equiv D^\psi(z, y)].$$

若在 Df 13* 中把 $D^\psi(x, y)$ 改为 $D^1(w, x, y)$, 我们得到一个原始递归谓词 $S_n^1(w, z, x_1, \cdots, x_n, y)$ 使得

$$(36)\qquad (v)_{v\geqslant y}[S_n^1(\tilde{\psi}(v), z, x_1, \cdots, x_n, y) \equiv S_n^\psi(z, x_1, \cdots, x_n, y)].$$

再用下法定义 $T_n^1$ 及 $T_n^\psi$,

$$T_n^1(w, z, x_1, \cdots, x_n, y) \equiv S_n^1(w, z, x_1, \cdots, x_n, y) \,\&\, (t)_{t<y}\overline{S_n^1}(w, z, x_1, \cdots, x_n, t),$$

$$T_n^\psi(z, x_1, \cdots, x_n, y) \equiv T_n^1(\tilde{\psi}(y), z, x_1, \cdots, x_n, y).$$

那末 $T_n^1$ 是原始递归的而 $T_n^\psi$ 是原始递归于 $\psi$ 的. 应用(36), 先把 $v$, $y$ 改为 $y$, $y$, 再把 $v$, $y$ 改为 $y$, $t$ 可得

(37) $$T_n^\psi(z_1, x_1, \cdots, x_n, y) \equiv S_n^\psi(z, x_1, \cdots, x_n, y) \& (t)_{t<y} \bar{S}_n^\psi(z, x_1, \cdots, x_n, t).$$

正和以前由(26)(27)及 $T_n$ 的定义而进行(§ 57(4)以前)那样,现在我们亦可由(33)(34)及(37)而进行了.

直觉主义地说, 我们的结论必须理解为下列假设的后承: 只要需要, $\psi$ 的各个值都是可以得到的. 由这个假设才可得出下列的表示方式: 把一个给定值 $\psi(u_1)$ 表成 $(\tilde{\psi}(v))_{u_1}$ (当 $v > u_1$ 时), 因后者需要 $\psi(0), \cdots, \psi(v-1)$ 诸值; 又由这个假设才能对一个给定的 $y$ 而有

$$(t)_{t<y}[S_n^\psi(z, x_1, \cdots, x_n, t) \vee \bar{S}_n^\psi(z, x_1, \cdots, x_n, t)]$$

这要求知道 $\psi(0), \cdots, \psi(y-1)$ 诸值(参见(5)的证明).

§ 57 中定理 IV 以后的结果亦可同样推广.

至于任意 $l$ 个分别为 $m_1, \cdots, m_l$ 元函数的情形可以化归到 $l = m_1 = 1$ 的情形(只须取 $\psi_i^*(x) = \psi_i((x)_1, \cdots, (x)_{m_i})$, $\psi = p_1^{\psi_1^*} \cdot \cdots \cdot p_l^{\psi_l^*}$); 但直接处理也不难. 例如, 如果 $l = m_1 = 2$, $m_2 = 0$, 我们可定义 $\psi_1$ 的串值函数(对二元串值) $\tilde{\psi}_1$ 如下, $\tilde{\psi}_1(y, z) = \prod_{i<y} p_i \exp\left(\prod_{j<z} p_j \exp \psi_1(i, j)\right)$, 因此有 $\psi_1(s, t) = (\tilde{\psi}_1(y, z))_{s,t}$ 当 $s < y \& t < z$ 时. 再定义 $\tilde{\psi}_2 = \psi_2$. Df 12* 及 Df 13* 则依 $l = m_1 = 2$, $m_2 = 0$ 而表述; 我们依次引入谓词 $D^{\psi_1, \psi_2}$, $S_n^{\psi_1, \psi_2}$, $D^{2,0}$, $S_n^{2,0}$, $T_n^{2,0}$, 并令

$$T_n^{\psi_1, \psi_2}(z, x_1, \cdots, x_n, y)$$
$$\equiv T_n^{2,0}(\tilde{\psi}_1(y, y), \tilde{\psi}_2, z, x_1, \cdots, x_n, y).$$

在一般情形,我们得出一个原始递归的 $n + l + 2$ 元谓词 $T_n^{m_1, \cdots, m_l}$ 及一个 $n + 2$ 元谓词 $T_1^{\psi_1, \cdots, \psi_l}$, 后者原始递归于 $\psi_1, \cdots, \psi_l$.

当 $\Psi$ 为 $l$ 个函数及谓词列, 如果在 $\Psi$ 中把谓词(如果有的话)改为它的代表函数,把所得的作为 $\psi_1, \cdots, \psi_l$ (参见 § 55 末), 则上面的结果仍可适用;这时我们亦可把 $T_n^{\psi_1, \cdots, \psi_l}$ 写为 $T_n^\Psi$.

当 $l>0$ 时,'算术谓词'的定义中须在开始函数 $+$, $\cdot$ 之后补入函数 $\psi_1, \cdots, \psi_l$ (按结果得"算术于 $\psi_1, \cdots, \psi_l$ 的谓词"——译者),"初等谓词"(§ 57 定理 VII 前)中须把"一般递归"改为"一般递归于 $\Psi$". ('一致性'可照常定义;又,在我们的定理中,如果前提听给的关系是一致的时,则结果所得的关系亦是一致的.)

**定理 X** 设 $l, m_1, \cdots, m_l$ 为固定的自然数 $\geq 0$, $\Psi$ 为 $l$ 个分别为 $m_1, \cdots, m_l$ 元的函数或谓词. 当把定理 I, IV—IX 及系中的"一般递归""原始递归""算术""初等""$T_n$", "$V$", "$M$" 分别改为"一般递归于 $\Psi$" "原始递归于 $\Psi$" "算术于 $\Psi$" "初等于 $\Psi$" "$T_n^\Psi$" "$V^\Psi$" "$M^\Psi$" 时 ($U$ 与 $\nu$ 不改),各定理及系仍然成立.

我们征引这样推广的定理 I, IV—IX 时都加上星号.比如定理 IX* 便是: 对每个 $n \geq 0$: 任给一个一般递归于 $\Psi$ 的函数 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$, 都可找出一数 $e$ 使得

$$(38) \qquad (x_1)\cdots(x_n)(E_y)T_n^\Psi(e, x_1, \cdots x_n, y),$$

$$(39) \qquad \varphi(x_1, \cdots, x_n) = U(\mu y T_n^\Psi(e, x_1, \cdots, x_n, y)),$$

$$(40) \qquad (x_1)\cdots(x_n)(y)[T_n^\Psi(e, x_1, \cdots, x_n, y) \to U(y) = \varphi(x_1, \cdots, x_n)],$$

这里 $U(y)$ 是一个上面所定义的原始递归函数, $T_n^\Psi(z, x_1, \cdots, x_n, y)$ 是上面所定义的原始递归于 $\Psi$ 的谓词;例如,当 $l = m_1 = 1$ 时, $T_n^\Psi(z, x_1, \cdots, x_n, y) \equiv T_n^1(\tilde{\psi}(y), z, x_1, \cdots, x_n, y)$, 而 $T_n^1(w, z, x_1, \cdots, x_n, y)$ 是上面所定义的特殊原始递归谓词.

如果数 $e$ 使得 (38)(39)(因而 (40)) 成立, 则说数 $e$ 递归地由 $\Psi$ 而定义 $\varphi$, 或说它是由 $\Psi$ 到 $\varphi$ 的一个哥德尔数,或说它是泛函 $\varphi = \mathbf{F}(\Psi)$ 的一个哥德尔数. 如前,这概念亦可应用于以 $\varphi$ 为代表函数的谓词 $P$.

**系** (a) 凡一般递归于算术谓词 $\Psi$ 的谓词 $P$ 都是算术的. (仿此,如果 $P$ 一般递归于 $\Psi$, $\Theta$, 而 $\Psi$ 为算术的,则 $P$ 算术于 $\Theta$.) (b)* 定理 VIII 中的谓词 $M(a, k)$ 不能一般递归于任何算术谓词.

**(a) 的证明** 由定理 VI*(a), $P$ 可表成一量词之后跟以一个原始递归于 $\Psi$ 的谓词 $R$ 的形式. 应用定理 I* 系可得: (I) 谓词 $R$

可由数变元，0，$'$，+，·=以及谓词$\Psi$的代表函数$\psi_1, \cdots, \psi_l$使用谓词演算中的逻辑运算而表示. 根据定理 I* 与系的证明方法可知，在该表达式中，任何一个函数$\psi_1, \cdots, \psi_l$的出现都具下形"$\psi(a_1, \cdots, a_n) = w$". 而这样的部分可代以"$\{Q(a_1, \cdots, a_n) \& w = 0\} \vee \{\bar{Q}(a_1, \cdots, a_n) \& w = 1\}$"，这里$Q$是$\psi$所代表的谓词. 这样，我们又得：(II)$R$可由数变元，0，$'$，+，·=以及谓词$\Psi$本身使用谓词演算中的逻辑运算而表示. 既然$\Psi$是算术的，$R$因而$P$便是算术的了. 注意，根据 § 48 与 § 57 的定义，(I) 的成立便意指"$R$ 算术于 $\Psi$". 事实上，(I) 成立当且仅当 (II) 成立. 何故[1]?

在"初等谓词"的定义 (§ 57 定理 VII 前)之下，一般递归式只在逻辑运算之前使用. 系 (a) 的意义是，即使在各阶段中都允许使用一般递归式(即可与逻辑运算作各种穿插使用)，并不能得到更大的谓词类.

自然要问下问题，如果对定理 V 第二部分中的一定形式的谓词(参见定理 VII (d))而应用一般递归模式，会得到什么结果呢?

当使用原始递归运算时，两个$k$量词形式 ($k > 0$ 时)之间的区别便消失了. 例如，虽则$(Ex)T_1(a, a, x)$不能表成另一个 1 量词形式 $(x)R(a, x)$，但它的否定$\overline{(Ex)}T_1(a, a, x)$却原始递归于它 (§45 #D) 并取得该另一形式 (参见 § 35 *86). 对任何谓词$P(a)$言，它的代表函数 (§ 45) 的代表谓词$P(a, w)$ (§ 41) 都可表示为

(41) $$P(a, w) \equiv \{P(a) \& w = 0\} \vee \{\bar{P}(a) \& w = 1\}.$$

这是原始递归于$P(a)$的. 如果 $P(a) \equiv (Ex)T_1(a, a, x)$，则$P(a, w)$绝不能表成任何 1 量词形式：例如，试设$P(a, w) \equiv (x)R(a, w, x)$，则$(x)R(a, 0, x) \equiv P(a, 0) = P(a) \equiv (Ex)T_1(a, a, x)$，这与定理 V 矛盾，如果$R$是递归的话.

---

1) 从"(a) 的证明"的第二句起至此，乃根据原书第六版 (作为原书第 316 页的脚注)而译出旧版. 原文只是一句："但由定理 I* 系，$R$是算术于$\Psi$的，既然$\Psi$是算术的，$R$因而$P$便是算术的了"——译者注.

莫斯托夫斯基 [1948 a] 给出(古典地)一个谓词，它一般递归于1量词形式（根据下定理(b)），但不能由1量词形式的谓词以及命题演算的运算而表示.

下定理及系乃坡斯特所得，只见于摘要(坡斯特 [1948])，而本书作者还是在得出本结果(1949年)后才知道的.

**定理 XI^C** (a) 如果谓词 $P$ 一般递归于定理V中的 $k$ 量词形式的谓词 $Q_1, \cdots, Q_l$，则 $P$ 可表示为两个 $k+1$ 量词形式的每一个，(b) 逆理亦真.

如果把定理 VI(b) 的证明中的 $R, S$ 取作适当的量词形式，便得到本定理的(b). 至于(a)的证明可借助于下述两引理而得.

**引理 IV^C** 任何 $k$ 量词谓词的代表函数的代表谓词都可以表成以存在量词起首的 $k+1$ 量词的形式.

**引理 IV 的证明** 例如，设 $P(a) \equiv (x)(Ey)R(a, x, y)$ 而 $R$ 递归. 则有

$$\begin{aligned}
P(a, w) \equiv & \{(x)(Ey)R(a, x, y)\&w = 0\} \\
& \vee\{(\bar{x})(Ey)R(a, x, y)\&w = 1\} \qquad (\text{由 }(41)) \\
\equiv & \{(x_1)(Ey_1)R(a, x_1, y_1)\&w = 0\} \\
& \vee\{(Ex_2)(y_2)\bar{R}(a, x_2, y_2)\&w = 1\} (\text{参见 }*85, *86) \\
\equiv & (Ex_2)(x_1)(y_2)(Ey_1)[\{R(a, x_1, y_1)\&w = 0\} \\
& \vee\{\bar{R}(a, x_2, y_2)\&w = 1\}] \qquad (\text{参见 }*89\text{—}*92) \\
\equiv & (Ex)(y)(Ez)[\{R(a, (y)_0, z)\&w = 0\} \\
& \vee\{\bar{R}(a, x, (y)_1)\&w = 1\}] \qquad (\text{由 }(18)).
\end{aligned}$$

最后一个表达式便具 $(Ex)(y)(Ez)R(a, w, x, y, z)$ 形，而 $R$ 递归.(在这里及下一引理中亦可改以全称量词起首.).

**引理 V** 设 $\tilde{\phi}(a_1, \cdots, a_m)$ 为 $\phi(a_1, \cdots, a_m)$ 的串值函数. 如果 $\phi(a_1, \cdots, a_m)$ 的代表谓词可表成以存在量词起首的 $k+1$ 量词形式，则 $\tilde{\phi}(a_1, \cdots, a_m)$ 的代表谓词亦然.

**引理 V 的证明** 例如，设 $m = k = 1$. 由假设，$\phi(a) = w \equiv (Ex)(y)Q(a, w, x, y)$ 而 $Q$ 递归. 则有

$$\tilde{\phi}(a) = w \equiv w = \prod_{i<a} p_i^{(w)_i} \& (i)_{i<a} \phi(i) = (w)_i$$

$$\equiv w = \prod_{i<a} p_i^{(w)_i} \& (i)_{i<a} (Ex)(y) Q(i, (w)_i, x, y)$$

$$\equiv w = \prod_{i<a} p_i^{(w)_i} \& (Ex)(y)(i)_{i<a} Q(i, (w)_i, (x)_i, y)$$

（§57 附注 1）

$$\equiv (Ex)(y) \left\{ w = \prod_{i<a} p_i^{(w)_i} \& (i)_{i<a} Q(i, (w)_i, (x)_i, y) \right.$$

（参见 *91，*89）.

最后一表达式便呈 $(Ex)(y)R(a, w, x, y)$ 形而 $R$ 递归.

**定理 XI 的证明** 例如,取 $l = m = k = 1$. $P$ 一般递归于 $Q$ 的假设意指（§ 55）$P$ 一般递归于 $Q$ 的代表函数 $\phi$. 由引理 IV, V 得 $\tilde{\phi}(a) = w \equiv (Ex)(y) R(a, w, x, y)$ 而 $R$ 递归. 我们先证 $P(a)$ 可表成以全称量词起首的 2 量词形式. 应用定理 VI* (a) 以及由定理 IV* (7) 而证明它的方法,便得

$$\begin{aligned}
P(a) &\equiv (t)\overline{T}_1^1(\tilde{\phi}(t), g, a, t) \\
&\equiv (t)(s)[\tilde{\phi}(t) = s \to \overline{T}_1^1(s, g, a, t)] \\
&\equiv (t)(s)[(Ex)(y)R(t, s, x, y) \to \overline{T}_1^1(s, g, a, t)] \\
&\equiv (t)(s)(x)(Ey)[R(t, s, x, y) \\
&\qquad \to \overline{T}_1^1(s, g, a, t)] \qquad \text{（参见 *96，*98）} \\
&\equiv (x)(Ey)[R((x)_0, (x)_1, (x)_2, y) \\
&\qquad \to \overline{T}_1^1((x)_1, g, a, (x)_0)] \qquad \text{（由 (18)），}
\end{aligned}$$

这便是所求的形式. 要把 $P(a)$ 表成另一个 2 量词形式,可用定理 IV* (6), 得

$P(a) \equiv (Et)\, T_1^1(\tilde{\phi}(t), f, a, t) \equiv (Et)(Es)[\tilde{\phi}(t) = s \& T_1^1(s, f, a, t)]$, 等等.

**系**[c] 对每个 $k+1$ 量词形式而言,定理 V(b) 中的量词如果可表成另一 $k+1$ 量词形式而不能表成该 $k+1$ 量词的本身，则绝不能一般递归于只具 $k$ 个量词或更少量词的谓词.

如果对定理 V(b) 中各形式而把"一般递归性"改为"一般递归

于 $\Psi$"，便得到定理 XI*（及其系）.

## *§ 59. 一般递归函数及数论形式体系

在本节中所引用的"(i)"—"(vii)" 都是指 § 41 中的.

我们说，一数论谓词 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 是在一形式体系中可解决的（或可判定的），如果有一个数字地可判定公式 $\mathrm{P}(x_1, \cdots, x_n)$（参见 (iv)），除不同变元 $x_1, \cdots, x_n$ 以外无其它自由变元，而且对于任何自然数 $n$ 元矢 $x_1, \cdots, x_n$ 都有

(viii) $$P(x_1, \cdots, x_n) \equiv \vdash \mathrm{P}(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n).$$

在这时，$\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n)$ 解决了 $P(x_1, \cdots, x_n)$（当对形式变元与直觉变元作了明显的对应时）.

一数论函数在一形式体系内是可表象的（或可计算的）[1]，如果有一公式 $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w})$，除不同变元 $x_1, \cdots, x_n$，w 以外没有其它自由变元，而且对每个 $x_1, \cdots, x_n, w$ 都有

(ix) $$\varphi(x_1, \cdots, x_n) = w \equiv \vdash \mathrm{P}(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n, \mathbf{w}).$$

在这时，$\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w})$ 表象了 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$.

**定理 32** 命 $S$ 为第四章内的数论形式体系（或 § 49 引理 18b 中所描述的罗宾孙系统）. 如果 $S$ 是简单相容的，则: $\{\varphi$ 是一般递归的$\} \equiv \{\varphi$ 在 $S$ 内是可数字地代表的$\} \equiv \{\varphi$ 在 $S$ 内是可表象的$\}$.

**证明** 我们证明三个蕴涵式.

(a) 如果 $\varphi$ 是一般递归的，则 $\varphi$ 在 $S$ 内是可数字地代表的.

由 § 58 定理 IX，有一数 $e$ 使 (29) 及 (30) 成立.

若应用 (29) 及在 § 57 定理 IV 前的 $T_n$ 的定义，则有

(42) $$\mu y T_n(e, x_1, \cdots, x_n, y) = w \equiv S_n(e, x_1, \cdots, x_n, w) \,\&\, (z)_{z<w}\overline{S}_n(e, x_1, \cdots, x_n, z).$$

因为 $S_n(z, x_1, \cdots, x_n, w)$ 是原始递归的，故由 § 49 定理 27 系，

1) "可表象的"原文为 reckonable，本与"可计算的"（calculable）同义，今从俄译本把 reckonable 改译为"可表象的"——译者注.

它可由公式 $S(z, x_1, \cdots, x_n, w)$ 所数字地表示. 我们将证明, 下公式(暂称为"$M(x_1, \cdots, x_n, w)$"), 即

$$S(\mathbf{e}, x_1, \cdots, x_n, w) \& \forall z(z < w \supset \neg S(e, x_1, \cdots, x_n, z)),$$

数字地表示了函数 $\mu y T_n(e, x_1, \cdots, x_n, y)$. 设 $x_1, \cdots, x_n$ 为任何固定的 $n$ 元矢. 要对M而证明 (v), 可设 $\mu y T_n(e, x_1, \cdots, x_n, y) = w$. 再用 (42), § 41 的 (E) (C) 以及对 S 的 (i) 与 (ii) 可得 $\vdash M(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n, \mathbf{w})$. 这样我们便对M而有 (v). 但由 *174a (把**w**作为 t) 我们亦得 (vi). 因此 $\mu y T_n(e, x_1, \cdots, x_n, y)$ 是数字地可代表的.

因为 $U(y)$ 是原始递归的, 由定理 27, 它是数字地可代表的.

在定理 27 的证明中曾就情形 (IV) 而作推理, 由该推理可知复合函数 $U(\mu y T_n(e, x_1, \cdots, x_n, y))$ 即 (由 (30)) $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 是数字地可代表的.

在这证明中,除却用到谓词演算,公理 14—21, 相等关系的可替换性以及在获得定理 27 时所使用的结果外,我们只用到 (E) 及 *174a (把数字 **w** 作为 t). 因此应用 § 41 引理 18a 及 § 49 的 18 b, 可见蕴涵式 (a) 对罗宾孙形式体系亦是成立的.

(b) 如果 $S$ 是简单相容的, $\varphi$ 在 $S$ 内是数字地可代表的, 则 $\varphi$ 在 $S$ 内是可表象的 (并且任何数字地代表 $\varphi$ 的公式P都表象 $\varphi$ (因此由 § 41, 它是数字地可判定的)).

试考虑任何固定的 $x_1, \cdots, x_n$. 由假设, 我们有 (v). 要证明其逆, 假设 $\vdash P(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n, \mathbf{w})$. 我们有 $\varphi(x_1, \cdots, x_n) = w \vee \varphi(x_1, \cdots, x_n) \neq w$ (参见 § 40* 158). 故若有 $\varphi(x_1, \cdots, x_n) \neq w$, 则由 (vii) 便与简单的相容性相矛盾.

(c) 如果 $\varphi$ 在 $S$ 内是可表象的, 则 $\varphi$ 是一般递归的.

假设 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 被公式 $P(x_1, \cdots, x_n, w)$ 所表象. 当 $S$ 为完全数论系统时: 设在哥德尔编号下, 与 $\mathfrak{Pf}_P$ 相应的原始递归谓词为 $Pf_P$ (参见 § 51 Dn13a, §52 引理 19 或 § 52 定理 31). 当 $S$ 为罗宾孙系统时 (引理 18 b), 我们必须先对 Dn8 作适当的更改. 今有 $(x_1) \cdots (x_n)(Ey) Pf_P(x_1, \cdots, x_n, (y)_0, (y)_1)$ 及 $\varphi(x_1, \cdots,$

$x_n) = (\mu y Pf_{\mathrm{P}}(x_1, \cdots, x_n, (y)_0, (y)_1))_0$. 故由§57定理III，$\varphi$是一般递归的.

**系** 在定理的假设下，如果 $(x_1)\cdots(x_n)[P(x_1, \cdots, x_n) \vee \overline{P}(x_1, \cdots, x_n)]$，则有：$\{P$是一般递归的$\} \equiv \{P$在$S$内是数字地可表示的$\} \equiv \{P$在$S$内是可解决的$\}$.

**证明** 设$\varphi$为$P$的代表函数. 我们证明四个蕴涵式，

$\{P$是一般递归的$\} \underset{(d)}{\longrightarrow} \{\varphi$在$S$内是数字地可代表的$\} \underset{(e)}{\longrightarrow} \{P$在$S$内是数字地可表示的$\}$

$\underset{(f)}{\longrightarrow} \{P$在$S$内是可解决的(任何一个数字地表示$P$的公式P都解决了$P$)$\}$

$\underset{(g)}{\longrightarrow} \{P$是一般递归的$\}$,

其中$S$的简单相容性是(f)(g)的补充假设，对(f)更须加入$(x_1)\cdots(x_n)[P(x_1, \cdots, x_n) \vee \overline{P}(x_1, \cdots, x_n)]$(以使(f)的证明能够直觉主义地有效).

(d) 由(a)及一般递归谓词的定义得证.

(e) 和§49定理27系的证明同.

(f) 如§41中那样我们得到(iv). 由假设得(i). 要证明其逆，可假设$\vdash \mathrm{P}(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)$. 但我们有$P(x_1, \cdots, x_n) \vee \overline{P}(x_1, \cdots, x_n)$. 如果$\overline{P}(x_1, \cdots, x_n)$，则用(ii)便和简单相容性相矛盾了.

(g) 今假设公式$\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n)$解决了$P(x_1, \cdots, x_n)$. 和(c)相似可得：

$(x_1)\cdots(x_n)(Ey)[Pf_{\mathrm{P}}(x_1, \cdots, x_n, y) > Pf_{\neg\mathrm{P}}(x_1, \cdots, x_n, y)]$(因P是数字地可判定的)以及

$P(x_1, \cdots, x_n) \equiv Pf_{\mathrm{P}}(x_1, \cdots, x_n, \mu y[Pf_{\mathrm{P}}(x_1, \cdots, x_n, y) \vee Pf_{\neg\mathrm{P}}(x_1, \cdots, x_n, y)])$(应用(viii)及$S$的简单相容性). (如果$(Ex_1)\cdots(Ex_n)\overline{P}(x_1, \cdots, x_n)$则(viii)蕴涵了$S$的简单相容性.)

如果$S$是简单相容的，且包含有通常的数论并且$(\mathrm{R}_1)$原始递归谓词在$S$内是可解决的(参见定理27系)，$(\mathrm{R}_2)$谓词$Pf_{\mathrm{A}}$是原始递归的(参见Dn13及引理19)，则对$S$而言，可表象性(可解决性)

和一般递归性是等价的，这已由莫斯托夫斯基[1947]证明了．其它的文献将在§62内给出．参见R.罗宾孙[1950]（摘要）．

设$\Psi$为分别为$m_1, \cdots, m_l$元的函数$\psi_1, \cdots, \psi_l$作成的表．试选取不同谓词字母$Q_1, \cdots, Q_l$，并把它们加到$S$的形式符号的总集内．再把$S$中公式的定义推广，使得对每个$j(j=1, \cdots, l)$及对所有各项$t_1, \cdots, t_{m_j}$，t言，$Q_j(t_1, \cdots, t_{m_j}, t)$都是公式．设$F^{\psi_1 \cdots \psi_l}_{Q_1 \cdots Q_l}$为下列公式的集，$Q_j(\mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_{m_j}, \mathbf{y}) \& \forall z(Q_j(\mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_{m_j}, z) \supset \mathbf{y}=z)$，这里对$j=1, \cdots, l$及一切自然数$m_j$元矢$y_1, \cdots, y_{m_j}$而言，都有$\psi_j(y_1, \cdots, y_{m_j})=y$．设在上述各定义中，把"$\vdash$"改为"$F^{\psi_1 \cdots \psi_l}_{Q_1 \cdots Q_l}\vdash$"（语言上是，把"可证的"改为"可由$F^{\psi_1 \cdots \psi_l}_{Q_1 \cdots Q_l}$推演的"），我们便得到下列各概念：简单相容（数字地可判定，数字地可表示，数字地可代表，可解决，可表象）于$\Psi$．在定理27，31，32及系中（包括(a)—(g)），若改用这些概念以及"$F^{\psi_1 \cdots \psi_l}_{Q_1 \cdots Q_l}\vdash$"，"原始递归于$\Psi$""一般递归于$\Psi$"（用以代替相应的原来观念），结果仍然成立．（又$P$是一致地数字地可表示于$\Psi$，如果可以与$\Psi$无关地给出一个公式P，它对所考虑的$\Psi$的每个选择都数字地由$\Psi$而表示$P$；对数字地可代表性，可解决性，可表象性等仿此．当各个有关于$P$或$\varphi$的相对于$\Psi$的概念全都理解为一致性时，各定理亦成立．）

等价地，我们亦可改用下法，选择不同的函数字母$g_1, \cdots, g_l$，把项的定义推广使得当$t_1, \cdots, t_{m_j}$为项时$g_j(t_1, \cdots, t_{m_j})$亦为项，并在前述各定义中把"$\vdash$"改为"$E^{\psi_1 \cdots \psi_l}_{g_1 \cdots g_l}\vdash$"．

如果我们容许$\Psi$包括有谓词，则可采取下列二法之一进行，当$\Psi$中第$i$个是谓词$Q_i$时取$Q_i$的代表函数作为$\psi_i$；或者用另一法，对每个这样的$i$我们都引入一个具有$m_i$个变目的谓词字母$Q_i$，并对这个$i$以及任意给定的$m_i$元矢$y_1, \cdots, y_{m_j}$言，我们取$Q_i(\mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_{m_j})$或$\neg Q_i(\mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_{m_j})$作为假定公式，视$Q_i(y_1, \cdots, y_{m_j})$或$\overline{Q}_i(y_1, \cdots, y_{m_j})$中那一个成立而定．

## § 60. 邱吉定理,广义哥德尔定理

现在我们便来最后地解答下述问题，非形式数学是否可以形式化（§ 15）．由哥德尔定理（§ 42），我们知道第四章的特殊形式系统并没有完备地把直觉数论形式化．

在非形式数论内我们考虑一些依赖于参数的命题．当这些参数取自然数以为值时便产生了无穷多个特殊的命题．对这种情况，我们说，这些命题是这些谓词的值．一般地，我们需同时考虑好些谓词．但是我们试考虑对其中之一的形式化，例如对一元谓词 $P(x)$ 的形式化．

上面几章的形式数论系统便是一个例子，可以说明如何进行形式化．我们暂且对那些细节不管，只是很大略地考虑，如果要达到这个目的，一形式体系必须有些什么．

这形式体系必须有一个‘形式客体’域．如果这体系要作为 $P(x)$ 的理论的形式化的话，它还必须要有特殊的不同形式客体使得可用以表示命题 $P(0), P(1), P(2), \cdots$，即当 $x = 0, 1, 2, \cdots$ 时的 $P(x)$．为方便起见，可把这些形式客体记为“A(0)”，“A(1)”，“A(2)”，$\cdots$，即当 $x = 0, 1, 2, \cdots$ 时的“A ($\mathbf{x}$)”；并把“A ($\mathbf{x}$)”叫做‘表示 $P(x)$ 的公式’．我们这样做并没有对下列各问题作了什么假设：有没有数字 $\mathbf{x}$，有没有变元 x，有没有公式 A(x)（把它的 x 代以 $\mathbf{x}$ 后便得到 A($\mathbf{x}$) 的）．

其次，又必须有一种形式客体叫做‘证明’．每种证明都必须是某个特殊形式客体‘的’证明，这形式客体可以是亦可以不是相应于一个给定的自然数 $x$ 的那个客体 A($\mathbf{x}$)．命“$\Re(x, Y)$”表示下列的元数学命题：Y 是 A($\mathbf{x}$) 的一个证明．如果有一个关于客体 A($\mathbf{x}$) 的证明，A($\mathbf{x}$) 便说是‘可证的’．设以‘$\vdash$A($\mathbf{x}$)’表示下命题，A($\mathbf{x}$) 是可证的，即

$$(43) \qquad (EY)\Re(x, Y) \equiv \vdash A(\mathbf{x}).$$

谓词 $\Re(x, Y)$ 的本性是什么呢？我们把一理论加以形式化，

目的在于使下列的条件可以明显起来，即在该理论决定一命题所以成立(其意是一命题是可证的)的条件(§15)，简言之，可以给出关于证明的一个明显的定义．就谓词 $P(x)$ 由公式 $A(\mathbf{x})$ 而表示的这种理论来说，只当得到下列情况才算达到目的，即有一个预先给定的过程，借助于它，无需要求任何数学上的发明，我们都可以对于任意预先给出的 $x$ 以及形式客体 Y 而能够说出 Y 是否相应于该 $x$ 的 $A(\mathbf{x})$ 的证明．即是说，对于 $\mathfrak{R}(x, Y)$ 是否成立的问题必须有一个判定过程或算法(§30)．这时，我们亦说 $\mathfrak{R}(x, Y)$ 必须是一个“能行地可判定”[1]的元数学谓词．

我们并没有要求形式客体域的结构该是哪一种．但是每个形式客体 Y 必须是可以作为有穷客体而给出的，不然的话，所谓 $\mathfrak{R}(x, Y)$ 的判定过程便没有意义了．这可以意指，Y 由下列方法而产生，从有限个开始客体出发，经过有限次应用可认识的运算而作成，正如在一般算术的概念中那样(§50)；或者每个 Y 必须是一些图象，由一个预先指定的符号表中一些符号的有限次出现而组成的．用熟知的方法(§1, §50, §52)我们可以对形式客体作能行的枚举，或更方便些，作出其哥德尔编号，即在形式客体与自然数的子集之间作 1-1 对应．所谓能行性是指，任给一形式客体 Y 我们可以找出其相应的数 $y$，反之，任给一自然数 $y$，我们可以决定它是否相应于一形式客体，如果是，则找出该客体 Y．因此，我们可把能行地可判定的元数学谓词 $\mathfrak{R}(x, Y)$ 对应于一个能行地可判定的数论谓词 $R(x, y)$，使得 $R(x,y) \equiv \{y$ 是使得 $\mathfrak{R}(x, Y)$ 成立的 Y 所对应的自然数$\}$．因此有 $(EY)\mathfrak{R}(x, Y) \equiv (Ey) R(x, y)$；又由(43)得

$$(44) \qquad (Ey)R(x, y) \equiv \vdash A(\mathbf{x}).$$

要满足能行地可判定条件，$R(x, y)$ 须是那一种数论谓词呢？就第四章的形式系统以及该系统内任何公式 $A(\mathbf{a})$ 言，谓词 $R(x, y)$(依哥德尔编号，它相应于‘Y 是 $A(\mathbf{x})$ 的证明’)是原始递归的，

1) “能行”原文为 effective，也可译“有效”．但我们用“有效”一语作为 “valid” 的译名，故对 effective 专用“能行”一名——译者注．

正如证明 §52 定理 31 时所指出的那样.

任何一般递归谓词都是能行地可判定的. 因为任何一般递归函数 $\varphi$ 都是能行地可计算的. 任何一个递归地定义 $\varphi$ 的方程系 E, 都有一个过程用以找出变目为 $x_1, \cdots, x_n$ 时 $\varphi$ 的值,只须把 E 中的方程加以推演直到找出一方程 $f(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{x}$ 时为止,它便表示所求的值为 $x$. 根据'一般递归函数'(§55) 及 'E 递归地定义 $\varphi$' 的定义 (§54), 这个方程系 E 经常存在, 而这样的一个方程亦一定可以推演出的. (如考虑 §58 定理 IX (29) 及 (30) 或定理 IX 系,我们亦可看见 $\varphi$ 是能行地可计算的.) 因此, 如果 $R$ 是一般递归谓词, 我们可以计算当已给出变目 $x_1, \cdots, x_n$ 时其代表函数的值, 并根据它的值为 0 或 1 而决定对这些变目言该谓词是真或假.

这命题的逆定理看来好象也是真的. 已承认为能行地可计算(能行地可判定)的函数(谓词)的每一例子, 一经探究都是一般递归的. 这个由利的(heuristic)明证以及其它的考虑使得邱吉 [1936] 提出下列的论点.

**论点 I** 每个能行地可计算的函数(能行地可计算的谓词) 都是一般递归的.

这个论点亦蕴涵于杜令 (Turing) [1936—7] 及坡斯特 [1936] 所表述的计算机器的概念中. 我们将在后两章内讨论本论点的明证问题,现在我们只讨论它的含义.

本论点及其逆理立刻对自然数函数(谓词)的计算(判定)过程或算法这个概念供给了一个精确的定义, 而在 § 30 处我们还没有办法作出的. 因此对一谓词 $P(x)$ 而给出判定过程便意指给出一个一般递归谓词 $R(x)$ 使得 $P(x) \equiv R(x)$. 由 §57 定理 V(14) 及 (15) 我们有下列的定理, 它先由邱吉 [1936] 所提出,而他所用的是另外一个"不可解决的"判定问题的例子.

**定理 XII** 谓词 $(y)\overline{T}_1(x, x, y)$ 或 $(Ey)T_1(x, x, y)$ 都没有判定过程(或算法).

由本节第一部分的考虑, 再应用论点 I 于 (44) 中的 $R$, 我们

便得到第二论点.

**论点II** 在一给定的形式系统 $S$ 中,如果一谓词 $P(x)$ 的值由不同的公式 $\mathrm{A}(\mathbf{x})(x=0,1,2,\cdots)$ 所表示,则谓词'$\mathrm{A}(x)$ 在 $S$ 内是可证的'便可表成下形:$(Ey)R(x,y)$,而 $R$ 一般递归,即有一个一般递归谓词 $R$ 使得(44)成立.(对 $n$ 元谓词 $P(x_1,\cdots,x_n)$ 仿此.)

**附注1** 这里我们只对我们发生兴趣的公式 $\mathrm{A}(\mathbf{x})$ 而立论.如果我们注意到别的公式,而该系统又满足我们通常关于系统的概念,那么我们还可分析得更深些.设"$\mathfrak{P}(\mathrm{A},\mathrm{Y})$"表示"Y是A的证明",作为关于任意两个客体A,Y的谓词.谓词 $\mathfrak{P}(\mathrm{A},\mathrm{Y})$ 将是能行地可判定的,$\mathrm{A}(\mathbf{x})$ 将是 $x$ 的一个能行地可计算的函数,并将有 $\mathfrak{R}(x,\mathrm{Y})\equiv\mathfrak{P}(\mathrm{A}(\mathbf{x}),\mathrm{Y})$,由此并可看出 $\mathfrak{R}(x,\mathrm{Y})$ 的能行地可判定性.设对形式客体作了能行的哥德尔编号,并设"$\mathrm{A}_a$"表示以 $a$ 为哥德尔数的客体(如果有的话);并令"$\vdash\mathrm{A}_a$"表示这客体是一个可证公式(当 $a$ 非哥德尔数时,"$\vdash\mathrm{A}_a$"将定义为假).又以 $P(a,y)$ 对应于 $\mathfrak{P}(\mathrm{A},\mathrm{Y})$.再用论点I便得:(a)有一个一般递归谓词 $P$ 使得 $(Ey)P(a,y)\equiv\vdash\mathrm{A}_a$.(b)$\mathrm{A}(\mathbf{x})$ 的哥德尔数 $\alpha(x)$ 是 $x$ 的一般递归函数.再令 $R(x,y)\equiv P(\alpha(x),y)$,便得论点II.

一形式系统 $S$ 要能把一谓词 $P$ 的理论形式化,且能把 $x=0$,$1,2,\cdots$时的命题 $P(x)$ 分别表以公式 $\mathrm{A}(\mathbf{x})$,则论点II所表述的是结构上一个(最小的)要求.正如论点I的情形一样,其逆亦是成立的(如下所述).

还须叙述对 $S$ 所作的有关于公式 $\mathrm{A}(\mathbf{x})$ 及它想表示的命题 $P(x)$ 的可证性的条件.一个形式体系化要想对 $P(x)$ 言是正确的(或相容的),那便须要求

$$\vdash\mathrm{A}(\mathbf{x})\to P(x), \tag{45}$$

即如果 $\mathrm{A}(\mathbf{x})$ 在 $S$ 内可证,必须 $P(x)$ 为真.如果系统 $S$ 还要成为该谓词的理论的完备的形式体系化,我们还要求其逆,即 $P(x)\to\vdash\mathrm{A}(\mathbf{x})$,即只要 $P(x)$ 为真,$\mathrm{A}(\mathbf{x})$ 便是可证的.将这与(45)合并可得,当 $S$ 对 $P(x)$ 既正确又完备时有

(46) $$\vdash A(\mathbf{x}) \equiv P(x).$$

再将这个与论点II中的结构方面的要求相合并：要对谓词$P(x)$而给出一个正确的形式系统，在于找出一个一般递归谓词$R$使得

(47) $$(Ey)R(x,y) \to P(x);$$

要使得它又是完备的，那便要

(48) $$(Ey)R(x,y) \equiv P(x).$$

今设$P(x)$便是谓词$(y)\overline{T}_1(x, x, y)$. 则没有一般递归的$R$使得(48)对任何x都成立；因由定理V (12)，给出任何一个一般递归的$R$，都有一数$f$使得(48)对$x = f$不成立．因此，

**定理XIII**(第一部分) 对谓词$(y)\overline{T}_1(x, x, y)$言，没有正确的且完备的形式体系．(广义哥德尔定理．克林[1943].)

若想把情形更考查得详细些，可考虑任一形式体系$S$，在$S$内选取公式$A(\mathbf{x})$以表示当$x = 0, 1, 2, \cdots$时的$(y)\overline{T}_1(x, x, y)$. 设$R$为一般递归谓词使得(44)成立的(这是论点II所给出的)；并对这个$R$而考虑(9)的$f$. 今设$S$对$(y)\overline{T}_1(x, x, y)$是正确的；则由(45)得

(49) $$\vdash A(\mathbf{x}) \to (y)\overline{T}_1(x, x, y).$$

根据§35 *86，(9)及(14)的非形式意义得

(50) $$(y)\overline{T}_1(f, f, y) \equiv (\overline{Ey})T_1(f, f, y) \equiv (\overline{Ey})R(f, y) \equiv \overline{\vdash A(\mathbf{f})}.$$

今假设$\vdash A(\mathbf{f})$. 由(49)得$(y)\overline{T}_1(f, f, y)$；由(50)得$\overline{\vdash A(\mathbf{f})}$. 根据反证法得$\overline{\vdash A(\mathbf{f})}$；再由(50)得$(y)\overline{T}_1(f, f, y)$. 故

**定理XIII**(第二部分) 在特例，设$S$为一形式系统，并指定以$A(\mathbf{x})$表示命题$(y)\overline{T}_1(x, x, y)$，当$x = 0, 1, 2, \cdots$时．这时可找出一数$f$使得：如果$S$对$(y)\overline{T}_1(x, x, y)$是正确的，则$(y)\overline{T}_1(f, f, y) \& \overline{\vdash A(\mathbf{f})}$，即命题$(y)\overline{T}_1(f, f, y)$是真的，但表示它的公式$A(\mathbf{f})$却是不可证的．

因此，可以预先给出一直觉谓词，即$(y)\overline{T}_1(x, x, y)$，在表示其值的那些命题中，要把其中为真的(亦只为真的)命题证出来，没

有一个形式系统是完备的．关于这系统，我们没有作出任何假设，除却下列两个要求外：它满足论点 II 所表示的结构要求，以及该系统只给出当把 A(**x**) 释义为表示谓词 $(y)\bar{T}_1(x, x, y)$ 的值时正确的结果．

这些假设是由我们已经研究过的特殊形式系统而作的一个非常深远的抽象．在那些系统中，所谓证明本是一系列公设的应用．我们有理由相信，单独说来每一条公设是正确的，因此亦可相信整个理论是正确的．现在我们看见了，哥德尔的不完备性并不依赖于这种直观明证的特性．

要强调这点，试设想有一个无所不知的数论家．我们期望，他既有能力能够把无穷多个事实一眼看出，他便能够认出，我们自己不能发现的某些推演原则是正确的．但他所能给我们的任何关于 $(y)\bar{T}_1(x, x, y)$ 的正确形式系统，即使只对我们告诉其然而不告诉其所以然，却仍然是不完备的．

要理解命题 $(y)\bar{T}_1(x, x, y)$ 的意义，只要求一个特殊的能行地可计算谓词(的确，这谓词还是原始递归的)以及可构造性地[1]使用的全称量词便成了．如果容许任何的数学上的无穷大，更少的概念方面的要求是很难办到的．

在元理论的水平上使用谓词 $(y)\bar{T}_1(x, x, y)$ 时，尽管它对我们是有意义的，我们并没有假设它的每个值都或真或假．根据有穷性推理所能作的关于这谓词的结论，与论点 II 合并起来，已很足够排除下列的可能性，有一个对它既正确又完备的形式系统．

这里我们是把作为一个关于谓词 $(y)\bar{T}_1(x, x, y)$ 的现存直觉理论的形式化的(正确的)形式体系而处理其不完备性的．但因为这个释义是用有穷性方式处理的，所以广义上说来，这定理亦可算作是元数学的．

如果该形式系统有通常的构成性质及推演性质，则这定理亦可以元数学地(狭义地)表述，这时公式 A(**x**) 的释义，即作为表示

1) “可构造性地”指“直觉主义地”——俄译注．

谓词 $(y)\bar{T}_1(x, x, y)$ 的值的，便可换为该系统的内在特性如相容性及完备性等；例如，简单地如下：

**定理 XIII**（第三部分） 设 $S$ 为一形式系统，具有不同的公式 $T(\mathbf{x}, \mathbf{y})$，$\neg T(\mathbf{x}, \mathbf{y})$，$A(\mathbf{x})$（亦写为"$\forall y \neg T(\mathbf{x}, y)$"）及 $\neg A(\mathbf{x})$（亦写为"$\neg \forall y \neg T(\mathbf{x}, y)$"）$(x, y = 0, 1, 2, \cdots)$. 假设 (A) $T_1(x, x, y) \to \vdash T(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 及 $\bar{T}_1(x, x, y) \to \vdash \neg T(\mathbf{x}, \mathbf{y})$，(B) $\vdash \forall y \neg T(\mathbf{x}, y) \to (y)\{\vdash \neg T(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}$，(c) 有一个一般递归的 $R$ 使 (44) 成立. 则可找出一数 $f$ 使得：如果 $S$ 是简单相容的，即如果没有 $x, y$ 使得既 $\vdash T(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 又 $\vdash \neg T(\mathbf{x}, \mathbf{y})$，则有 $\overline{\vdash A(\mathbf{f})}$. 如果 $S$ 又是 $\omega$ 相容的，即没有 $x$ 使既 $(y)\{\vdash \neg T(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}$ 又 $\vdash \neg \forall y \neg T(\mathbf{x}, y)$，则 $\overline{\vdash \neg A(\mathbf{f})}$. 因此如果 $S$ 是简单相容的且 $\omega$ 相容的，则它是简单不完备的，即对某 $x$ 既没有 $\vdash A(\mathbf{x})$ 又没有 $\vdash \neg A(\mathbf{x})$.

**证明** 设 $S$ 是简单相容的，又设（为反证法故）$\vdash A(\mathbf{f})$. 则由 (44) 有 $(Ey)R(x, y)$；由 (9) 有 $(Ey)T_1(f, f, y)$；由 (A) 有 $y$ 使得 $\vdash T(\mathbf{f}, \mathbf{y})$. 但由 $\vdash A(\mathbf{f})$ 及 (B)，对这个 $y$ 又得 $\vdash \neg T(\mathbf{f}, \mathbf{y})$，与简单相容性相矛盾. 由反证法得 $\overline{\vdash A(\mathbf{f})}$. 再假设 $S$ 是 $\omega$ 相容的，由 $\overline{\vdash A(\mathbf{f})}$ 及 (50) 得 $(y)\ \bar{T}_1(f, f, y)$；由 (A) 得 $(y)\{\vdash \neg T(\mathbf{f}, \mathbf{y})\}$；由 $\omega$ 相容性得 $\overline{\vdash \neg \forall y \neg T(\mathbf{f}, \mathbf{y})}$ 即 $\vdash \neg A(\mathbf{f})$.

莫斯托夫斯基 [1952] 曾经比较哥德尔定理的各种证法，该书在本书写作时尚未看到.

在我们的叙述下，不完备性定理 XII 及 XIII 是作为定理 V 分别就谓词形式 $R(x)$ 及 $(Ey)R(x, y)$ 的应用的结果的. 这主题在克林 [1943*] 中曾详细讨论过. 今再对谓词形式 $(Ey)R(x, y)$ 作一些附注以结束本节.

**论点 II 之逆**（第一部分） 对下形任一谓词：$(Ey)\ R(x,y)$，$R$ 一般递归，我们有一个正确而完备的形式体系.（对 $(Ey_1)\cdots(Ey_m)$ $R(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$，$n, m \geqslant 0$，$R$ 一般递归的情形仿此.）

更详细些（就 $n = m = 1$ 言）：给定任何一般递归谓词 $R(x, y)$，可找出一形式体系 $S$ 具有不同的公式 $A(\mathbf{x})$，$x = 0, 1, 2, \cdots$

使得(44)成立.

在例1中，体系的正确性还只是一个假设. 但例3却供给了一个迅速而无可非难的证明* (demonstration). (这里的(44)便是§59的(viii)，但一般说，对可解决性言却缺乏(iv).)

**例1** 根据§57定理IV系，我们可令R为原始递归而不致丧失普遍性. 设$S$为第四章的数论形式体系；$R(x, y)$由公式R(x, y)数字地表示(§49定理27系)，令A($\mathbf{x}$)为公式∃yR($\mathbf{x}$, y). 则显然$(Ey)R(x, y) \rightarrow \vdash$A($\mathbf{x}$). 因此，如果在这系统内，只当$(Ey)R(x,y)$时才有⊢∃yR($\mathbf{x}$, y)，则(44)便成立.这是一种相容性，如果$(Ex)\overline{(Ey)}R(x, y)$则它还蕴涵简单相容性，因此由哥德尔第二定理(§42定理30)，我们不能希望找出一个关于它的初等证明；事实上，对古典形式体系言，我们很难看出，如果不在元语言中使用古典逻辑，如何可以给出它的证明.

**例2** 类似地，取$S$为罗宾孙系统(§49引理18b)，只具有13条数论公理. 所要求的相容性将在§§77—79给出一个长的但初等的证明(至于R(x, y)则照定理27系的证明中那样构成). (参见§79定理53(h)). 罗宾孙系统当然更是简单相容的了(亦可直接证明，见定理53(a)).

**例3** 设在递归函数形式体系中方程系E递归地定义了$R$的代表函数而以$\boldsymbol{f}$为主要函数字母. 设把谓词字母$\boldsymbol{A}$加入到形式符号的总体去. 设$S$为一系统，以E中的方程作为其公理，并以R1及R2及下规则作为其推论规则(这里$\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$为数字):

$$\frac{\boldsymbol{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0}{\boldsymbol{A}(\mathbf{x}).}$$

则所考虑的相容性(以$\boldsymbol{A}(\mathbf{x})$作为A($\mathbf{x}$))是立刻可以得到的.

**例4** 设$S$的形式符号只包含0，与两个谓词字母$\boldsymbol{R}$及$\boldsymbol{A}$(以及逗号及括号). 其公式将是下形的表达式$\boldsymbol{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$及$\boldsymbol{A}(\mathbf{x})$，$x, y = 0, 1, 2, \cdots$. 其公设将是下文的公理模式1及推论规则2. 在公理模式1中，$\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$须限制为使得$R(x, y)$为真的数字.

1. $\boldsymbol{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 2. $\dfrac{\boldsymbol{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\boldsymbol{A}(\mathbf{x})}.$

这个形式体系看来好象是很古怪的．但公理模式 1 中对 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ 的限制是一个能行的限制(因 $R$ 是一般递归的)，正如 §9 公理模式 10 及 11 对 t 的限制那样．

第五个例子见 § 73 末例 2.

**论点 II 之逆**（第二部分） 有一个形式体系 $S$ 使得任给一个一般递归谓词 $R(x, y)$，都可找出不同的公式 A$(\mathbf{x})$, $x=0, 1, 2, \cdots$ 使得 (44) 成立．(对任何 $n$, $m$ 仿此；对一切 $n$, $m$ 的联立情形亦仿此.)

**证明** 设应用第一部分 ($n=2, m=1$) 于 $T_1(z, x, y)$ 时得公式 A$(\mathbf{z}, \mathbf{x})$ ($z, x=0, 1, 2, \cdots$)；由 §57 (9) 求 $f$，再令 A$(\mathbf{x})$ ($x=0, 1, 2, \cdots$) 为 A$(\mathbf{f}, \mathbf{x})$.

**附注 2** 若增加新公设于 $S$（第一部分或第二部分的)，我们可得一体系 $S'$，使得 $(Ey)R(x,y) \rightarrow \vdash$A$(\mathbf{x})$，但未必有 $\vdash$A$(\mathbf{x}) \rightarrow (Ey)R(x, y)$.

由论点 II 及其逆，同样的谓词既可以表成 $(Ey)R(x,y)$ 形，而 $R$ 一般递归，亦可以在某形式体系 $S$ 内表成 $\vdash$A$(\mathbf{x})$，而且当 $x=0, 1, 2, \cdots$ 时公式 A$(\mathbf{x})$ 是可以能行地指定的．简单地说，谓词形式 $(Ey)R(x, y)$ 与在某形式体系内的可证性这个观念是一致的.

根据 §53 末所指出的结果(以及定理 IV 系)，由归纳定义（具有可构造性的直接句子的)所得的亦正是这种谓词集． 由于定义形式体系时归纳定义经常所起的作用，这一事实与前面所说的有密切的关系.

**可递归枚举性**．一自然数集 $C$ 叫做可归纳枚举的，如果有一个一般递归函数 $\varphi$ 枚举它（容许重复)，即使得 $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, $\cdots$ 枚举了 $C$ 的元素(容许重复)[1]．(坡斯特 [1944] 把空集亦包括在可递归枚举集之内.)

---

1) 换句话说，$C$ 是函数 $\varphi$ 的值集．每一个以 $C$ 为值集的部分递归函数（见后）的哥德尔数叫做集 $C$ 的哥德尔数——俄译注.

**定理 XIV** 具有元素的集 $C$ 是可递归枚举的，当且仅当谓词 $x\varepsilon C$ 可表成 $(Ey)R(x, y)$ 形而 $R$ 一般递归.

更详细些: (a) 如果 $\varphi$ 枚举 $C$，则 $x\varepsilon C \equiv (Ey)\ R(x, y)$，而 $R$ 原始递归于 $\varphi$. (b) 如果 $x\varepsilon C \equiv (Ey)\ R(x, y)$ 而 $C$ 有元素 $m$，则 $C$ 被一函数 $\theta$ 所枚举，$\theta$ 原始递归于 $R$. (克林 Kleene [1936].)

**证明** (a) $x\varepsilon C \equiv (Ey)[\varphi(y) = x]$(参见 §45 #14). (b)令

$$\theta(y)=\begin{cases}(y)_0 & \text{当 } R((y)_0, (y)_1) \text{ 时},\\ m & \text{当 } \bar{R}((y)_0, (y)_1) \text{ 时}.\end{cases}$$

(参见 ##D, F, 19).

因此论点 II 等价于说，使得 A($\mathbf{x}$) 为可证的那些数 $x$ 所成的集 $C$ 是可递归枚举的（如果它有一元素的话). 如果谓词 $x\varepsilon C$ 是一般递归的，我们说该集（类）$C$ 是一般递归的. 译述 § 57 的结果便是: 一般递归集 $C$，只要它有一元素，它当然更是可递归枚举的(定理 VI(a)); 它的补集 $\bar{C}$ 亦同 (§45 #D). 古典地说，如果 $C$ 及 $\bar{C}$ 同是可递归枚举的，则 $C$ 是一般递归的（定理 VI (b) 或 (c)). 使得 $(Ey)T_1(x, x, y)$ 成立的 $x$ 所组成的集（符号地便是 $\hat{x}(Ey)T_1(x, x, y)$) 是可递归枚举的(由 §58 (29)，因 $(Ey)T_1(e, e, y)$，故 $e$ 是它的一个元素)，但非一般递归的(定理 V (15)); 它的补集 $\hat{x}(y)\bar{T}_1(x, x, y)$ 既非可递归枚举的亦非一般递归的(定理 V(12) 及 (14)).

**系** 如果一集可用一般递归函数而枚举(容许重复)，则它可用原始递归函数而枚举(容许重复). (罗歇 [1936].)

用 (a) 再用定理 IV 系再用 (b).

**例 5** 一无穷集 $C$ 是一般递归的当且仅当它能够不重复地依大小次序而被递归枚举. (克林 [1936]). (暗示: 用定理 III.) 每一个无穷的可递归枚举集都含有一个无穷的一般递归子集（坡斯特 [1944]). 如果一无穷集是容许重复地可递归枚举的，则它亦是不容许重复地可递归枚举的 (克林 [1936]).

**例 6** 问题: 试由'可递归枚举集'而可构造性地（即直觉主义地）定义'一般递归函数'. 我们必须避免使用出现于下列地方

的排中律，一集或为空集或者有一元素，又须避免在证明定理 VI (b) 时所用到的非直觉主义步骤. 解答：先用下列两命题中的第一个，再用定理 VI (c)，再用下列命题中的第二个（或定理 XIV)：一函数 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 是一般递归的当且仅当由数 $2^{\varphi(x_1,\cdots,x_n)} \cdot p_1^{x_1} \cdot \cdots \cdot p_n^{x_n}$ 所成的集是一般递归的. 一谓词 $x \varepsilon C$ 可表成 $(Ey) R(x, y)$ 形而 $R$ 一般递归，当且仅当下集（记为 $\{0\}+C'$）是可递归枚举的：该集包含 0 以及 $C$ 的元素的后继者.

在可递归枚举性的定义中，如把"一般递归函数 $\varphi$"改为"一般递归于 $\Psi$ 的函数 $\varphi$"，我们便得到'可递归于 $\Psi$ 而枚举的'这概念. 上述各结果可推广到这个概念来.

## § 61. 哥德尔定理的对称形

§60 定理 XIII 推广了 § 42 定理 28（哥德尔定理原形），而 **A (f)** 对应于 $\mathbf{A}_p(\mathbf{p})$. 定理 XIII 第三部分的表述，即使就狭义说亦是元数学的. 现在我们便把定理 29（哥德尔定理的罗歇形）加以推广.

今不用 $(y)\overline{T}_1(x, x, y)$ 而改用一个略为复杂的谓词 $(y)[\overline{T}_1((x)_1, x, y) \vee (Ez)_{z<y} T_1((x)_0, x, z)]$ 或其等价形

$$\overline{(Ey)}[T_1((x)_1, x, y) \& (z)_{z<y} \overline{T}_1((x)_0, x, y)].$$

设把 $T_1((x)_1, x, y) \& (z)_{z<y} \overline{T}_1((x)_0, x, y)$ 缩写为"$W_0(x, y)$"，把 $T_1((x)_0, x, y) \& (z)_{z<y} \overline{T}_1((x)_1, x, y)$ 缩写为"$W_1(x, y)$".

命 $x$ 固定. 设有一数 $y$ 使得 (i) $T_1((x)_0, x, y)$ (ii) $(z)_{z<y} \overline{T}_1((x)_1, x, z)$. 则不可能有数 $y_0$ 使得 (iii) $T_1((x)_1, x, y_0)$, (iv) $(z)_{z<y_0} \overline{T}_1((x)_0, x, z)$. 因由 (i) 及 (iv) 得 $y_1 > y_0$ 而由 (ii) 及 (iii) 得 $y_0 > y_1$. 故

$$(51) \qquad (Ey) W_1(x, y) \rightarrow \overline{(Ey)} W_0(x, y).$$

因为谓词 $W_0(x, y)$ 及 $W_1(x, y)$ 是原始递归的（用 § 45 ## A, C, D, E, 19.）故谓词 $(Ey) W_0(x, y)$ 的理论是可以完全形式

化的，至于就 $\overline{(Ey)}W_0(x, y)$ 的理论而言，则至少由(51)充分条件所给的，即由 $(Ey)W_1(x, y)$ 给出的那一部分是可以形式化的(由 §60 论点 II 之逆及附注 2)．现在我们证明，至少形式化了这么多的那个形式系统 $S$，如果相容的话，是不能完备的．

因此，试设 $S$ 为任一形式体系，其中有公式 $B(\mathbf{x})$ 及 $\neg B(\mathbf{x})$，$x = 0, 1, 2, \cdots$，都是不同的．我们不作任何限制性的假设，规定 $S$ 内有什么样的符号体系，在特例，并不规定 $B(\mathbf{x})$ 乃由公式 $B(x)$ 中把变元 $x$ 代以数字 $\mathbf{x}$ 而得，亦不规定 $\neg B(\mathbf{x})$ 乃由 $B(\mathbf{x})$ 前面置以符号 $\neg$ 而得． $S$ 的推演规则为

(52) $$(Ey)W_0(x, y) \rightarrow \vdash B(\mathbf{x}),$$

(53) $$(Ey)W_1(x, y) \rightarrow \vdash \neg B(\mathbf{x}).$$

系统 $S$ 的用处在于给出一个明显的准则以看出什么是公式 $B(\mathbf{x})$ 及 $\neg B(\mathbf{x})$ 的证明，因此(虽则我们避免明白指定，$B(\mathbf{x})$ 及 $\neg B(\mathbf{x})$ 须表示某些谓词)[1]如前，由论点 II，我们须要求有两个一般递归谓词 $R_0(x, y)$ 及 $R_1(x, y)$ 使得

(54) $$(Ey)R_0(x, y) \equiv \vdash B(\mathbf{x}),$$

(55) $$(Ey)R_1(x, y) \equiv \vdash \neg B(\mathbf{x}).$$

所谓 $S$ 的(简单)相容性将指，没有自然数 $x$ 使得既 $\vdash B(\mathbf{x})$ 又 $\vdash \neg B(\mathbf{x})$；所谓(简单)完备性指，对每个 $x$，或 $\vdash B(\mathbf{x})$ 或 $\vdash \neg B(\mathbf{x})$

**定理 XV** 满足(52)—(55)的简单相容且简单完备的形式系统是不存在的．

更详细些：任给一形式系统 $S$，含有不同公式 $B(\mathbf{x})$ 及 $\neg B(\mathbf{x})$ $(x = 0, 1, 2, \cdots)$，又给出一般递归谓词 $R_0(x, y)$，$R_1(x, y)$，使得(52)—(55)成立，如果 $S$ 是简单相容的话，则可找出一数 $f$，既不 $\vdash B(\mathbf{f})$ 亦不 $\vdash \neg B(\mathbf{f})$．(哥德尔定理的罗歇形，广义说法．)[2]

**证明** 设 $S$ 是简单相容的，或符号地

---

1) 更准确些，表示某些谓词在 $x$ 处的值——俄译注．

2) 这定理不但证明了 $S$ 的不完备性而且证明了它的不可补足性，因为 $S$ 的所有相容的加强系统都满足定理的条件(因为在加强系统中的不可判定公式是可以能行地作出的，故 $S$ 亦是能行不可补足的)．参见第 228 页脚注——俄译注．

(56) $$\overline{\vdash \mathrm{B}(\mathbf{x})} \& \overline{\vdash \neg \mathrm{B}(\mathbf{x})}.$$

由 §57 定理 IV (6)，有两数 $f_0$ 及 $f_1$，使得当 $f = 2^{f_0} \cdot 3^{f_1}$ 时有

(57) $$(Ey)R_0(x, y) \equiv (Ey)T_1(f_0, x, y) \equiv (Ey)T_1((f)_0, x, y),$$

(58) $$(Ey)R_1(x, y) \equiv (Ey)T_1(f_1, x, y) \equiv (Ey)T_1((f)_1, x, y).$$

在下面的证明中，每当我们用到 (52)—(58) 时，我们都把变元 $x$ 换为数 $f$. 为了要用反证法来证明 $\overline{\vdash \mathrm{B}(\mathbf{f})}$，试设

(a) $$\vdash \mathrm{B}(\mathbf{f}).$$

则由 (54) 有 $(Ey)R_0(f, y)$；由 (57) 有

(b) $$(Ey)T_1((f)_0, f, y).$$

又由(a)及简单相容性 ((56)) 得

(c) $$\overline{\vdash \neg \mathrm{B}(\mathbf{f})}.$$

故由 (55) 得 $\overline{(Ey)}R_1(f, y)$；由 (58) 得 $\overline{(Ey)}T_1((f)_1, f, y)$；故

(d) $$(y)\overline{T}_1((f)_1, f, y)$$

由 (b) 与 (d) 得 $(Ey)[T_1((f)_0, f, y) \& (z)_{z<y}\overline{T}_1((f)_1, f, z)]$，即 $(Ey)W_1(f, y)$；再由 (53) 得 $\vdash \neg \mathrm{B}(\mathbf{f})$，与 (c) 冲突. 故由反证法须否定假设 (a)，即得 $\overline{\vdash \mathrm{B}(\mathbf{f})}$.

由同样步骤，或注意 (52)，(54)，(56)，(57) 和 (53)，(55)，(56)，(58) 的对称性，得 $\overline{\vdash \neg \mathrm{B}(\mathbf{f})}$.

**讨论** 我们对 $S$ 的条件乃由下列暗示而来：$\mathrm{B}(\mathbf{x})$ 应表示 $(Ey)W_0(x, y)$，而 $\neg \mathrm{B}(\mathbf{x})$ 表示其否定. 为方便起见，这释义可叫做偏爱的释义 (preferred intespretation). 在偏爱的释义下，$\neg\ \mathrm{B}(\mathbf{f})$ 相应于 §42 的 $\mathrm{A}_q(\mathbf{q})$ 并表示一个真命题. 但是在定理本身中却没有提到偏爱的释义. 关于 $S$ 的条件是完全对称的. 我们可以同样地把 $\neg \mathrm{B}(\mathbf{x})$ 释义为表示 $(Ey)\mathrm{W}_1(x, y)$ 而 $\mathrm{B}(\mathbf{x})$ 为它的否定. 这时 $\mathrm{B}(\mathbf{f})$ 便相应于 $\mathrm{A}_q(\mathbf{q})$，并表示一个真命题，而 $\neg \mathrm{B}(\mathbf{f})$ 则是假的. 在这两个极端的释义之间，还有很多的可能的中间释义. 我们再

用下列各个系统 $S$ 的例子(满足定理 XV 的)而说明这点.

**例 1** 在第四章的数论形式体系中，因为 $T_1((a)_0, a, b)$ 及 $T_1((a)_0, a, c)$ 是原始递归的,故由 §49 定理 27 系,它们可分别被公式 $\mathrm{A}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ 及 $\mathrm{B}(\boldsymbol{a}, \mathbf{c})$ 所表示. 令 $\mathrm{B}(\mathbf{x})$ 为 $\exists \boldsymbol{b}[\mathrm{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{b}) \& \forall \boldsymbol{c}(\boldsymbol{c} \leqslant \boldsymbol{b} \supset \neg \mathrm{B}(\mathbf{x}, \boldsymbol{c}))]$,而 $\neg \mathrm{B}(\mathbf{x})$ 为 $\neg \exists \boldsymbol{b}[\mathrm{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{b}) \& \forall \boldsymbol{c}(\boldsymbol{c} \leqslant \boldsymbol{b} \supset \neg \mathrm{B}(\mathbf{x}, \boldsymbol{c}))]$. 则可用证明 § 42 定理 29 第一部分的方法而证明 (52) 是成立的. 又由那里所指出的步骤及 $\supset$ 引可得, $\vdash \mathrm{B}(\mathbf{x}) \supset \neg \forall \boldsymbol{b}[\neg \mathrm{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{b}) \vee \exists \boldsymbol{c}(\boldsymbol{c} \leqslant \boldsymbol{b} \& \mathrm{B}(\mathbf{x}, \boldsymbol{c}))]$. 换质位 (由 *13) 可得 $\forall \boldsymbol{b}[\neg \mathrm{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{b}) \vee \exists \boldsymbol{c}(\boldsymbol{c} \leqslant \boldsymbol{b} \& \mathrm{B}(\mathbf{x}, \boldsymbol{c}))] \supset \neg \mathrm{B}(\mathbf{x})$. 由这再用证明定理 29 第二部分的方法便可得 (53). 注意,在这个证明中，除了用到含有相等性的谓词演算，公式模式 14—21，定理 27 系以外，只要求 *166a, *168, *166 及 *169 (其中 t 为一数字). 因此由引理 18a (§41 末),它对罗宾逊系统亦是成立的. 对第四章的数论系统言,用 §52 定理 31，对罗宾逊系统则用证明定理 31 的方法，便可证有两递归谓词 $R_0$, $R_1$ 使得 (54) (55) 成立. 在这例子中，定理 XV 内 $\neg \mathrm{B}(\mathbf{x})$ 的 $\neg$ 的确便是数论形式体系内的 $\neg$; 并且在数论形式体系的通常释义下, $\mathrm{B}(\mathbf{x})$ 及 $\neg \mathrm{B}(\mathbf{x})$ 具有偏爱的释义. 今设 $S$ 为第四章的数论系统(或罗宾逊系统)，而 $\mathrm{B}(\mathbf{x})$ 及 $\neg \mathrm{B}(\mathbf{x})$ 亦作这个选择. 根据定理, $S$ (如果它是简单相容的)是简单不完备的,把新公设加入到 $S$ 后所得的每一个简单相容的扩张系统 (但须使得 (54) (55) 仍然对某些递归谓词 $R_0$ 及 $R_1$ 成立) 亦是简单不完备的. $S$ 的这种扩张甚至于可以与 $S$ 中 $\mathrm{B}(\mathbf{x})$ 与 $\neg \mathrm{B}(\mathbf{x})$ 的偏爱释义有所不同，只要这些新公式不致于在足够初等的方式之下与偏爱释义相冲突以致引起简单不相容性.

**例 2** 设在形式系统 $S$ 的符号体系内包含有数字以及四个谓词符号 $\boldsymbol{W}_0$, $\boldsymbol{W}_1$, $\boldsymbol{B}$ 及 $\neg \boldsymbol{B}$ (或者不用 $\neg \boldsymbol{B}$ 而用运算子 $\neg$). 设 $S$ 以下列两公理模式及两推论规则作为其公设. 在公理模式 1 中, $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 是数字使得 $W_0(x, y)$ 成立的，在公理模式 2 中，则是使得 $W_1(x, y)$ 成立的数字.

1. $\boldsymbol{W}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.　　　　2. $\boldsymbol{W}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

3. $\dfrac{W_0(\mathbf{x},\ \mathbf{y})}{B(\mathbf{x}).}$ 4. $\dfrac{W_1(\mathbf{x},\ \mathbf{y})}{\neg B(\mathbf{x}).}$

由(51)立得本系统的简单相容性. 这系统 S 以及任何由它加入新公设所得的简单相容的扩张系统(但(54)(55)仍对某两递归谓词 $R_0$, $R_1$ 成立)都是简单不完备的. 在 $S$ 中只有由于(52)(53)的要求,公式 B($\mathbf{x}$) 及 ¬B($\mathbf{x}$) 才是可证的. 在扩大 $S$ 时不受释义的限制.

§60 定理 XIII 是 § 57 定理 V 对谓词形式 $(Ey)R(x, y)$ 的特例,并作了元数学的应用. 同样,定理 XV 亦可以有一个纯用谓词形式的说法. 现在我们试纯用可递归枚举集的语言而比较定理 XIII 及 XV(参见 §60 定理 XIV).

**附注 1** 由定理 XIII 及 XV 可知下列三集不可能有一是空的, $\hat{x}(Ey)T_1(x, x, y)$, $\hat{x}(Ey)W_0(x, y)$ 及 $\hat{x}(Ey)W_1(x, y)$. ——其元素可用下法找出. 应用 §58 定理 IX (29), 有 $(Ey)T_1(e, e, y)$. 选取任一递归 $R$ 使得 $(x)(Ey)R(x, y)$, 并对这个 $R$ 依 §57 定理 IV (6)而选取 $f$; 再选取任一递归 $R$ 使得 $(x)(y)R(x, y)$, 并对这个 $R$ 依(7)而选取 $g$. 令 $e_0 = 2^g \cdot 3^f$, $e_1 = 2^f \cdot 3^g$. 则 $(Ey)W_0(e_0, y)$ 及 $(Ey)W_1(e_1, y)$.

在定理 XIII 中我们有一个固定的可递归枚举的自然数集 $C_0$ (即 $\hat{x}(Ey)T_1(x,x,y)$), 其补集 $C_3(=\hat{x}(y)\overline{T}_1(x, x, y))$ 不是可递归枚举的(图 1). 在定理 XV 中, 我们有两个固定的可递归枚举集 $C_0$ 及 $C_1$(即分别为 $\hat{x}(Ey)W_0(x, y)$ 及 $\hat{x}(Ey)W_1(x, y)$), 它们是不相交的(由(51)),并且[1]如把自然数任意分成两不相交的集 $C_2$

1) 每一对具有这样性质的自然数集 $C_0$, $C_1$, 叫做不能递归分开的(集合对), 简称不能分开的(集合对)(经常很不精确地把这些集 $C_0$, $C_1$ 本身叫做不能分开的). 由不相交的递归可枚举集所组成的不能分开的集合对是首先由诺维科夫 П. С. Новиков 作出的. (例子可仿他的 B 不可分的 CA 集的例子而作出;参见亚尔山宁 (В.Я. Арсенин), 辽普诺夫 (А. А. Ляпунов) [1950].) 首先发表类似的结果的是克林 [1950]. 最近的例子是特拉屯勃洛特 (Б. А. Трахтенброт) [1952]. 由集 $\hat{x}(Ey)W_0(x, y)$ 与 $\hat{x}(Ey)W_1(x, y)$ 的不能分开性可以推出, 在任何满足关系式(52)(53)的形式系统中, 可证公式集与可驳公式集是不能分开的. 集合对 $C_0$, $C_1$ 叫做不能能行分开的(乌斯平斯基 (В. А.

及 $C_3$，而 $C_0 \subset C_2$ 及 $C_1 \subset C_3$，则集 $C_2$ 与 $C_3$ 不能够同是可递归枚举的(图 2).

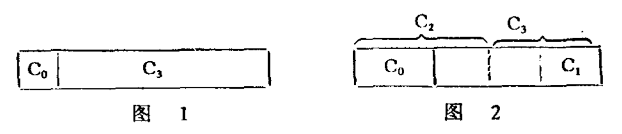


图 1　　图 2

(对此无须用 $(x)(x \varepsilon C_2 \vee x \varepsilon C_3)$，只用 $(x)\overline{\overline{(x \varepsilon C_2 \vee x \varepsilon C_3)}}$ 便够，这在直觉主义说来是更弱一些的.) 只在偏爱的释义下，$C_3$ 才是 $C_0$ 的补集[1]. 在证明定理 XIII (第二部分)时，我们假设给出任何一个可递归枚举集 $D_3$，包含于 $C_3$ 内(即 $\hat{x}(Ey)R(x, y)$)，并找出一数 $f$ 既不在 $C_0$ 内又不在 $D_3$ 内(图 1a). 在证明定理 XV 时，我们假设给出了两个不相交的可递归枚举集 $D_2$ 及 $D_3$，分别包含了 $C_0$ 及 $C_1$ (即 $\hat{x}(Ey) R_0(x, y)$及$\hat{x}(Ey)R_1(x, y)$)，并找出一数 $f$ 既不在 $D_2$ 内亦不在 $D_3$ 内(图 2a). 在上述证明中的元数学语言当然可以避而不用，只须首先把 (54)，(55) 用于 (52)，(53) 及 (56) 中，使得假设变成了

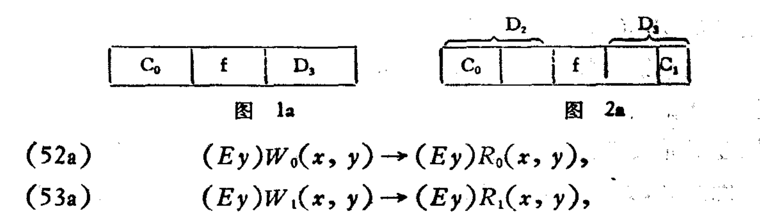


图 1a　　图 2a

(52a)　　$(Ey)W_0(x, y) \to (Ey)R_0(x, y)$，

(53a)　　$(Ey)W_1(x, y) \to (Ey)R_1(x, y)$，

---

1) 这一句话是可以理解的，因为如果把 $C_2$，$C_3$ 考虑为由分别使得公式 B(x) 及 ¬B(x) 为真(在某种释义下)的那些 $x$ 组成之集. 这时在偏爱的释义下 $C_2$ 与 $C_0$ 同，因而 $C_3$ 的确是 $C_0$ 的补集——俄译注.

Успенский) [1953])，如果存在一个二元部分递归函数 $\nu$ (参见第十二章) 具有下列性质：设 $H_0$ 与 $H_1$ 为两个可递归枚举集，$H_0 \supset C_0$，$H_1 \supset C_1$，其哥德尔数分别为 $n_0$，$n_1$，则值 $\nu(n_0, n_1)$ 有定义但不属于 $H_0 + H_1$. 所有文献上已知的不能分开的集合对同时亦是不能能行分开的 (不能分开的集合对但不是不能能行分开的例子，最近才由穆兹尼克 (A. A. Мучник) [1956a] 给出). 可以证明，集 $\hat{x}(Ey)W_0(x, y)$ 与集 $\hat{x}(Ey)W_1(x, y)$ 是不能能行分开的集合对 [根据 (52)，(53) 可知定理 XV 中的形式系统 $S$ 内的可证公式集及可驳公式集亦然.]——俄译注.

(56a) $\overline{(Ey)R_0(x, y)\&(Ey)R_1(x, y)}$.

(克林[1950])[1]. 这些结果可推广到可递归枚举于$\Psi$的集去. 参见§60末及§58定理X.

使得B(**x**)为可证的数$x$所成的集是可递归枚举的((54),定理XIV; 又由(52)及附注1可得⊢B($\mathbf{e}_0$))[2].

**定理XVI** 如果定理XV所描述的(删去(55)) $S$是简单相容的,则使得B(**x**)在$S$中不可证的那些数$x$不是可递归枚举的,或者说,没有一个一般递归谓词$Q(x, y)$使得$(Ey)Q(x, y)\equiv \overline{\vdash \mathrm{B}(\mathbf{x})}$. (依照罗歇[1936].)

**证明** 如果$\hat{x}[\overline{\vdash \mathrm{B}(\mathbf{x})}]$是可递归枚举的,则取$C_2 = \hat{x}[\vdash \mathrm{B}(\mathbf{x})]$及$C_3 = \hat{x}[\overline{\vdash \mathrm{B}(\mathbf{x})}]$,我们便将得到图2的情况而$C_2$, $C_3$同是可递归枚举的. (直觉主义地是$(x)\overline{\overline{x\varepsilon C_2 \vee x\varepsilon C_3}}$; 参见§27 *51a.)亦可如下证明,试注意如果在(52)—(56)中换$R_1$为$Q$,换"⊢¬B(**x**)"为"$\overline{\vdash \mathrm{B}(\mathbf{x})}$",结果仍是成立的. 因此前面关于$\overline{\vdash \mathrm{B}(\mathbf{f})}$ & $\overline{\vdash \neg \mathrm{B}(\mathbf{f})}$的证明便变成一个关于逻辑矛盾即$\overline{\vdash \mathrm{B}(\mathbf{f})}$ & $\overline{\overline{\vdash \mathrm{B}(\mathbf{f})}}$的推演. (我们用到关于¬B(**x**)的假设以及简单相容性,只在于推出$(Ey)W_1(x, y) \rightarrow \overline{\vdash \mathrm{B}(\mathbf{x})}$.)

形式系统的判定问题(参见§30). 对数论谓词(函数)而言,根据§60论点I,'能行地可判定的(可计算的)'意指'一般递归的',要对元数学谓词(函数)而给出'能行地可判定的(可计算的)'的精确意义,如果它是一特殊的形式系统$S$,其中的客体可容许哥德尔编号的(如果$S$可达到形式化这个目的,这是必然的,参见§60

1) 在所叙述的证明中,某些集的不能分开性被用以证明一系统的不完备性(甚至它的不可补足性,参见第341页脚注). 如果使用这些集的不能能行分开性,我们还可得到不能能行补足性. 在不能分开性和不可补足性(不能能行分开性与不能能行补足性)之间有这种明显的关系不是偶然的. 郭尔莫哥洛夫(A. H. Колмогоров)证明了,一形式体系的可证公式集与可驳公式集之间的不能分开性是该系统的不可补足性的充分条件. 对一大类的形式体系言,可证公式集与可驳公式集之间的不能分开性亦是不可补足性的必要条件. 对这一类形式体系言,不能能行分开性是不能能行补足性的充分与必要条件. (乌斯平斯基[1953])——俄译注.

2) 由此可知使B(**x**)为可证的那些数$x$的集至少有一元素; 因此便可应用定理XIV了——俄译注.

首），我们便可要求相应的数论谓词（相应的数论函数）是一般递归的．例如，要对在 $S$ 内的可证性，即对谓词 $\vdash \mathrm{A}$（这里 A 是元数学变元，以 $S$ 的一切公式或 $S$ 的一切形式客体为变值）而给出一个‘判定过程’，便等于给出一个一般递归谓词 $R(a)$ 使得 $R(a) \equiv \vdash \mathrm{A}_a$（依照 §60 附注 1 的记号）．（要对元数学谓词（函数）而使得‘能行地可判定（可计算）’的意义精确起来，另一方法可见 §70 末所指示．）下面所说的可就关于 $S$ 的公式的判定过程的直觉概念而言，亦可就这个精确的元数学定义而言．$\mathrm{B}(\mathbf{x})$ 须是一个能行的 $x$ 的元数学函数（或其哥德尔数 $\beta(x)$ 必须是 $x$ 的一般递归数论函数）这个条件必须满足，否则 $S$ 不可能是公式 $\mathrm{B}(\mathbf{x})$ 的形式体系了．

**系** 设 $S$ 如定理 XV 所描述（删去（54）及（55）），又设 $\mathrm{B}(\mathbf{x})$ 能够由 $x$ 而能行地找出（或者，在某个明指的能行的哥德尔编号中，它的哥德尔数 $\beta(x)$ 是 $x$ 的一般递归函数）．如果 $S$ 是简单相容的，则它的判定问题是不可解决的，即，没有一个判定过程来决定一个公式是否在 $S$ 内可证．

**证明** 如果有一方法可以能行地决定该系统内任意给定的公式是否可证，则当任给一数 $x$ 时我们便能够找出一个相应的公式 $\mathrm{B}(\dot{\mathbf{x}})$，然后应用到该公式去．由 §60 论点 I，这便意指集 $\hat{x}[\vdash \mathrm{B}(\mathbf{x})]$ 是一般递归的．那末集 $\hat{x}[\vdash \mathrm{B}(\mathbf{x})]$ 及 $\hat{x}\,\overline{[\vdash \mathrm{B}(\mathbf{x})]}$ 更同是可递归枚举的了，因此我们便将有两个一般递归谓词 $R_0$ 及 $Q$ 使得 $(Ey)\ R_0(x, y) \equiv \vdash \mathrm{B}(\mathbf{x})$（由（54））及 $(Ey)\ Q(x, y) \equiv \overline{\vdash \mathrm{B}(\mathbf{x})}$（参见 §60 末及附注 1），与本定理矛盾．——换句话说，如果有一个一般递归 $R$ 使得 $R(a) \equiv \vdash \mathrm{A}_a$，则取 $R_0(x, y) \equiv R(\beta(x))$ 及 $Q(x, y) \equiv \overline{R}(\beta(x))$，便与定理矛盾如上所述．

**定理 33** 如果第四章的数论形式系统（或 §49 引理 18 b 的罗宾逊系统）是简单相容的，则它的判定问题是不可解决的，加入任何公设而把该系统扩张，只要所得系统是简单相容的，则其判定问题仍然是不可解决的．

由系及例 1 而得．因在例 1 中，$\neg \mathrm{B}(\mathbf{x})$ 的 $\neg$ 便是数论系统的

¬，定理 XV 中所用的'简单相容性'与数论系统中所定义的'简单相容性'（§28 中）是一致的.（利用哥德尔编号而作的'可判定'的定义，可理解为使用 §50，52 的编号. 由 §52 例 2 可知 $\beta(x)$ 是原始递归的.）

可化归性，不可解决度. 在判定问题上所作的研究，很多不是直接解决而是把一个判定问题化归到别的判定问题去.

把一个关于 $n$ 元谓词 $P$ 的判定问题（或 $n$ 元函数 $\varphi$ 的计算问题）'化归'到 $l$ 个函数及谓词 $\psi_1, \cdots, \psi_{l_1}, Q_1, \cdots, Q_{l_2}$（缩写为 $\Psi$）的相应问题去，直觉地意指，找出一个一致的过程方法使得，任给变目 $n$ 元矢 $x_1, \cdots, x_n$，人们都可判定 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 为真或否（计算 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 的值），只要在过程的每一步骤中，他可以知道他所要求的变目处函数 $\psi_1, \cdots, \psi_{l_1}$ 的值以及谓词 $Q_1, \cdots, Q_{l_2}$ 的真假；简言之，便是要证明 $P$ 是能行地可判定于（$\varphi$ 是能行地可计算于）$\Psi$ 的.

要得到一个与这直觉观念相应的准确的数学概念，我们自然地把邱吉论点（§60 论点 I）推广于具有 $l > 0$ 个假定函数及谓词 $\Psi$ 的情形去（这将叫做论点 I*）. 论点 I 的明证可用于论点 I* 去，论点 I* 的逆亦是成立的.

例如，把一谓词 $P(a)$ 的判定问题化归到另一谓词 $Q(a)$ 的判定问题去便意指，找出一谓词 $R(a)$，一般递归于 $Q(a)$ 且有 $P(a) \equiv R(a)$，或简单地说，证出 $P(a)$ 是一般递归于 $Q(a)$ 的. 这可由我们的直觉的化归概念及论点 I* 而得；如果我们把它取作定义，我们便要求论点 I* 来断定说，所定义的概念与我们关于化归的直觉概念是一致的[1].

---

1) 注意，可判定性的化归（即判定问题的彼此化归）在这里是借助于代表函数而通过可计算性的化归（即可计算问题的彼此化归）而定义的. 乌斯平斯基 [1955] 引入了可枚举性的化归一概念，可以证明用它可以表述前面两个可化归性的概念（即判定问题的化归及计算问题的化归）.
可计算问题及可判定问题都可以看作下问题的特例，由梅维捷夫（Ю. Г. Медведев）（参见第 53 页脚注）所讨论并命名的大量问题. 他亦引入关于这种

坡斯特[1944]表示了好几个数学的可化归性概念。其中最一般的，坡斯特从杜令[1939]而引用过来的，便等价于我们从论点I*而得的概念。如果$P(a)$的判定问题可化归于$Q(a)$的判定问题，并且是不可解决的，坡斯特便说，$P(a)$的不可解决度等于或小于$Q(a)$的，看$Q(a)$的判定问题能不能化归到$P(a)$的而定(参见§3)[1]。不可解决度至少是可以偏序的(参见§8)[2]。在下形的谓词的判定问题中，$(Ey)R(a, x)$，$(x)(Ey)R(a, x, y)$，$(Ex)(y)(Ez)R(a, x, y, z)$，$\cdots$，而$R$为递归的，(参见§57定理V第二部分(b))，分别以谓词$(Ex)T_1(a, a, x)$，$(x)(Ey)T_2(a, a, x, y)$，$(Ex)(y)(Ez)T_3(a, a, x, y, z)$，$\cdots$具有最高度的不可解决度，这今后可以证明(§65例2；如果意思只是说，具有递归的$R$的每一形式的谓词都是分别地递归于那些非递归谓词的，则这亦直觉主义地成立，因为这点是直接证明了的)。古典地说，从第一个以后，这些谓词的判定问题都比前面一个的判定问题具有更高度的不可解决性(仍由§58定理XI系)，而§57定理VIII中的谓词$M(a, k)$却又具有更高度的不可解决性(由§58定理X系(b)及定理VIII的证明)。若把$T_n$代以$T_n^M$，我们又得到比它更高度的不可解决性(由§58末定理XI*及§65例2，$l>0$)。大卫斯((Davis)[1950]摘要)探讨这些不可解决度。坡斯特

1) 后来克林与坡斯特[1954]把这定义推广到$P(a)$的判定问题是可解决的情形去，即当$P(a)$为一般递归谓词的情形。显然，一般递归谓词的不可解决度是所有不可解决度中最小者；它可记为0——俄译注。

2) 克林与坡斯特[1954]证明了，不可解决度组成上半格子而非格子(参见卜科夫[1948])。上半格子是指一偏序集其中任两元素都有一个最小上界——俄译注。

问题的可化归性的概念，而且证明了，由一个大量问题(梅氏意义下)到另一个大量问题的可化归性问题本身亦是一个大量问题(梅氏意义下)。每一个大量问题(梅氏意义下)都对应于一个困难度。困难度可以用很自然的方式而编序(问题A的困难度小于或等于问题B的困难度，如果A可化归于B)并组成了一个格子，甚至于组成布劳维(Brouwer)逻辑(关于用语参见卜科夫(Birkhoff)[1948]。)

关于各种可化归概念参见乌斯平斯基[1956](摘要)——俄译注。

[1944] 提出下问题，未有解答；有没有比 $(Ex)T_1(a, a, x)$[1] 的判定问题具有更低的不可解决度的.

**例 3** 试把简单相容性换以 §60 例 1 (或例 2) 的更强的相容性而重新叙述定理 33. 这个弱形的定理 33 可由 §60 例 1 (或例 2) 而证明，只须取那里的 $R(x, y)$ 为 $\equiv T_1(x, x, y)$ 并用 §60 定理 XII 便可. 根据上引 §65 例 2 的结果，由这证明可得，在加强的相容性假设下，第四章的形式系统 (或引理 18b 的罗宾逊系统) 的判定问题都是在 1 量词谓词的判定问题中具有最高度的不可解决性的，对任何的扩张系统言，只要该系统对 R(x,y) (或对别的数字地表示 $R(x,y)(\equiv T_1(x, x, y))$ 的R(x, y)) 言是具有该相容性的，也有同样的结论. ——对第四章的系统(或罗宾逊系统)言，我们可由所给的定理 33 的证明(对加强相容性假设中所用的 R(x, y) 及 $R(x, y)$ 改作别的选择) 而作证明如下. 设把 $T_1((x)_2, (x)_2, y)$ 当作 $R$，依 (6) 而选 $f$，再对任何使得 $(x)(y)R(x, y)$ 成立的递归 $R$ 依 (7) 而选 $g$. 则 $(Ey)T_1(x, x, y) \equiv (Ey)W_0(2^g \cdot 3^f \cdot 5^x, y)$. 这便把 $(Ey)T_1(x, x, y)$ 的判定问题化归到 $(Ey)W_0(x, y)$ 的去了. 因此这系统的判定问题是在 1 量词谓词中具有最高度的不可解决性的，如果在该系统中 (52) 的逆对例 1 的 B(**x**) 是成立的话(由 §79 定理 53 (c) 可知这对罗宾逊系统是成立的). (B(**x**) 具有 ∃yR(**x**, y) 形，这里 R(x, y) 数字地表示 $W_0(x, y)$，由 §41 (C) 及 (E) 可知.)

当 $\Psi$ 是未明指的函数及谓词时，我们亦可以讨论把 $P$ 的判定问题 ($\varphi$ 的计算问题) 化归到 $\Psi$ 的相应问题，其意为得到一个过程就 $\Psi$ 及 $x_1, \cdots, x_n$ 而言是一致的；或简单地，是证明 $P$ 是一致地可由 $\Psi$ 而能行地判定 ($\varphi$ 可由 $\Psi$ 而能行地计算) 的. 这时在论点 I* 及其逆的前提与结论中都需加入"一致地"三字.

1) 这个问题的解答见上引克林与波斯特 [1954]，其中证明了，甚至有无穷多个不可解决度均比谓词 $(Ex)T_1(a, a, x)$ 的不可解决度为小. 但是仍留下一问题，有没有一个不可解决度(当然指非 0 的)，小于谓词 $(Ex)T_1(a, a, x)$ 的不可解决度但仍属于 $(Ex)R(a, x)$ 形的谓词的，这里 $R$ 是一般递归谓词. 这便是所谓可化归性问题，最近由慕兹尼克 [1956*] 解决了，他指出满足上述条件的不可解决度的确是存在的——俄译注.

# 第十二章　部分递归函数

## § 62. 邱 吉 论 点

本章及下章主要目的之一是对邱吉论点（§60 论点 I）给以明证。

因为我们关于一函数的能行地可计算性（或一谓词的能行地可判定性）的原来观念是颇为含混的直觉观念，所以这个论点是不能证明的。

但这个直觉观念却是实在的，因为，它保证了好多特殊的函数的能行地可计算性（§ 30），另一方面它亦使我们认出，对于其它好些函数的现有知识不足以使这些函数被认为是能行地可计算的。

作为后一情形的例子，试设 $R(x, y)$ 为能行地可判定谓词，并考虑用下法所古典地定义的函数 $\varepsilon y R(x, y)$（哥德尔[1931]），

$$\varepsilon y R(x, y) = \begin{cases} \text{使 } R(x, y) \text{ 成立的最小的 } y, \text{当} (Ey)R(x, y) \text{时}; \\ 0, \text{ 此外情形时}. \end{cases}$$

这定义（本身）不足以供给一个计算过程．任给 $x$，我们可以继续地探讨命题 $R(x, 0)$，$R(x, 1)$，$R(x, 2)$，$\cdots$ 并看看那一个是成立的，要多久便多久；原则上我们可以完成前 $n$ 项的检查，不管 $n$ 是多么大的有限数．如果所给的 $x$ 使得 $(Ey)R(x, y)$，则当追得够长久时，我们便会遇到使 $R(x, y)$ 成立的第一个 $y$，而这个 $y$ 便是函数 $\varepsilon y R(x, y)$ 的值．但如果 $x$ 是使得 $(\overline{Ey})R(x, y)$ 的，我们绝不能由于坚持追查而知道这事，这法是永远不能成功的．在古典定义中所要求的，即对所有 $\aleph_0$ 个命题都做检查，对计算员（人类）说来，是永远不可能完成的．

对 $R(x, y)$ 的某些选择，函数 $\varepsilon y R(x, y)$ 却是能行地可计算

的，但不是"直接地"根据其定义而得，而是由于有其它的过程可以确定其值，与定义本身所暗示的不同，后面这个过程却是能行的. 例如，当 $R(x, y) \equiv (x)_0(y)_0 + (x)_1(y)_1 = (x)_2$ 时，这样的一个过程是熟知的(参见§30例2).

函数 $\varepsilon y R(x, y)$ 是能行地可计算的当且仅当谓词 $(Ey)R(x, y)$ 是能行地可判定时. 因为，如果 $(Ey)R(x, y)$ 是能行地可判定的，则给出 $x$ 而要计算 $\varepsilon y R(x, y)$ 时，我们可先判定 $(Ey)R(x, y)$ 的真假，按其解答或取使得 $R(x, y)$ 成立的最小的 $y$，或取 0，以为其值. 反之，如果 $\varepsilon y R(x, y)$ 是能行地可计算的，则给出 $x$ 而要判定 $(Ey)R(x, y)$ 的真假，可先计算 $\varepsilon y R(x, y)$，再确定 $R(x, \varepsilon y R(x, y))$ 的真假.

直觉主义者认为，下列的信仰是不能得到辩解的：恒可决定对一个给定的谓词 $P(y)$ 而言，到底 $(Ey)P(y)$ 为真或假. 这便是他们所以不接受排中律 $A$ 或非 $A$（照他们的关于"或"字的意义，§13）的缘故. 如果把 $P(y)$ 换为 $R(x, y)$，他们的论证便是，我们没有理由假设，对任何R言，谓词 $(Ey)R(x, y)$ 都是能行地可判定的.

由于邱吉论点对"一切能行地可计算函数"作了一个明确的规定，它便使得有可能证明，就一些谓词 $R(x, y)$，例如 $T_1(x, x, y)$ 而言(§60定理II)，没有一致的方法来解决 $(Ey)R(x,y)$ 这个问题. 因此，布劳维的论证(即希尔柏特相信一切数学问题都可解决这事是未证明的)现在可以加强而成为驳斥它了，如果可解决性是指一致地可解决[1] 并且邱吉论点被接受的话. 邱吉论点与直觉主义的关系将在后讨论(§82).

直觉主义者并没有把上述的关于 $\varepsilon y R(x, y)$ 的定义作为真正定义了一个函数，因为它的能行地可计算性并未证明. 但直觉主义地，可把我们关于 $\varepsilon y R(x, y)$ 的讨论施于下列谓词的讨论:

$$\{R(x, w) \& (z)_{z<w}\overline{R}(x, z)\} \vee \{(\overline{Ey})R(x, y) \& w = 0\}.$$

古典地说，这个谓词，设名之为"$P(x, w)$"，是 $\varepsilon y R(x, y)$ 的代表谓

1) 指判定过程——俄译注.

词. 但直觉主义地说来，我们却不能证明 $(x)(E!w)P(x, w)$，即不能证明 $P(x, w)$ 是一函数的代表谓词(参见§ 41; $(x)[(Ew)P(x, w) \equiv (E!w)P(x, w)]$，参见 *174b, *171).

因为邱吉论点的作用在于把向来含混地理解的总体加以明确规定，所以我们对该论点是不能证明的，但我们却要求一些明证，指出每一个特殊函数，凡是被我们的直觉观念认为是能行地可计算的，都是一般递归的. 这论点本来可以看作是关于能行地可计算性这个直觉观念的假设，亦可看作能行地可计算性的数学定义；如用后一看法，我们要求有些明证以指出，根据这定义所发展的理论具有原来所希望的意义.

邱吉论点之逆，即每个一般递归函数 $\varphi$ 都是能行地可计算的，我们认为已被直觉观念所确认了(参见§60). 在这里，我们应用定义: 'E 递归地定义 $\varphi$'，它说，任给 $x_1, \cdots, x_n$，总有一个由 E 到方程 $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{x}$ 的推演，而这方程便表示: $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 的值为 $x$ (或者，如果我们把计算过程建基于定理 IX(30)，我们便用 (29)；如果建基于定理 IX 系，我们便用 (1)). 在作出一个结论说我们有一个能行的计算过程时，出现于 'E 递归地定义 $\varphi$' 这个定义中的 (或在(29)中或在(1)中) 存在量词必须作可构造性的理解 (§ 13)；同样，在 '$\varphi$ 是一般递归的' 这个定义中的存在量词亦然，这定义说，有一个 E 递归地定义 $\varphi$ (或在定理 IX 中说，可找一个哥德尔数 $e$；或者定理 IX 系中说，可对 (I)—(VI) 作一个有限次的应用).

换句话说，如果已经证明一函数为一般递归，必须该证明* (demonstration) 为能行的证明，我们才能够说，该函数是能行地可计算的(参见邱吉[1936 脚注 10]).

我们现在把关于邱吉论点(及§ 61 末论点 I*)的明证综结为三项 (A)—(C)，此外还有项 (D)，它可包括于 (A) 之内. 这些明证中有些将在今后章节中更详细地给出.

(A) 由利的 (heuristic) 证明.

(A1) 就已探究过的来说，每个特殊的能行地可计算函数，以

及每个由一些函数而定义别的函数的运算，都证明是一般递归的．一大批的能行地可计算函数，各种能行地可计算函数集，以及各种由一些函数而定义别的函数的运算，特意挑选以穷尽各种已知类型的，都已经探究过了．

（A2）用以证明好些能行地可计算函数是一般递归函数的方法，已经发展到这样的地步，使得几乎没有疑问地否定了下列的可能性，即能够写出一个能行过程以决定一函数的值，但却不能用上述各方法把它变成该函数的一般递归定义．

（A3）有好些方法可以期望得出一般递归函数类以外的函数的，但一经探究都表明了，或者这方法并未超出一般递归函数的范围，或则该新函数不能当作是能行地可定义的，即它的定义并没有给出能行计算过程．在特例，如康托的对角方法便属于后者．（属于前者的例子见于§65 例 1．）

（B）各种表述的等价性．

（B1）对能行地可计算函数集可有好几种的刻划，都具有同样的由利的特性（A）．但它们都和一般递归性相等价；即它们所描述的函数集都是一样的．

的确，独立地而且几乎同时地出现了三个观念，即**一般递归性，λ 可定义性**（由邱吉[1933]及克林[1935]相继完成；参见邱吉[1941]）及**可计算性**（杜令[1936—7]，坡斯特[1936]）．λ 可定义函数和一般递归函数的等价性由邱吉[1936]及克林[1936a]所证明（又参见邱吉[1936]注 16 所引的罗歇的著作）．可计算函数与 λ 可定义函数（因而与一般递归函数）的等价性由杜令[1937]所证明．

由哥德尔[1936]所描述的（很简短地）在一形式系统 $S_1$ 内**可表象函数**（§59）的观念是第四个与一般递归函数相等价的观念，只要 $S_1$ 是简单相容的（如罗歇在一文摘[1936a]中所指出的）．

另一条路由坡斯特（[1943]，[1946]）所给出，他用所谓**典型系统或正规系统**．就它的叙述而言，它只直接给出可递归枚举性，但

正如§ 60 例 6 所说的，从此便可以得出一般递归性了[1]。

几个非常不同的观念都引到同一的函数集，这事实便是一个极坚强的证据，指明这一集是非常根本的。

(B2) 不大重要但也值得一提的是，各主要观念的几种表述式都是等价的，亦即这些观念具有一种"稳定性"。

例如，对一般递归性而言，其形式体系可以有好几种选择(§ 55)。我们还可以给出一种表述（$\mu$-**递归性**），不建基于任何形式体系而只用模式 (I)—(VI)（§57 定理 III 及§ 58 定理 IX 系)，或用模式(III) (IV) (VI) 而以 $x+y$, $x\cdot y$ 及 $\delta_y^x$($=1$ 当 $x=y$时，$=0$ 当 $x\neq y$ 时)作为开始函数(克林 [1936b])。（又参见 J. 罗宾孙[1950].）

$\lambda$ 可定义性观念亦有两变形 $\lambda$-$K$ **可定义性**(由罗歇所研究，参见克林 [1936a] 脚注 12) 及 $\lambda$-$\delta$ **可定义性**(邱吉[1935])。又有一个平行的发展，由桑芬克尔 (Schönfinkel) [1924] 及寇里(Curry) [1929，1930，1932] 开始而由罗歇 ([1935，1942a*]) (又参见寇里[1948—9])所继续，从而引出一个**组合可定义性**的观念，罗歇证明它与 $\lambda$ 可定义性相等价。

可机算性的定义在细节上亦可有变异，见后(第十三章)。

哥德尔使用越来越高型的变元(参见§ 12)因而得出一系列的系统阶梯 $S_i(i=1,2,3,\cdots)$，哥德尔[1936] 中的 $S_1$ 是该阶梯的第一个。哥德尔指出[2]："还可以证明，在系统 $S_i$ 之一中，甚至于在超穷级的系统中可表象的函数，都已经在 $S_1$ 中可表象，因此'可表象的'这个概念在某种意义上说是'绝对的'，而几乎所有一切已知的数学概念(例如，可证性，可定义性等)都非常本质地依赖于它们所根据的系统"。这一种函数不多不少地亦是可表象于我们第四章的数论系统内或表象于§ 49 引理 18b 所描述的罗宾孙系统之内

---

1) 马尔科夫[1950，1951，1954]作为算法概念的精确化而建立的规范算法概念，它本身同时又引到了能行地可计算函数这概念的精确化。如捷特洛斯 (B. K. Детловс) [1953] 所指出的，这个精确化亦等价于一般递归函数的概念——俄译注。

2) 见在文献(哥德尔 [1936]) 中提到的那个附注——俄译注。

的(由§59定理32以下事实：在哥德尔的$S_1$内可表象性是等价于一般递归性的)．在这些系统内可表象性彼此之间的等价性是须假设哥德尔的系统以及我们第四章的系统是简单相容的．（罗宾孙系统的简单相容性将见于§79定理53(a)．）具有同样的可表象公式集的还有两个系统，即($Z^0$)及($Z_{\infty}$)，由希尔柏特-伯尔奈斯[1939]附录II所给出；这两者都是$\mu$递归性的形式体系(($Z_{\infty}$)还用到范式)．（莫斯托夫斯基[1947]表述§57定理V时，是建基于在系统$S$内一谓词$P$的可解决性(§59)这个观念的，$S$只受制于很广泛的条件，根据下面的(D1)及论点II，我们将看见，在一个具有能行规则的系统$S$内，只有一般递归函数才是可表象的；但莫斯托夫斯基还讨论到形式系统的非构造性的推广（就我们的意义言是非构造性的)．）

(C) 杜令的计算机器概念．

杜令的可机算函数([1936—7])是那些可用机器计算的函数，照他的分析，该机器是用以重新作出计算员所能实行的一切运算，依照预先指定的指令而动作．因此，杜令的观念是直接企图数学地表述能行地可计算性观念的结果，其它的观念则是从不同的地方出发的，只是后来才和能行地可计算性等同起来的．因此杜令的表述便是邱吉论点的一个独立的叙述(但用等价的话)．坡斯特[1936]也给出类似的表述[1]．

在(A)(尤其(A1))处所提到的著作原来并非全为一般递归性或者一般递归性所包含的特殊递归性观念(§55)而作的，它们大多数是为$\lambda$可定义性(克林[1935])或可机算性(杜令[1936—7])而作的．但根据(B)，在研究各种不同观念时所收聚的由利的明证以及其它明证都可以适用于其中任何一种观念．在(A1)中所收聚的用以证明一般递归性的方法都可以用于(A2)．

(A2) 所说的情形在本章内将就部分递归函数理论而叙述

1) 郭尔莫哥洛夫([1953]摘要)建议把算法概念加以精确化，以直接映象我们关于算术的直觉上的表象．借助于郭尔莫哥洛夫算法以计算的函数集，亦和一般递归函数集相同，这又给出邱吉论点的另一变型——俄译注．

（参见§66）．我们将在下章讨论可机算性，并在§68，§69证明了可机算性与一般递归性是等价的（参见（B1）），并述及可机算性各种表述的等价性（参见（B2）），并在§70对（C）给以明证．

（D）符号逻辑与符号算法．

邱吉[1936]（本质上）给出下列的论证，指出“有两个很自然地暗示到的方法，但它们也不可能得到比上面所提议的更为一般的能行地可计算性的定义”（页358）．

（D1）设我们处理一函数 $\varphi(x)$ 及一形式体系，它们具有下列性质．公理集是有限的或（如果无穷）可能行枚举的，推论规则集亦然；每个推论规则都是能行地可施行的运算．我们能行地可认出下列的公式 P(*x*, *w*)：它给出变目为 *x* 时 $\varphi$ 的值 *w*，并由它可以能行地读出这一数 *w*．这样的公式 P(**x**, **w**)（它对 $\varphi$ 给以正确的值也只给以正确的值）在系统内是可以证明的，即 $\varphi$ 是‘可表象的’§59（不过这里我们并不坚持，P(**x**, **w**) 须由某 P(x, w)把 x, w 代以 **x**, **w** 而得）．如果容许下列的释义，即由刚才所提到的元数学函数及谓词的能行性，便可推得在适当的哥德尔编号下，其相应的数论函数及谓词是一般递归的，那末 $\varphi$ 便是一般递归的．因为，根据§58定理 IX 的证明或§59(c)，有某些一般递归 $\psi$ 及 $R$ 使得，$(x)(Ey)R(x, y)$ 及 $\varphi(x)=\psi(\mu y R(x, y))$；故可应用§57定理III．

（D2）试考虑当计算一函数 $\varphi(x)$ 的值时其符号算法，这是指一种方法，根据它，任给 $x$，都可以得到一有限的表达式序列 $E_{x0}$, $E_{x1}, \cdots, E_{xr_x}$（在某记法下），且具有下列的形状．给出 $x$ 后，可以能行地找出第一个表达式 $E_{x0}$，给出 $x$ 及表达式 $E_{xi}(i \leqslant j)$ 后，可以能行地认出这算法是否终止（即是否 $j=r_x$），如是，则 $\varphi(x)$ 之值可以能行地找出；如不是，则下一表达式 $E_{x,j+1}$ 可以能行地找出．如果所述的能行函数及谓词在某种哥德尔编号之下变成一般递归的，则 $\varphi$ 又是一般递归的．因为我们可用在（D1）处的推理，而把 $(x, E_{x0})$ 当作公理，而由 $(x, E_{x0}, \cdots, E_{xj})$ 到 $(x, E_{x0}, \cdots, E_{xj}, E_{x,j+1})$ 的运算当作推理规则．

简言之，(D1) 及(D2)表明了，如果在一形式系统或符号算法中用以定义一函数的各个运算或规则是一般递归的，则全体亦是一般递归的. 因此我们可把(D1) 及(D2)作为(A1)项下的定义方法或定义运算的一个特例.

注意，(D1)与(D2)中用到具有特殊结构的形式体系或符号算法，例如，我们所已知的特殊形式系统和算法. 在别处(§ 30，§ 60，§61)我们把算法用得更广义一些，指任何计算(或判定)过程；在论点 II 与定理 XIII (§ 60) 处，我们亦同样地把形式系统这观念加以推广. 我们在讨论邱吉论点的明证时，把特殊形状的算法和形式系统作为例子，然后在讨论更广义的算法和形式系统时，我们又使用这论点(如在§ 60，§ 61 那样)，这事当然并没有什么恶性循环.

如果我们只讨论满足论点 II ($n+1$ 个变元的) 的各系统，则可表象于各种形式系统内的 ($n$ 元) 函数 (不同函数可表象于不同的系统内)便都是一般递归的，因此各函数便都可表象于同一系统内(例如，在 (B2) 所举的各系统中任一系统之内).

## § 63. 部分递归函数

和§ 62 起首处一样，设 $R(x, y)$ 为能行地可判定的谓词. 今考虑下过程，给定了 $x$，继续地对每个命题 $R(x, 0)$，$R(x,1)$，$R(x, 2)$，$\cdots$判定其真假，直到有一个为真，把这时 $R(x, y)$ 的第二个变目取出来. 当且仅当 $(Ey)R(x, y)$ 时，用这过程可在有限步骤内把一自然数 $y$ 找出. 因此这过程可以看作是计算 $x$ 的数学函数的一个算法，该函数是定义于自然数子集 $\hat{x}(Ey)R(x, y)$之上的. 所计算的函数是'使得 $R(x, y)$ 成立的最小的 $y$'，用符号表示便是: '$\mu y R(x, y)$'.

很可能，无法把这函数 $\mu y R(x, y)$ 的定义扩张，推广到一切自然数，使得仍有算法来计算这个完全有定义的数论函数. 在§ 62 处我们已指出，其中一个扩张，$\varepsilon y R(x, y)$，是能行地可计算的当且仅当 $(Ey)R(x, y)$ 是能行地可判定的；而该方法并指出了，除

非$(Ey)R(x,y)$是能行地可判定的，否则把$\mu yR(x,y)$对全体自然数所作的任何扩张，都不是能行地可计算的.

这可用一般递归函数理论的用语而叙述. 邱吉[1936]把定义于自然数$n$矢集的子集上的一个函数$\varphi(x_1,\cdots,x_n)$叫做潜伏递归的，如果有一个一般递归函数$\varphi'(x_1,\cdots,x_n)$使得，对于凡使$\varphi(x_1,\cdots,x_n)$有定义的$n$矢$x_1,\cdots,x_n$，都有

$$\varphi'(x_1,\cdots,x_n)=\varphi(x_1,\cdots,x_n).$$

如果$R(x,y)$是一般递归的，则$\mu yR(x,y)$是潜伏递归的当且仅当$(Ey)R(x,y)$是一般递归的. 因为，

(59) $\varepsilon yR(x,y)=\mu w[R(x,w)\vee\{\overline{(Ey)}R(x,y)\&w=0\}]$;

故由§45*D及§57定理III可知，如果$(Ey)R(x,y)$是一般递归的，则$\varepsilon yR(x,y)$便是$\mu yR(x,y)$的一般递归的扩张$\varphi'(x)$. 反之，如果$\mu yR(x,y)$是潜伏递归而以$\varphi'(x)$作为一般递归扩张，则$(Ey)R(x,y)\equiv R(x,\varphi'(x))$，故$(Ey)R(x,y)$便是一般递归的.

**例1** 故由§57定理V(15)，$\mu yT_1(x,x,y)$不是潜伏递归的(克林[1938, 1943*])，而$\varepsilon yT_1(x,x,y)$不是一般递归的(克林[1936]).

当计算函数$\varphi$时，对一给定的$x$，该算法所以不能给出一数以作为$\varphi(x)$之值，可能由于不停止(因此，不论已经运算了多少步骤，算法的规则恒要求再作下一步骤)；它亦可能虽停止而不给出一数作为$\varphi$之值. 我们可把算法修正，使凡对一个$x$该算法停止而不给出一数作为值时，新算法便给出0作为值. 这新算法便计算了$\varphi$的一个扩张函数$\varphi'$，它恰巧在原算法(及新算法)停止时有定义.

**例1**(续) 因此任一算法，只要它对于每一个使$(Ey)T_1(x,x,y)$成立的$x$都给出$\mu yT_1(x,x,y)$作为其值，则这算法必不能对每一个$x$都停止(用§60论点I).

如果有一算法来判定，给出$x$后，由某一算法所计算的函数$\varphi(x)$在$x$处有定义与否，则我们必可定出一新算法，以计算$\varphi'(x)$，后者是把$\varphi(x)$扩张到全体自然数后所得的. (又参见§64

例5.)

**例1**(续) 因此，不可能有算法来判定，给出 $x$ 后，$\mu y T_1(x, x, y)$ 是否有意义，这由它的定义条件即 $(Ey)T_1(x, x, y)$ 亦可直接看出(参见§60定理XII).

我们亦可以不扩张函数 $\varphi(x)$ 而修正该算法，使得凡 $\varphi(x)$ 没有定义的地方该算法必不停止(上述的关于 $\mu y R(x, y)$ 的算法已经属于这一种了). 要这样做，只须凡原给的算法停止而不给出一数以为值时，新算法便要求一新步骤并且永远继续下去. 本章后面所讨论的算法，我们都假定是属于这一种的.

如果 $\chi(x)$ 对一切自然数都有定义，而 $\psi(x)$ 则对自然数的真子集有定义，但该子集却包括了 $\chi(x)$ 的值域，又这两函数均是能行地可计算的. 则 $\psi(\chi(x))$ 是完全有定义的而且能行地可计算的. $\psi(x)$ 可以是 $\mu y T_1(x, x, y)$. 因此能行地可计算的函数即使限制其定义域于自然数的真子集，但在构作其它的定义于整个自然数集上的能行地可计算函数时，仍然是有用的.

亦有些基础问题，其中所要求的能行地可计算函数只须在自然数的真子集上有定义. 这出现于可构造性序数的理论中(邱吉-克林[1936]，克林[1938]，邱吉[1938])，亦出现于直觉主义逻辑的研究中(参见§82).

这些考虑指出了，把部分有定义的函数包括于我们的能行地可计算性的处理中是很合适的. 因此我们便把一般递归函数类扩张，使包括一些不完全有定义的函数，所得的函数类叫做'部分递归函数'. 把一般递归函数类作这样的扩张，在技术上的好处，即使我们的目的只在于就完全有定义的函数而支持邱吉论点(论点I及I*)，亦将于§§65与66中充分看出. 在本节之末，我们将就部分有定义的函数而用部分递归函数来叙述邱吉论点(论点I† 及I*†).

为固定我们的用语起见，凡由任何自然数 $n$ 矢集的子集(真或假子集)而到一自然数的函数叫做部分函数. 换句话说，部分函数 $\varphi$ 是下列的函数，当以任一自然数 $n$ 矢 $x_1, \cdots, x_n$ 作为变目时，至

多取一自然数 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$以为值. 如果当以 $n$ 矢 $x_1, \cdots, x_n$ 为变目时, $\varphi$ 有一自然数为值, 则说对该 $n$ 矢 $\varphi$ (或 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$) 有定义; 如果 $\varphi$ 没有自然数作为其值, 则说对该 $n$ 矢 $\varphi$ (或 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$) 没有定义(有时写为 $\mathfrak{u}$). 部分函数的定义域是指使 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$有定义的 $n$ 矢 $x_1, \cdots, x_n$ 所组成的集. 当它包括所有的 $n$ 矢时我们便得到通常的(完全有定义的)数论函数; 否则便是不完全有定义的函数. 当定义域为空集时, 我们便得到完全无定义的函数.

要得到'部分递归函数'(克林[1938])的定义,我们把厄尔勃朗-哥德尔的'一般递归函数'的定义修改,使含有部分函数如下.

当 $\psi_1, \cdots, \psi_l$ 为部分函数(分别为 $m_1, \cdots, m_l$ 元的)时,我们当然把 $E^{\psi_1 \cdots \psi_l}_{g_1 \cdots g_l}$ (参见§ 54)理解为方程

$$\mathbf{g}_j(\mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_{m_j}) = \mathbf{y} (j = 1, \cdots, l)$$

的集[1],这里,对每个 $j$, $\psi_j$ 都是对 $m_j$ 矢 $y_1, \cdots, y_{m_j}$ 有定义的,而且有 $\psi_j(y_1, \cdots, y_{m_j}) = y$. 对部分函数 $\varphi$ 而言, § 54 中所给的 E 递归地由 $\psi_1, \cdots, \psi_l$ 而定义 $\varphi$ 的定义须作如下的修整, (为强调起见) 把"当且仅当 $\varphi(x_1, \cdots, x_n) = y$" 改为"当且仅当 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 有定义且 $\varphi(x_1, \cdots, x_n) = x$". 那里所列的第二说法的定义(具有完备性及相容性的) 仍然可用, 只要把关于部分函数 $\varphi$ 的 $E^{\varphi}_f$ 和上面的 $E^{\psi_1 \cdots \psi_l}_{g_1 \cdots g_l}$ 作同样理解便成. 最后,我们说(相应于§ 55 的定义), 部分函数 $\varphi$ 是部分递归于 $\psi_1, \cdots, \psi_l$ 的,如果有一方程系 E 递归地由 $\psi_1, \cdots, \psi_l$ 而定义 $\varphi$.

就泛函 $\varphi = \mathbf{F}(\psi_1, \cdots, \psi_l)$ 的情形而言, 这里 $\psi_1, \cdots, \psi_l$ 经历部分函数 (可具有任何限制) 而变, 我们说, $\mathbf{F}$ 是部分递归的或说 $\varphi$ 是一致地部分递归于 $\psi_1, \cdots, \psi_l$ 的, 如果 (对于固定的 $n, l, m_1, \cdots, m_l$) 有一个与 $\psi_1, \cdots, \psi_l$ 无关的这样的 E. 和从前一样, 除非强调,我们经常把"一致地"字样删去.

对不是预先知道的 $\varphi$ 而言(正如§ 55 末那样): 一方程系 E 递

---

1) 参见 292 页脚注——俄译注.

归地由部分函数 $\psi_1, \cdots, \psi_l$ 而定义一个 $n$ 元部分递归函数是指，对于每个自然数 $n$ 矢 $x_1, \cdots, x_n$，至多只有一数字 $\mathbf{x}$ 使得 $E^{\psi_1 \cdots \psi_l}_{g_1 \cdots g_l}$，$E \vdash f(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{x}$ (这里，f，$g_1, \cdots, g_l$ 同前)．这里并不要求完备性．被 E 所递归地定义的函数是具有下列性质的函数 $\varphi$：$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 对给定的 $n$ 矢 $x_1, \cdots, x_n$ 有定义，当且仅当对这些 $x_1, \cdots, x_n$ 言，有一个这样的 $\mathbf{x}$．这时便有 $\varphi(x_1, \cdots, x_n) = x$，而 $x$ 为数字 $\mathbf{x}$ 所对应的数．

部分递归函数包括一般递归函数作为特例，这时其定义域包括所有的自然数 $n$ 矢 $x_1, \cdots, x_n$．

当 $R(x_1, \cdots, x_n, y)$ 是一般递归谓词时，部分函数 $\mu y R(x_1, \cdots, x_n, y)$(当且仅当 $(Ey)R(x_1, \cdots, x_n, y)$时它有意义，这时它的值是使得 $R(x_1, \cdots, x_n, y)$ 成立的最小的 $y$) 便是部分递归的．在§57 定理 IV 的证明的第一部分(iv)中已证明了这点(但没有用现在的用语)．(故恰当§57(1b) 成立时，$\mu y R(x_1, \cdots, x_n, y)$ 是一般递归的．)

**例 1** (续完)　$\mu y T_1(x, x, y)$ 是部分递归的．

就部分函数 $\chi_1, \cdots, \chi_m, \psi$ 而言，除非另有声明，否则我们把 $\psi(\chi_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, \chi_m(x, \cdots, x_n))$作为有定义的当且仅当 $\chi_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, \chi_m(x_1, \cdots, x_n)$全有定义且其值作成这样 $m$ 矢而 $\psi$ 对该 $m$ 矢有定义．这叫做 $\psi(\chi_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, \chi_m(x_1, \cdots, x_n))$ 的弱义．当代入不是这种标准形时(参见§44)，我们亦使用这个约定．这个约定所除去的含混性发生于下列情形时；当 $\psi$ 为常函数时或者对其它的变元代入后变成某变元的常函数时．例如，当有一 $x$ 使 $\chi(x)$ 为无定义时，$0 \cdot \chi(x)$ 取值 0 或无定义？依照我们的约定，它将是无定义的．

对部分谓词我们亦使用同样的约定．例如，把部分函数 $\psi(x_1, \cdots, x_n)$及 $\chi(x_1, \cdots, x_n)$代入完全有定义的谓词 $y_1 = y_2$ 时，我们得到一个部分谓词 $\psi(x_1, \cdots, x_n) = \chi(x_1, \cdots, x_n)$．对一个给定的 $x_1, \cdots, x_n$ 言，这谓词有定义当且仅当 $\psi$ 与 $\chi$ 同有定义，这时如果 $\psi$ 与 $\chi$ 有同样的值，它取真命题以为值，如果 $\psi$ 与 $\chi$ 有不

同的值，它取假命题以为值.

同样地，把部分谓词 $Q(x_1,\cdots,x_n)$ 及 $R(x_1,\cdots,x_n)$ 代入真值函数 $Y_1\equiv Y_2$（'等价式'，§45）时，我们得一个部分谓词 $Q(x_1,\cdots,x_n)\equiv R(x_1,\cdots,x_n)$，它有定义当且仅当 $Q(x_1,\cdots,x_n)$ 及 $R(x_1,\cdots,x_n)$ 同有定义，这时它便断言这两命题的等价性，为真为假，视该两命题是否等价而定.

现在我们引入"$\psi(x_1,\cdots,x_n)\simeq\chi(x_1,\cdots,x_n)$"以表示，对特殊的 $x_1,\cdots,x_n$ 言，只要 $\psi(x_1,\cdots,x_n)$ 及 $\chi(x_1,\cdots,x_n)$ 中有一个有定义，则另一个亦有定义且其值相同（因此，如果有一无定义，则另一亦无定义）. 注意(i)"$\psi(x_1,\cdots,x_n)=\chi(x_1,\cdots,x_n)$"与(ii)"$\psi(x_1,\cdots,x_n)\simeq\chi(x_1,\cdots,x_n)$"之间的区别，当 $\psi(x_1,\cdots,x_n)$ 与 $\chi(x_1,\cdots,x_n)$ 有一无定义时便可以看得出来. 这时(i)无定义而(ii)为真或假看另一个没有定义抑有定义而定. 我们把 $=$ 与 $\simeq$ 分别叫做弱相等及完全相等. 我们对 $\simeq$ 的使用便是上面的约定的一个例外.

同样，"$Q(x_1,\cdots,x_n)\cong R(x_1,\cdots,x_n)$"表示，对特殊的 $x_1,\cdots,x_n$ 言，只要 $Q(x_1,\cdots,x_n)$ 与 $R(x_1,\cdots,x_n)$ 有一有定义则另一亦有定义，且它们所取的值是两个等价的命题(因此有一无定义则另一亦然). $\equiv$ 及 $\cong$ 分别叫做弱等价及完全等价.

这时，$(x_1),\cdots,(x_n)[\psi(x_1,\cdots,x_n)\simeq\chi(x_1,\cdots,x_n)]$，或者根据 $x_1,\cdots,x_n$ 的全称性释义写为 $\psi(x_1,\cdots,x_n)\simeq\chi(x_1,\cdots,x_n)$，表示 $\psi$ 与 $\chi$ 作为函数时是相等的，即它们有同样的定义域，并且在这域内它们有相同的值. 同样，$(x_1)\cdots(x_n)[Q(x_1,\cdots,x_n)\cong R(x_1,\cdots,x_n)]$，或者根据 $x_1,\cdots,x_n$ 的全称性释义写为 $Q(x_1,\cdots,x_n)\cong R(x_1,\cdots,x_n)$，表示，作为谓词时，$Q$ 与 $R$ 是等价的.

我们说部分函数 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 是谓词 $P(x_1,\cdots,x_n)$ 的代表函数，如果 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 只取 0，1 为值，并且

$$P(x_1,\cdots,x_n)\cong\varphi(x_1,\cdots,x_n)=0;$$

换句话说，视 $P(x_1,\cdots,x_n)$ 的值为 t 或 f 或 u，则 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 的

值为 0，1 或u.

我们说，一部分函数 $\varphi$ 或部分谓词 $P$ 是部分递归于部分谓词及函数 $\Psi$ 的，如果把 $P$, $\Psi$ 中的谓词换成它们的代表函数时，相应的陈述是成立的.

相等性谓词＝与≃的作用是不同的. 弱相等性＝将作为构成部分递归谓词的运算. 我们马上可以看见（定理 XVII ## 14，$C^{\dagger}$），$\psi(x_1,\cdots,x_n)=\chi(x_1,\cdots,x_n)$是部分递归于 $\psi$ 与 $\chi$ 的. 完全相等性≃用以表示我们关于部分递归谓词的理论. 当 $\psi$ 与 $\chi$ 为部分递归时，谓词 $\psi(x_1,\cdots,x_n)\simeq\chi(x_1,\cdots,x_n)$ 未必恒是部分递归的（参见§ 64 例 7）.

对两个等价性≡及≅亦有类似的附注（参见定理 XVII#D 及§ 64 例 8）.

特殊函数及谓词## 1—21(§ 44，§ 45) 由于是原始递归的，故是一般递归的（§ 55 定理 II），因此是部分递归的. 若把模式 (IV) (V) 重写，把"＝"改为"≃"，并依我们的约定，把右端的表达式读成弱义，便得到当假定函数及谓词为部分有定义时的'$\varphi$ 原始递归于 $\Psi$' 的观念. 例如，在原始递归式 (Va) 中，对一给定的 $y$ 言，$\varphi(y')$ 有定义当且仅当 $\varphi(y)$有定义并且 $z$ 取值 $\varphi(y)$时 $\chi(y, z)$ 有定义（故根据归纳法，必须所有的 $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\cdots$, $\varphi(y)$ 都有定义）. 通过代表函数，可把这观念由函数推广于谓词去. 前述的## A—G(§ 44，§ 45)的证明亦可适用，只须把结果的函数及谓词理解为适当的弱义便成，例如，当且仅当 $\varphi(0),\cdots,\varphi(z-1)$ 全有定义时，$\sum_{y<z}\psi(y)$ 才有定义，当且仅当 $Q$ 与 $R$ 有定义时，$Q\vee R$ 才有定义，当且仅当 $R(0),\cdots,R(z-1)$全有定义时，$(Ey)_{y<z}\cdot R(y)$ 才有定义，等等. 在每种情形都容易由证明而推知所应该采取的适当的弱义. 如把 (IV) (V) 理解为这种意义，则定理 II 的证明(§ 54，§ 55)仍可适用. 故得:

**定理 XVII** (a) 凡由部分函数 $\Psi$ 出发，经过一系列的应用部分递归模式（泛函）所定义出来的函数 $\varphi$ 都是部分递归于 $\Psi$ 的. 模

式(I)—(V)是部分递归的. (b) ＃＃ 1—21 的函数及谓词是部分递归的. 又如果把"原始递归"读作"部分递归",并把结果的函数及谓词理解为弱义,则＃＃A—G仍然成立(叫做＃＃ $A^+$—$G^+$).

我们上面把$\mu$运算子看作由完全定义的谓词 $R(x_1,\cdots,x_n,y)$ 而作出部分函数 $\mu yR(x_1,\cdots,x_n,y)$ 的运算子. 如果 $R(x_1,\cdots,x_n,y)$为部分谓词,我们把 $\mu yR(x_1,\cdots,x_n,y)$ 理解如下,它有定义当且仅当有一$y$使 $R(x_1,\cdots,x_n,y)$为真且 $R(x_1,\cdots,x_n,0),\cdots,R(x_1,\cdots,x_n,y-1)$ 全有定义时,这时它的值是最小的这样的 $y$. 例如,如果 $R(0)\cong R(1)\cong \mathfrak{f}$, $R(2)\cong \mathfrak{t}$, 则 $\mu yR(y)\simeq 2$, 但如果 $R(0)\cong \mathfrak{f}$, $R(1)\cong \mathfrak{u}$, $R(2)\cong \mathfrak{t}$, 则

$$\mu yR(y)\simeq \mathfrak{u}.$$

今把§57(VI)的"$=\mu y$"读为"$\simeq \mu y$",作为对任何给定的部分函数 $\chi(x_1,\cdots,x_n)$或部分谓词 $R(x_1,\cdots,x_n,y)$的泛函. 设方程系E照定理III的证明那样作出来了. 如果 $\mu yR(x_1,\cdots,x_n,y)$有定义,则 $E_h^x$, $E\vdash \mathrm{f}(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n)=\mathbf{x}$,当 $x=\mu yR(x_1,\cdots,x_n,y)$ 有定义时,而对此外的 $\mathbf{x}$ 则不会有这结果,正和从前同样(§57(iii)). 反之,如果 $E_h^x$, $E\vdash \mathrm{f}(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n)=\mathbf{x}$, $\mathbf{x}$为数字,则 $\mu yR(x_1,\cdots,x_n,y)$ 有定义的条件满足了(注意,由＃$B^+$, $\prod_{s<y}\chi(x_1,\cdots,x_n,s)$ 之有定义,当且仅当 $s=0,1,\cdots,y-1$ 时 $\chi(x_1,\cdots,x_n,s)$全有定义). 因此我们得:

**定理 XVIII**(=定理 $\mathrm{III}^\dagger$) 模式(VI)是部分递归的. 故由定理XVII,由部分函数及谓词$\Psi$出发,经过使用(I)—(VI)而得的每一函数$\varphi$是部分递归于$\Psi$的.

现在我们看看,当我们把 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 取为部分递归函数时,范氏定理(§58定理IX)将成怎样. 设E递归地定义$\varphi$. 这时(24),(26)未必成立,不过(由(26))可以把删去全称量词后所得的$(Ey)S_n(e,x_1,\cdots,x_n,y)$作为使 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$有定义时 $x_1,\cdots,x_n$ 所应满足的条件. 如果"="改为"$\simeq$",则(25)因而(27)是成立

的；如果 $x_1, \cdots, x_n$ 不作全称性释义而只是对使 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 有定义的每个 $n$ 矢 $x_1, \cdots, x_n$ 而言的，则(28)亦是成立的. 把我们对 $\mu$ 运算子的理解而应用于完全有定义的谓词，可见恰巧当 $(Ey) S_n(e, x_1, \cdots, x_n, y)$ 时，$U(\mu y S_n(e, x_1, \cdots, x_n, y))$ 有定义. 因此(28)两端具有同样的定义域，故当把"="换为"$\simeq$"时，(28)对一切 $x_1, \cdots, x_n$ 都成立. 作了同样的修整后，定理 IX* 的证明（在定理 X 之下）亦完全可用，只须各假定函数 $\psi_1, \cdots, \psi_l$ 完全有定义便成（否则，例如，Df12* 句 0 中的 $(Eu_1)_{u_1<y}[\mathrm{N}u((y)_{0,1,1}, u_1)\&\mathrm{N}u((y)_{0,2}, \psi(u_1))]$ 以及 $\tilde{\phi}(y)$ 便可能有时无定义，而这时在证明中我们却要求它有定义）. 故得

**定理 XIX** (a)（= 定理 IX†）. 任给一个部分递归函数 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$，可找出一数 $e$ 使得

(60) $$\varphi(x_1, \cdots, x_n) \simeq U(\mu y T_n(e, x_1, \cdots, x_n, y))$$

（而 $(Ey)T_n(e, x_1, \cdots, x_n, y)$ 便是函数 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 有定义的条件），且有

(61a) $$(x_1)\cdots(x_n)(y)[T_n(e, x_1, \cdots, x_n, y) \to U(y) \simeq \varphi(x_1, \cdots, x_n)].$$

(b)（= 定理 IX*†）. 设 $\Psi$ 表示任意 $l(\geq 0)$ 个分别为 $m_1, \cdots, m_l$ 元的完全有定义的函数与谓词，则把上文的"部分递归""$T_n$"分别改为"部分递归于 $\Psi$""$T_n^{\Psi}$"后，结果仍然成立.

今推广§58 中的定义，当 $e$ 使得(60)因而(61a)成立时，我们说，$e$ 递归地定义 $\varphi$ 或 $e$ 为 $\varphi$ 的一个哥德尔数；当 $\varphi$ 部分递归于完全有定义的函数 $\Psi$ 时仿此. 如前，若用代表函数 $\varphi$，我们可把这些观念推广到谓词 $P$ 去.

由定理 XIX 的证明，如果 E 是递归地定义 $\varphi$ 的方程系（递归地由完全有定义的 $\Psi$ 而定义 $\varphi$，具有适当的给定函数字母），而 $e$ 为 E 的哥德尔数，则 $e$ 递归地定义 $\varphi$（递归地由 $\Psi$ 而定义 $\varphi$）.

**例 2** 设 $f, g$ 分别为函数 $\psi$ 与 $\chi$ 的哥德尔数. 则谓词 $\psi(x) \simeq \chi(x)$ 可表示为

$$(y)[\{T_1(f, x, y) \to (Ez)(T_1(g, x, z)\&U(y) = U(z))\}$$

$\&\{T_1(g, x, y) \to (Ez)(T_1(f, x, z)\&U(y) = U(z))\}]$.

**系** 每个部分递归函数$\varphi$都可由应用模式(I)—(VI)而作成；每个部分递归于完全有定义的函数及谓词$\Psi$的函数$\varphi$，都可由$\Psi$出发，应用模式(I)—(VI)而作成.

由(60)所给出的用以计算部分递归函数$\varphi$的算法，当$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$无定义时，它是不会停止的.

由定理可知，部分递归函数$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$的定义域呈下形$\hat{x}(Ey)R(x_1, \cdots, x_n, y)$，而$R$原始递归，当$n = 1$时，其定义域(如果有元素)是可递归枚举的(§60 定理 XIV).

**例 3** 因此，由§57定理V(12)，以$\hat{x}(y)\overline{T}_1(x, x, y)$为定义域的任何部分函数不会是部分递归的.(由下文的论点$I^\dagger$(a))，我们不能作出任何算法，恰巧只对于使得$(y)\overline{T}_1(x, x, y)$成立的$x$(不多不少地)能给出一自然数以为值.在特例，用下法定义的函数$\varphi$

$$\varphi(x) \simeq \begin{cases} 0 & \text{当 } (y)\overline{T}_1(x, x, y) \text{ 时} \\ u & \text{此外情形时} \end{cases}$$

不是部分递归的.这函数对在它的定义域内的$x$言是能行地可计算的，它也是潜伏递归的.

记住例1及例3，我们现在就部分函数而叙述邱吉论点.一个部分函数$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$叫做潜伏部分递归的，如果有一个部分递归函数$\varphi'(x_1, \cdots, x_n)$使得，在$\varphi$的定义域上有$\varphi'(x_1, \cdots, x_n) = \varphi(x_1, \cdots, x_n)$.我们就下情形而把论点分成两部分，当离开所讨论的函数的定义域时，视我们要求该能行计算过程给不出函数值或只是对这情形简单地不管而定.

**例 4** 试证：如果$\varphi(x)$是潜伏部分递归，其定义域呈$\hat{x}(Ey)\cdot R(x, y)$，而$R$一般递归，则$\varphi(x)$必是部分递归.

**论点 $I^\dagger$** (a) 被任一算法所计算的函数是部分递归的(假定当该算法得不出自然数以为值时，对这个变目$n$矢言，该函数无定义).(b) 每一个能行地可计算(其意是，有一算法使得对于它的定义域中的每一个$n$矢言，都可计算其值)的部分函数是潜伏部分递归的.

这论点亦可改述以适用于谓词.

对 $l(\geqslant 0)$ 个假定函数及谓词 $\Psi$,我们亦有相应的论点 I*†,对一致性的情形亦然.

部分递归于 $l$ 个假定函数及谓词 $\Psi$ 的函数当 $l>0$ 时,我们对它的讨论,大都将限于下列情形: $\Psi$ 中每个函数及谓词是完全有定义的,或者虽则不完全有定义但却是部分递归的或部分递归于完全有定义的函数的. 这一种不完全定义的函数所以被引入,由于想满足算法论(包括判定问题的化归)的要求,因为经常不可能把这一种函数的定义补完全而仍能得出一个算法来计算它. 在算法论以外,为什么不把未完全定义的数论函数的定义补充完全,其理由便不是很明显的了(参见§64 例 4).

**例 5** 如果 $\phi(x)$ 为部分函数,其定义域为 $\hat{x}(Ey)R(x,y)$(或 $\hat{x}R(x)$),这里 $R$ 是完全有定义的谓词,则有一个完全有定义的函数 $\phi^C(x)$,原始递归于 $\phi$, $R$,使得 $\phi$ 部分递归于 $\phi^C$. 因为,设 $C=\hat{x}(Ey)R(x,y)$; 设 $\theta$ 递归地枚举了$\{0\}+C'$(参见§60 例 6);设

$$\phi^C(y)=2^{\theta(y)}\cdot 3^{\eta(\theta(y))} \text{ 这里 } \eta(0)=0, \eta(x')\simeq\phi(x).$$

则有 $\phi(x)\simeq(\phi^C(\mu y[\phi^C(y)_0=x']))_1$.

**例 6** $W_0(x,\mu y[W_0(x,y)\vee W_1(x,y)])$是部分递归谓词,但非潜伏递归谓词(参见§61).

## §64.3 值逻辑

在本节中,我们将对命题联结词引入新意义,例如,当 $Q(x)$ 或 $R(x)$ 无意义时,$Q(x)\vee R(x)$ 有时也有定义.

使用具有三个'真值',t('真'),f('假')及u('无定义'),的真值表来描述联结词所具有的意义,是适当的.

我们给出一些附注,用有穷性观点来辩解我们对真值表的使用,并说明我们怎样地选取下列的表的.

当我们使用联结词来作出原始递归谓词和一般递归谓词时,

我们可以直觉主义地辩解所以用2值逻辑的理由，因为对每个一般递归谓词都有一个判定过程，即是说，直觉主义地证明了，对一般递归谓词是可以使用排中律的.

如果 $Q(x)$是部分递归谓词，则在定义域里面对 $Q(x)$是有一个判定过程的，故在定义域中，排中律或排“三”律(即对每个 $x$，$Q(x)$或 t 或 f)是可以直觉主义地使用的. 但可能没有一个算法来判定，给定 $x$ 时 $Q(x)$ 有定义或否(例如，当 $Q(x)$ 为 $\mu y T_1(x, x, y) = 0$ 时，便没有这个算法). 因此只是古典地而非直觉主义地我们有排四律(即对每个 $x$，$Q(x)$或 t 或 f 或 u).

因此，在我们的理论中，第三个‘真值’u 和其余两个真值 t 和 f 不是处在同等地位的. 对它们情况的考虑证明了，我们必须限于一个特殊种类的真值表.

例如，要断言 $Q(x) \vee R(x)$是原始递归于或部分递归于(一致地)$Q$ 及 $R$，我们须断言，存在一算法，可以从 $Q(x)$的及 $R(x)$的真值而得到 $Q(x) \vee R(x)$的真值. 但就部分函数言，u 的情形仍然与 t，f 不同.

假设我们要作一个 $Q \vee R$ 的真值表使得 $Q(x) \vee R(x)$ 将为部分递归(一致地)于 $Q$ 及 $R$. 让我们由利地 (heuristically) 讨论这点，暂时把部分递归性等同于能行地可判定性. 我们要求有一算法，当给定 $x$ 后，能够根据 $Q(x)$为 t 或 f(如果有定义)以及 $R(x)$为 t 或 f(如果有定义) 而判定 $Q(x) \vee R(x)$之为 t 或 f(如果有定义). $Q(x)$为 u 这消息不被算法所利用；u 只意指缺乏 $Q(x)$为 t 或 f 的消息. 当 $Q(x)$为 u 时，举例说，如果 $Q(x) \vee R(x)$取值 t，则作这样决定时 (对所给的 $x$ 及 $R(x)$)，必不是依赖于 $Q(x)$ 的消息(因为根本没有消息). 在特例，如果 $R(x)$ 的值不变而 $Q(x)$ 的值却由 t 变到 f，必须仍作同样的决定的.

如果我们只是要求，当 $Q$ 及 $R$ 是部分递归时，$Q(x) \vee R(x)$将是部分递归的，那末我们亦可得到同样的结论. 一般地，由(从头作出 ab initio 的) $Q(x) \vee R(x)$算法如果能够得到一些关于 $Q(x)$ 及 $R(x)$ 的消息，那只是由于其中包含有一些关于 $Q(x)$ 及 $R(x)$

的算法．在作 $Q(x) \vee R(x)$ 的算法时，例如说，如果要决定其值为 t，必然是根据关于 $Q(x)$ 与 $R(x)$ 的消息，而这是在进行 $Q(x)$ 与 $R(x)$ 的算法到一定时期时所得到的．在进行 $Q(x)$ 的算法的每一时期中，我们或者看出 $Q(x)$ 为 t 或者看出为 f 或者不知道 $Q(x)$ 的真假值．如果 $Q(x)$ 实际上为 u，我们不能由于追随 $Q(x)$ 的算法而得知，而只能由别的算法，例如由有关于该算法的若干元数学推理．如果 $Q$ 是特殊给出的，我们或可代以别的算法，它将对我们说 $Q(x)$ 是 u，但一般地我们是不能这样做的．因此，如果 $Q(x)$ 为 u 时而 $Q(x) \vee R(x)$ 得到值 t，其决定必是（就一般情形说）不管 $Q(x)$ 而作出的，并且是注意到下列的可能的，即当追随 $Q(x)$ 的算法更远，远过刚才所作时，可能找出 $Q(x)$ 为 t 或 f 的．

可以用部分递归函数的用语而作出证明，以确认这些由利的论证（并推广到命题联结词以外的运算子去），它们将在本节之末给出（定理 XXI 及例 6—8）．

我们可作结论说，要使得命题联结词成为部分递归联结词（或至少应用于部分递归谓词时得出部分递归谓词），我们对它们必须选择一种正则的真值表，其意为：某一行（列）如在 u 列（行）处含有 t，则必须整行（列）均为 t；对 f 同此．

当我们把 #D 由原始递归性推广到部分递归性时，基本上使用原来的证明（§ 63 定理 XVII 的 #D†），这时我们是在弱义之下使用命题联结词，即使用 2 值真值表而在 u 行或 u 列处全部放入 u．这些都是正则真值表（平凡地）．

现在我们引入强义的命题联结词，由下列强真值表而定义．

$\bar{Q}$

| $Q$ | |
|---|---|
| t | f |
| f | t |
| u | u |

$Q \vee R$

| $Q \backslash R$ | t | f | u |
|---|---|---|---|
| t | t | t | t |
| f | t | f | u |
| u | t | u | u |

$Q \& R$

| $Q \backslash R$ | t | f | u |
|---|---|---|---|
| t | t | f | u |
| f | f | f | f |
| u | u | f | u |

$Q \to R$

| | R | t | f | u |
|---|---|---|---|---|
| Q | t | t | f | u |
| | f | t | t | t |
| | u | t | u | u |

$Q \equiv R$

| | R | t | f | u |
|---|---|---|---|---|
| Q | t | t | f | u |
| | f | f | t | u |
| | u | u | u | u |

在这些表中，只有∨，& 及→三表与相应的弱表不同．今后除非另行声明,否则凡 ¯，∨，&→及三应用于部分谓词时都是指的强义．

**例 1** (61)可重述如下．

(61b) $(x_1)\cdots(x_n)(y)[T_n(e, x_1, \cdots, x_n, y) \to U(y) = \varphi(x_1, \cdots, x_n)].$

凡形为"如 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 有定义,则…"的叙述,如果理解为：当 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 无定义时，该结论便无意义，那便是理解为强义的→．(这种叙述已经出现于§63处．)

这些强表是对古典 2 值真值表的最强可能的正规扩张，因而是唯一决定的,即它们是正规的,并且凡任何 2 值表的正规扩张的表上，能够有 t 或 f 之处它们都有 t 或 f(到底为 t 抑 f 亦可唯一地确定)．

作为非正规的表我们可举出下列三表[1]．这里的 3 值逻辑(克林[1938])不同于卢卡西维支的 3 值逻辑 (Łukasiewicz, [1920]; 参见路易斯与朗福德 (Lewis and Langford) [1932]，第 213 页以后),后者在→表及≡表的第三行第三列处不是 u 而是 t(后者这里写为→Ł及≡Ł)．

$Q \to_{Ł} R$

| | R | t | f | u |
|---|---|---|---|---|
| Q | t | t | f | u |
| | f | t | t | t |
| | u | t | u | t |

$Q \equiv_{Ł} R$

| | R | t | f | u |
|---|---|---|---|---|
| Q | t | t | f | u |
| | f | f | t | u |
| | u | u | u | t |

$Q \cong R$

| | R | t | f | u |
|---|---|---|---|---|
| Q | t | t | f | f |
| | f | f | t | f |
| | u | f | f | t |

1) 另外的非正规的表的例子可见波兹瓦 (Д. А. Бочвар) [1938, 1943]．波兹瓦的第三"真值"不是"未定的"而是"无意义的"——俄译注．

由这个初步讨论我们还可作出结论说，对部分递归运算的定义而言，t, f, u 三者除却(i)'真''假''无定义'以外，还可有另一意义，即(ii)'真''假''未知(或无关重要)'. 这里，'未知'一类是任何命题都可归入的，其值或则我们不知，或则我们决定目前暂时不管；因此它并不排斥另外两个可能，'真'与'假'.

**例 2** 设对于一个给定的 $x$，我们知道 $Q(x)$ 为无定义而 $R(x)$ 为假，则把 t 与 f, u 作为'真''假''无定义'((i))，我们可以由 $\vee$ 表中第三行第二列得出 $Q(x)\vee R(x)$ 是无定义的.

**例 3** 设对于一个给定的 $x$，我们知道 $Q(x)$ 为真. 则把 t, f, u 作为'真''假''未知'((ii))，我们可由第一行第三列得知，$Q(x)\vee R(x)$ 为真. 要用具(i)意义的表而推出这个结论，我们必需用古典的排四律：$R(x)$ 必或为 t, f, u 之一；但在第一行各列处都有 t 出现.

照这个观点，$Q\vee R$ 的意义可由下列的字句而弄得非常清楚：$Q\vee R$ 为真当 $Q$ 为真(不管 $R$ 为何)或 $R$ 为真(不管 $Q$ 为何)；$Q\vee R$ 为假当 $Q$ 与 $R$ 同假；$Q\vee R$ 有定义只当上述三情形时(故此外无定义).

当把完全有定义的谓词 $Q(x)$ 及 $R(x)$ 依照通常二值意义的 $\neg$, $\vee$, &, $\rightarrow$, $\equiv$ 而作出完全有定义的谓词时，强 3 值逻辑亦可如下地应用. (iii) 设有两个固定的算法，在自然数的子集上判定 $Q(x)$ 与 $R(x)$ 的真假(例如，古典地把任何两个部分递归谓词补充完全其定义后所出现的). 令 t, f, u 意指：'依算法(即只用依照算法而得到的关于 $Q(x)$ 与 $R(x)$ 的消息)可判定其为真'，'依算法可判定其为假'，'依算法不能判定其真假'. (iv) 假设有一个固定的关于 $Q(x)$ 与 $R(x)$ 的知识(例如，当把关于它们的算法进行到一定时期时). 令 t, f, u 意指：'已知为真'，'已知为假'，'不知其真假'.

下列三个古典等价式是成立的.

(62) $$Q\&R\equiv\overline{\overline{Q}\vee\overline{R}},$$

(63) $$Q\rightarrow R\cong\overline{Q}\vee R,$$

(64) $$Q \equiv R \cong (Q \to R) \& (R \to Q).$$

读者试作出右端的表并比较上述左端的表即可核验之．但例如，$Q \& (R \vee \bar{R}) \cong Q$（参见§27*52）则不成立（当 $Q$ 为 t 而 $R$ 为 u 时，左端为 u 而右端为 t）．

应用 3 值表而作的关于(62)—(64)的证明，可解释为：我们证明了如果有一端有定义则另一端亦然且具同值（如≅所断言），这时在定义域内是用了排中律的．当 $Q$ 与 $R$ 为部分递归时，我们已经给出了这条定律(排中律——译者)了；至于一般情形，则直觉主义地说须以它作为假设才成，否则得不到这些等价式．对(65)亦须作类似的附注．

关于有界量词的强义如下：对每个 $z > 0$ 言，

$$(Ey)_{y<z}R(y) \cong R(0) \vee \cdots \vee R(z-1);$$

而

$$(Ey)_{y<0}R(y) \cong \mathrm{f}.$$

用语言来说，$(Ey)_{y<z}R(y)$为真，当 $R(y)$对某些 $y < z$ 为真时；它为假当 $R(y)$对一切 $y < z$ 为假时；它只当这两情形才有定义．

同样，对每个 $z > 0$ 言，$(y)_{y<z}R(y) \cong R(0) \& \cdots \& R(z-1)$；而$(y)_{y<0}R(y) \cong \mathrm{t}$.

这时我们有

(65) $$(y)_{y<z}R(y) \cong (\overline{Ey})_{y<z}\bar{R}(y).$$

同样地，我们可对无界量词给出强义，把$(Ey)R(y)$设想为当 $y = 0, 1, 2, \cdots$时的 $R(y)$的强析取式，把$(y)R(y)$设想为强合取式．

用语言说，$(Ey)R(y)$为真，如果 $R(y)$对某些自然数 $y$ 为真；它为假，如果 $R(y)$对每个 $y$ 为假；它只当这两情形时有定义．(然后 $(y)R(y) \cong (\overline{Ey})\bar{R}(y)$．)与有界量词不同(定理 XX(b))，无界量词当然不是部分递归运算(§57 定理 V)．

**例 4** 试考虑可表成下形的谓词集，$(Ey)R(x, y)$ 而 $R$ 部分递归．这集中所有不完全定义的谓词都可以补充完全而不致于走出这集以外（事实上，都具有原始递归 $R$)．因为，设 $r$ 为 $R(x, y)$

的一个哥德尔数，则$(Ey)[T_2(r, x, (y)_0, (y)_1) \& U((y)_1) = 0]$是完全有定义的，并且在$(Ey)R(x, y)$的定义域内它$\equiv (Ey)R(x, y)$. 对$(y)R(x, y)$形仿此.（参见克林[1943]，第57页定理VI.）

**定理 XX** (a)（强）谓词 $\bar{Q}(x_1, \cdots, x_n)$ 部分递归于 $Q$.（强）谓词 $Q(x_1, \cdots, x_n) \vee R(x_1, \cdots, x_n)$, $Q(x_1, \cdots, x_n) \& R(x_1, \cdots, x_n)$, $Q(x_1, \cdots, x_n) \rightarrow R(x_1, \cdots, x_n)$ 及 $Q(x_1, \cdots, x_n) \equiv R(x_1, \cdots, x_n)$ 部分递归于谓词$Q$及$R$.

(b)（强）谓词 $(Ey)_{y<z}R(x_1, \cdots, x_n, y)$ 及 $(y)_{y<z}R(x_1, \cdots, x_n, y)$ 部分递归于谓词 $R$.

(c)（强）穷举定义. 下列所定义的函数$\varphi$部分递归于 $\varphi_1, \cdots, \varphi_m, Q_1, \cdots, Q_m$:

$$\varphi(x_1, \cdots, x_n) \simeq \begin{cases} \varphi_1(x_1, \cdots, x_n) & \text{当 } Q_1(x_1, \cdots, x_n) \text{ 时,} \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \varphi_m(x_1, \cdots, x_n) & \text{当 } Q_m(x_1, \cdots, x_n) \text{ 时,} \end{cases}$$

这里$Q_1, \cdots, Q_m$是不可兼的（在下列释义之下：如果$Q_i(x_1, \cdots, x_n)$为真，则$\varphi(x_1, \cdots, x_n) \simeq \varphi_i(x_1, \cdots, x_n)$而不管$\varphi_j(x_1, \cdots, x_n)$及$Q_j(x_1, \cdots, x_n)$ $i \neq j$为何）.

**证明** (a) 例如，试讨论$Q \vee R$，设$\psi(x_1, \cdots, x_n)$, $\chi(x_1, \cdots, x_n)$及$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$分别为$Q(x_1, \cdots, x_n)$, $R(x_1, \cdots, x_n)$, $Q(x_1, \cdots, x_n) \vee R(x_1, \cdots, x_n)$的代表函数. 试考虑方程

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} \sigma(0) = 0, \ \tau(1, 1) = 1, \\ \varphi(x_1, \cdots, x_n) = \sigma(\psi(x_1, \cdots, x_n)), \\ \varphi(x_1, \cdots, x_n) = \sigma(\chi(x_1, \cdots, x_n)), \\ \varphi(x_1, \cdots, x_n) = \tau(\psi(x_1, \cdots, x_n), \chi(x_1, \cdots, x_n)), \end{cases}$$

这里$\sigma$与$\tau$为部分有定义的辅助函数. 若把方程(A)翻译到递归函数的形式符号体系去（§54），我们便得到一方程系$E$，它递归地由$\psi$, $\chi$而定义$\varphi$. ——所述的方法可适用于任何正规真值表.（对其它的联结词还可用另一法，注意，$\bar{Q}$已在定理XVII $D^\dagger$中讨论过，而$\bar{Q}$的强表与弱表是相同的，然后再用(62)—(64).）

(b) 由(65)可知，只讨论$(Ey)_{y<z}$便够了. 设 $\chi(x_1, \cdots, x_n$

$x_n, y$)及 $\varphi(x_1, \cdots, x_n, z)$分别为 $R(x_1, \cdots, x_n, y)$ 及 $(Ey)_{y<z}$ $R(x_1, \cdots, x_n, y)$的代表函数. 则(用 ##6, B†)下方程

$$
\text{(B)} \quad \begin{cases} \sigma(0) = 0, \quad \tau(1) = 1, \\ \varphi(x_1, \cdots, x_n, z') = \sigma(\chi(x_1, \cdots, x_n, z \dot{-} y)), \\ \varphi(x_1, \cdots, x_n, z) = \tau\left(\prod_{y<z} \chi(x_1, \cdots, x_n, y)\right) \end{cases}
$$

便被翻译成一方程系 $E$,它递归地由 $\chi$ 而定义 $\varphi$.

(c) 第一法. 同 (a); 例如设 $m = 2$ 及 $n = 1$,

$$
\text{(C)} \quad \begin{cases} \sigma_1(0, x) = \varphi_1(x), \quad \sigma_2(0, x) = \varphi_2(x) \\ \varphi(x) = \sigma_2(\psi_1(x), x), \ \varphi(x) = \sigma_2(\psi_2(x), x). \end{cases}
$$

第二法,对联立定义的 $Q_1, \cdots, Q_m$,

$$\varphi \simeq \mu y[(Q_1 \& y = \varphi_1) \vee \cdots \vee (Q_m \& y = \varphi_m)].$$

**附注 1** 在§57(VI)处以及§54处,我们是先半形式地[1]处理“=”然后才作翻译的,为了与那里的用法相一致起见,这里我们在(A)—(C)中亦写为“=”. 但直觉主义地考虑时,按照出现于其中的部分函数所应服从的规律,(VI′)及(A)—(C)均应该用“≃”.

**例 5** 如果 $\varphi$ 是部分递归的,而‘$\varphi(x)$有定义’是一般递归的,则 $\varphi(x)$是潜伏递归的. 因可令

$$\varphi'(x) = \mu y[y = \varphi(x) \vee (\overline{\varphi(x)\text{有定义}} \& y = 0)].$$

设 $\Psi$ 为部分函数序列 $\psi_1, \cdots, \psi_l$. 所谓 $\Psi$ 的一个扩张 $\Psi'$ 是指下列的部分函数序列 $\psi'_1, \cdots, \psi'_l$,它们分别是 $\psi_1, \cdots, \psi_l$ 的扩张,即当 $i = 1, \cdots, l$ 时,在 $\psi_i$ 的定义域处均有 $\psi'_i(y_1, \cdots, y_{m_i}) = \psi_i(y_1, \cdots, y_{m_i})$. 如果 $\Psi$ 包含有谓词也同此.

读者如果想很快地达到本章§66的主要结果,可略去下述定理的(b)部分.

**定理 XXI** (a) 如果 $\varphi \simeq \mathbf{F}(\Psi)$ 或 $\varphi(x) \simeq \mathbf{F}(\Psi; x)$ 是一个部分递归泛函,又 $\mathbf{F}(\Psi_1; x_1) \simeq k$,这里 $\Psi_1$ 是特殊的函数,$x_1, k$ 是特殊的自然数,则就 $\Psi_1$ 的每个扩张 $\Psi'_1$ 而言,亦有

---

1) 即内容地,但平行于形式规则——俄译注.

$$\mathbf{F}(\Psi_1'; x_1) = k.$$

(b) 设函数 $\varphi$ 乃由函数 $\psi$ 出发，经过下形的运算而作成 $\varphi(x) \simeq \mathbf{F}(\psi(x))$，这里 $\mathbf{F}(\alpha)$ 是一个由{u, 0, 1, 2, $\cdots$}到{u, 0, 1, 2, $\cdots$}的函数. 如果 $\mathbf{F}(\mathrm{u}) \simeq k$，$k$ 为一自然数，但对某自然数 $m$ 而言，没有 $\mathbf{F}(m) \simeq k$，则有一个部分递归函数 $\psi$（只取 $m$ 为值），使得结果函数不是部分递归的.

这里"$x$"，"$x_1$"等可分别改为"$x_1, \cdots, x_n$"，及"$x_{11}, \cdots, x_{1n}$"（就(a)言 $n \geqslant 0$，就(b)言 $n \geqslant 1$）；这定理对谓词亦有效，只须在值域中把 0, 1, 2,…改为 t, f.

**证明** (a)由假设，有一方程系 E 具有给定函数字母 G 及主要函数字母 f，而且对任何自然数 $x$ 及部分函数 $\Psi$ 言都有：当且仅当 $\mathbf{F}(\Psi; x) = y$ 时，$E_G^{\Psi}$，$E \vdash f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$，而 $\mathbf{y}$ 为数字. 但 $\mathbf{F}(\Psi_1; x_1) = k$ 而 $k$ 为自然数；故 $E_G^{\Psi_1}$，$E \vdash f(\mathbf{x}_1) = \mathbf{k}$. 今设 $\Psi_1'$ 为 $\Psi_1$ 的任何一个扩张，则 $E_G^{\Psi_1} \subset E_G^{\Psi_1'}$；故亦有 $E_G^{\Psi_1'}$，$E \vdash f(\mathbf{x}) = \mathbf{k}$；因此 $\mathbf{F}(\Psi_1'; x_1) = k$.（如果泛函 $\mathbf{F}(\Psi)$ 只当 $\Psi$ 的变域作了某些限制后才有定义，则这定理亦只对适合这限制的扩张 $\Psi_1'$ 才成立.）

(b) 设 $\psi(x) = m + 0 \cdot \mu y T_1(x, x, y)$，而 $\rho(x) \simeq \mu y [\varphi(x) = k \& y = 0]$. 由定理 XVIII，$\psi(x)$ 是部分递归的，又如果 $\varphi(x)$ 是部分递归的则 $\rho(x)$ 亦然. 我们今证 $\rho(x)$ 不是部分递归的. 如果 $(\overline{Ey}) T_1(x, x, y)$，故 $\mu y T_1(x, x, y)$ 无定义，故 $\psi(x)$ 无定义，但由假设，这时 $\varphi(x) = k$，故 $\rho(x)$ 有定义. 即 $(\overline{Ey}) T_1(x, x, y) \to$ {$\rho(x)$ 有定义}. 仿此，$(Ey) T_1(x, x, y) \to$ {$\rho(x)$ 无定义}；或换质位得(参见§ 26*13)，{$\rho(x)$有定义}$\to (\overline{Ey}) T_1(x, x, y)$. 故{$\rho(x)$有定义}$\equiv (\overline{Ey}) T_1(x, x, y) \equiv (y) \overline{T}_1(x, x, y)$. 由§ 63 例 3，$\rho(x)$不是部分递归的.

在例 6—8 中，我们分别给出 (a) (b) 两部分，用以例释定理的这两部分，但是(b)部分的结果已经蕴含了(a)部分.

**例 6** 我们能不能够在定理 XVIII 中把 $\mu y R(x, y)$ 加强为：使 $R(x, y)$ 成立的最小的 $y$ 而不管 $R(x, 0), \cdots, R(x, y-1)$ 是否全有定义(试把它写为 $\mu' y R(x, y)$)? (a) 不成，因为，如果 $R(x,$

1)为 t,则当 $R(x, 0)$由 u 变为 t 时,$\mu' y R(x, y)$ 由 1 变为 0. 更详细些说,设 $R(x, y)$的代表函数为 $\chi(x, y)$,并令 $\varphi(x) \simeq \mu' y R(x, y) \simeq \mathbf{F}(\chi; x)$. 设把 $\chi$, $x$ 选为 $\chi_1$, $x_1$, 使得 $\chi_1(x_1, 0) \simeq$ u, $\chi_1(x_1, 1) \simeq 0$,则 $\mathbf{F}(\chi_1; x_1) \simeq 1$. 如果 $\varphi$ 部分递归于 $\chi$[1], 则由定理中的(a), 对 $\chi_1$ 的任何扩张 $\chi_1'$ 言将有 $\mathbf{F}(\chi_1'; x_1) \simeq 1$. 但如果该扩张 $\chi_1'$ 使得 $\chi_1'(x_1, 0) \simeq 0$, 则有 $\mathbf{F}(\chi_1'; x_1) \simeq 0$. 因此 $\varphi$ 不是部分递归于 $\chi$ 的(因此泛函 $\mathbf{F}$ 不是部分递归的——译者). (b) 我们甚至于可以找出一个特殊的部分递归谓词 $R$ 使得 $\mu' y R(x, y)$ 不是部分递归的. 设令 $R(x, y)$ 呈下形 $y = \psi(x) \vee y = 1$. 则当$\psi(x)$由 u 变为 0 时 $\mu' y R(x, y)$ 由 1 变为 0. 详细些说, 设 $\varphi(x) \simeq \mu' y R(x, y) \simeq \mathbf{F}(\psi(x))$. 则 $\mathbf{F}(\text{u}) \simeq 1$ 而 $\mathbf{F}(0) \simeq 0$. 故由定理中的(b)可选一个部分递归 $\psi$ 使得 $\varphi$ 非部分递归的.

**例 7** 如果 $\chi(x) \simeq 0$,则当 $\psi(x)$由 u 变 0 时 $\psi(x) \simeq \chi(x)$由 f 变 t. 故(a) $\psi(x) \simeq \chi(x)$不是部分递归于 $\psi$, $\chi$ 的.(b)对某些部分递归的 $\psi$, $\chi$ 言, $\psi(x) \simeq \chi(x)$ 不是部分递归的. (首先取 $\chi$ 为 §44 的 $C_0^1$; 其次依定理中的 (b) 配合这个 $\chi$ 而选 $\psi$.)

**例 8** $Q \cong R$ 的表不是正规的;例如, 如果 $R \cong$ t, 则当 $Q$ 由 u 变 t 时, $Q \cong R$ 由 f 变 t. 故(a)$Q(x) \cong R(x)$不是部分递归于 $Q$ 与 $R$ 的, (b) 有些部分递归谓词 $Q$, $R$, 使得 $Q(x) \cong R(x)$不是部分递归的. ——任何非正规表可同法处理.

## §65. 哥德尔数

我们今把 $U(\mu y T_n(z, x_1, \cdots, x_n, y))$ 缩写为"$\Phi_n(z, x_1, \cdots, x_n)$",甚至于缩写为"$\{z\}(x_1, \cdots, x_n)$"或"$z(x_1, \cdots, x_n)$". 依定理 XVIII, $\Phi_n$ 是 $n+1$ 元部分递归函数 (因此,对每个固定的 $z$, $\Phi_n$ 是 $n$ 元 $x_1, \cdots, x_n$ 的部分递归函数). 若把定理 XIX(60) 重写, 任何 $n$ 元部分递归函数 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 可由 $\Phi_n$ 依下法而得到

---

1) 更准确些:如果泛函 $\mathbf{F}$ 是部分递归的——俄译注.

(66) $\varphi(x_1, \cdots, x_n) \simeq \Phi_n(e, x_1, \cdots, x_n) \simeq e(x_1, \cdots, x_n)$,

而 $e$ 为 $\varphi$ 的任一哥德尔数. 仿此，对完全有定义的诸函数 $\Psi$ 言，$U(\mu y T_n^{\Psi}(z, x_1, \cdots, x_n, y))$ 将写为"$\Phi_n^{\Psi}(z, x_1, \cdots, x_n)$"，"$\{z\}^{\Psi}(x_1, \cdots, x_n)$"或"$z^{\Psi}(x_1, \cdots, x_n)$"，并有相应的附注. 综括言之，得

**定理 XXII** (= 定理 XVIII + XIX) 函数 $\Phi_n(z, x_1, \cdots, x_n)$ 是部分递归的，而当 $z=0, 1, 2, \cdots$ 时 $\Phi_n(z, x_1, \cdots, x_n)$ 是 $n$ 元部分递归函数的一个枚举(容许重复). 仿此，对完全有定义的 $\Psi$ 言，$\Phi_n^{\Psi}$ 部分递归于 $\Psi$，并把那些部分递归于 $\Psi$ 的 $n$ 元函数加以枚举(容许重复). (部分递归函数的枚举定理.)

这定理所以可能，由于部分递归函数可以对某组变目而没有定义.

让我们扼要重述对完全有定义的函数所作的康托对角论证. 设 $C$ 为完全有定义的函数集，具有各种变元个数；设 $\Phi(z, x_1, \cdots, x_n)$ 枚举(容许重复)了 $C$ 中的 $n$ 元函数(固定的 $n \geq 1$). 则 $\Phi(x_1, x_1, x_2, \cdots, x_n) + 1$ 不可能 $\varepsilon C$，否则我们将有一数 $q$ 使得

$$\Phi(q, q, x_2, \cdots, x_n) + 1 = \Phi(q, q, x_2, \cdots, x_n)$$

而这是不可能的. 如果由一函数 $\varphi(z, x_1, \cdots, x_n)$ 到 $\varphi(x_1, x_1, x_2, \cdots, x_n) + 1$ 的运算对 $C$ 言是封闭的，则 $\Phi(z, x_1, \cdots, x_n)$ 不可能 $\varepsilon C$. 在特例，这便证明了对一般递归函数我们不能有相应的枚举定理.

但对部分函数言，我们却有

$$\Phi(q, q, x_2, \cdots, x_n) + 1 \simeq \Phi(q, q, x_2, \cdots, x_n),$$

这并非不可能，它只简单地意指，$\Phi(q, q, x_2, \cdots, x_n)$ 必是无定义的. 在特例，这便证明了，设 $q$ 为 $\Phi_n(x_1, x_1, x_2, \cdots, x_n) + 1$ 的任一哥德尔数，则当 $z = x_1 = q$ 时，部分递归函数 $\Phi_n(z, x_1, \cdots, x_n)$ 必是无定义的.

如果坚持 $\Phi(z, x_1, \cdots, x_n)$ 既在该集之内又是完全有定义的，我们便得到理沙尔诗论了(§ 11). (在§ 11 中 $n = 1$.)

在建立§ 66 定理 XXVII 时，对部分函数的对角推理还将作

进一步研究.

**例 1** 设$\eta(z_1,\cdots,z_r)$为给定的部分递归函数. 对每一个$z_1,\cdots,z_r$, 设以$\varphi_{z_1,\cdots,z_r}(x_1,\cdots,x_n)$表下述的部分递归函数，只当$\eta(z_1,\cdots,z_r)$有定义时它才对于$n$矢$x_1,\cdots,x_n$有定义，而这时$\eta(z_1,\cdots,z_r)$便是它的一个哥德尔数. 这时如果把$\varphi_{z_1,\cdots,z_r}(x_1,\cdots,x_n)$当作$r+n$元函数$\varphi(z_1,\cdots,z_r,x_1,\cdots,x_n)$，它便是部分递归的. 因为我们有

$$(67)\qquad \varphi(z_1,\cdots,z_r,x_1,\cdots,x_n)\simeq\Phi_n(\eta(z_1,\cdots,z_r),\ x_1,\cdots,x_n).$$

(这是§ 62 (A3) 中第一种可能的一个例子.)

**定理 XXIII** 对每个$m,n\geqslant 0$，都有一个原始递归函数$S_n^m(z,y_1,\cdots,y_m)$(定义见后)使得,如果$e$递归地定义$m+n$元$y_1,\cdots,y_m,x_1,\cdots,x_n$的函数$\varphi(y_1,\cdots,y_m,x_1,\cdots,x_n)$,则对于每个固定的自然数$m$矢$y_1,\cdots,y_m$言，$S_n^m(e,y_1,\cdots,y_m)$都递归地定义作为$n$元$x_1,\cdots,x_n$的函数的$\varphi(y_1,\cdots,y_m,x_1,\cdots,x_n)$. 若用$\lambda$记号(§ 10)叙述便是: 如果$e$递归地定义$\lambda y_1\cdots y_m x_1\cdots x_n\varphi(y_1,\cdots,y_m,x_1,\cdots,x_n)$，则$S_n^m(e,y_1,\cdots,y_m)$递归地定义$\lambda x_1\cdots x_n\varphi(y_1,\cdots,y_m,x_1,\cdots,x_n)$.

同样地,可把"原始递归函数$S_n^m(z,y_1,\cdots,y_m)$", "递归地定义"分别改为"原始递归函数$S_n^{m,m_1,\cdots,m_l}(z,y_1,\cdots,y_m)$","递归地由$\Psi$定义", 这里$\Psi$是$l$个分别为$m_1,\cdots,m_l$元的完全有定义的函数或谓词.

**证明** (当$l=0$时) 令$S_n^0(z)=z$. 当$m>0$时，选取诸数$y_1,\cdots,y_m$. 当这些固定后，把$\varphi(y_1,\cdots,y_m,x_1,\cdots,x_n)$写为"$\varphi(x_1,\cdots,x_n)$". 今有

$$(68)\qquad \varphi(x_1,\cdots,x_n)\simeq\Phi_{m+n}(e,y_1,\cdots,y_m,x_1,\cdots,x_n).$$

设D为递归地定义$\Phi_{m+n}$的方程系,以$\boldsymbol{g}$为主要函数字母且不含有$\boldsymbol{f}$. 设C由方程系D再加入下方程而得:

$$\boldsymbol{f}(a_1,\cdots,a_n)=\boldsymbol{g}(\mathbf{e},\mathbf{y}_1,\cdots,\mathbf{y}_m,a_1,\cdots,a_n),$$

这是由翻译(68)而得的。这个方程系C递归地定义$\varphi(x_1,\cdots,$

$x_n$). 设 $d$, $f$, $g$, $a_1$, $\cdots$, $a_n$ 分别为 D, $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{a}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_n$ 的哥德尔数. 设[1] $S_n^m(z, y_1, \cdots, y_m) = d*[2\exp(2^{15}\cdot 3^H \cdot 5^K)]$,而

$H = 2^f \cdot p_1^{a_1} \cdot \cdots \cdot p_n^{a_n}$,

$K = 2^g \cdot 3^{Nu(z)} \cdot p_2^{Nu(y_1)} \cdot \cdots \cdot p_{m+1}^{Nu(y_m)} \cdot p_{m+2}^{a_1} \cdot \cdots \cdot p_{m+n+1}^{a_n}$,

(参见§56, §45#2, §52 例2). 则作为 $z$, $y_1$, $\cdots$, $y_m$ 的函数言, $S_n^m(e, y_1, \cdots, y_m)$是原始递归的;且对固定的 $y_1$, $\cdots$, $y_m$ 言, $S_n^m(e, y_1, \cdots, y_m)$为C的哥德尔数,故递归地定义了 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$.

**例 1** (续完) 上文我们是从部分递归函数 $\eta$ 出发的,但即使从原始递归函数 $\eta$ 出发, 仍然得到同样的 $\varphi(z_1, \cdots, z_r, x_1, \cdots, x_n)$的函数集. 因设(67)的函数 $\varphi(z_1, \cdots, z_r, x_1, \cdots, x_n)$ 以 $e$ 为哥德尔数. 则 $S_n^r(e, z_1, \cdots, z_r)$ 为 $\varphi_{z_1,\cdots,z_r}(x_1, \cdots, x_n)$ 的一个哥德尔数,但对 $\varphi_{z_1,\cdots,z_r}(x_1, \cdots, x_n)$ 言, $S_n^r(e, z_1, \cdots, z_r)$ 便有上述的"$\eta(z_1, \cdots, z_r)$"的作用而 $S_n^r$ 为原始递归的.

**例 2** 对任何一般递归谓词 $R(x_1, \cdots, x_n, y)$ 言, 设 $e$ 为部分递归函数 $\lambda x_1 z x_2\cdots x_n \mu y R(x_1, \cdots, x_n, y)$ 的一个哥德尔数. 则对任何固定 $x_1$ 言, $S_n^1(e, x_1)$ 都是 $\lambda z x_2\cdots x_n \mu y R(x_1, \cdots, x_n, y)$的一个哥德尔数. 当且仅当 $(Ey)R(x_1, \cdots, x_n, y)$ 时, 这函数便对 $n$ 矢 $z$, $x_2$, $\cdots$, $x_n$ 有定义. 故由定理 XIX 得

$$(69)\qquad (Ey)R(x_1, \cdots, x_n, y) \equiv (Ey)T_n(S_n^1(e, x_1), z, x_2, \cdots, x_n, y).$$

将 $z$ 代以 $S_n^1(e, x_1)$ 便得

$$(70)\qquad (Ey)R(x_1, \cdots, x_n, y) \equiv (Ey)T_n(S_n^1(e, x_1), S_n^1(e, x_1), x_2, \cdots, x_n, y).$$

若取 $n=1$,并以"$a$"代"$x_1$",以"$x$"代"$y$",这便证明了$(Ey)R(a, x)$原始递归于 $(Ex)T_1(a, a, x)$. 因此就形为 $(Ex)R(a, x)$, $R$一般递归, 这种谓词而言, $(Ex)T_1(a, a, x)$ 的判定问题具有最高度的不可解决性(参见§61末). 更进一步说, 由 $S_1^1$ 的定义可得, $a_1$

---

1) 本表达式中的"2exp"是根据新版添入的(旧版误脱). 又为表达明晰(以及印刷方便)起见, 特引入两个新符号 $H$, $K$. 因此这里的写法与原书不同, 请注意——译者注.

$\neq a_2 \to S_1^1(e, a_1) \neq S_1^1(e, a_2)$. 故有一个一般递归函数 $\phi(a)$ 使得 $\{a_1 \neq a_2 \to \phi(a_1) \neq \phi(a_2)\} \& \{(Ex)R(a, x) \equiv (Ex)T_1(\phi(a), \phi(a), x)\}$; 用坡斯特([1944])的用语说，集 $\hat{a}(Ex)R(a, x)$ 的判定问题是 1-1 地可化归于 $\hat{a}(Ex)T_1(a, a, x)$ 的判定问题的. 集 $\hat{a}(Ex)T_1(a,a,x)$能够对每个形如 $\hat{a}(Ex)R(a, x)$, $R$ 一般递归,这样的集都如此，坡斯特证明，这样的性质亦为某些可递归枚举集"$K$"所具有,这种集坡斯特叫做"完备集"(坡斯特 [1944],第 295 页及第 297 页的定理). 对具多个量词形式以及 $l > 0$ 的情形亦有这种结果. 例如,由 (70) $n = 3(l = 0)$, 可以推出

$$(Ex)(y)(Ez)R(a, x, y, z)$$
$$\equiv (Ex)(y)(Ez)T_3(S_3^1(e, a), S_3^1(e, a), x, y, z)$$

(参见§ 33*71, *72). 故就形为 $(Ex)(y)(Ez)R(a, x, y, z)$, $R$ 一般递归,这种谓词言，$(Ex)(y)(Ez)T_3(a, a, x, y, z)$ 的判定问题具有最高度的不可解决性，而这种形式的任何谓词的判定问题都可以 1-1 地化归到它的判定问题去.

**例 3** 在例 2 中删去 $z$, 我们便得, $\hat{a}(Ex)R(a, x)$ 的判定问题可以 1-1 地化归于 $\hat{a}(Ex)T_0(a, x)$ 的判定问题去(故由例 2,谓词 $(Ex)T_1(a, a, x)$ 及 $(Ex)T_0(a, x)$ 的判定问题具有同样的不可解决度);具有多个量词时仿此;例如

$$(Ex)(y)(Ez)R(a, x, y, z)$$
$$\equiv (Ex)(y)(Ez)T_2(S_2^1(e, a), x, y, z),$$

这里 $e$ 是 $\mu z R(a, x, y, z)$的一个哥德尔数.

不阅本节后面的内容亦可以理解§ 66 的大部分结果.

$\Lambda$ 记号 (将用于§ 82). 如果

$$\lambda y_1 \cdots y_m x_1 \cdots x_n \varphi(y_1, \cdots, y_m, x_1, \cdots, x_n)$$

为部分递归的而 $e$ 递归地定义它,则我们用

$$\text{“}\Lambda_{(e)} x_1 \cdots x_n \varphi(y_1, \cdots, y_m, x_1, \cdots, x_n)\text{”}$$

作为 $S_n^m(e, y_1, \cdots, y_m)$ 的缩写. 通常我们还省去足码 $(e)$. 例如 $(m = 0$ 时), "$\Lambda x_1 \cdots x_n \varphi(x_1, \cdots, x_n)$" 便是函数 $\lambda x_1 \cdots x_n \varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 的一个哥德尔数;而$(m > 0$ 时)"$\Lambda x_1 \cdots x_n \varphi(y_1, \cdots, y_m,$

$x_1, \cdots, x_n)$”便是某原始递归函数，对每个自然数$m$元矢$y_1, \cdots, y_m$言，其值都是下函数的一个哥德尔数

$$\lambda x_1 \cdots x_n \varphi(y_1, \cdots, y_m, x_1, \cdots, x_n).$$

若用这个缩写及下列缩写：

$\Phi_n(z, x_1, \cdots, x_n)$ 缩写为 “$\{z\}(x_1, \cdots, x_n)$”，

那末对任何自然数$n$元矢$t_1, \cdots, t_n$言我们都有

(71) $$\{\Lambda x_1 \cdots x_n \varphi(y_1, \cdots, y_m, x_1, \cdots, x_n)\}(t_1, \cdots, t_n) \simeq \varphi(y_1, \cdots, y_m, t_1, \cdots, t_n).$$

当$\Psi$为$l$个分别为$m_1, \cdots, m_l$元的完全有定义的函数及谓词时，亦可用类似的记号“$\Lambda^{m_1, \cdots, m_l}$”.

**引理 VI** 如把“原始递归”改为“部分递归”，§47 引理 I 仍然成立．因此($p=1$)时：如果$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$一致地部分递归于函数$\theta, \Psi$，又在$\varphi$的定义中如把$\theta$改为一个依赖于参数$c$的函数$\theta^*$后得到函数$\varphi^*(x_1, \cdots, x_n, c)$，那末$\varphi^*$便一致地部分递归于$\theta^*, \Psi$.

**证明** 依假设，有一方程系E使得，对$\theta, \Psi$的每个选择，方程系E都递归地由$\theta, \Psi$而定义结果函数$\varphi$．设$\Psi$为$\psi_1, \cdots, \psi_l$；并设E中的所给函数字母(分别地表示$\theta, \Psi$的)是t, $g_1, \cdots, g_l$，而其主要函数字母是f．设c是一个不出现于E的变元．今把E中每一个形如$h(r_1, \cdots, r_s)$，这里h为函数字母，而$r_1, \cdots, r_s$为项，的部分同时都改为$h(r_1, \cdots, r_s, c)$，命其结果为$E_2^*$．设$E_1^*$为下方程系

$$g_1(a_1, \cdots, a_{m_1}, c) = \bar{g}_1(a_1, \cdots, a_{m_1}), \cdots, g_l(a_1, \cdots, a_{m_l}, c) = \bar{g}_l(a_1, \cdots, a_{m_l}),$$

这里$\bar{g}_1, \cdots, \bar{g}_l$为不出现于E中的不同的函数字母．命$E^*$为$E_1^* E_2^*$．我们今证，对$\theta^*, \Psi$的每个选择，方程系$E^*$都递归地由$\theta^*, \Psi$而定义$\varphi^*$.

试考虑对$\theta^*, \Psi, c$所作的任何固定的选择．设$(E_t^{\theta^*})_c$为下形的方程所成的集：$t(s_1, \cdots, s_q, c) = u$ 而它是 $\varepsilon E_t^{\theta^*}$ 的．命$(E_t^{\theta})_c$为相应的诸方程$t(s_1, \cdots, s_q) = u$所成的集，即当我们对该

固定的 $c$ 而取 $\theta(s_1,\cdots,s_q)=\theta^*(s_1,\cdots,s_q,c)$ 时表示函数 $\theta$ 的值的方程所成的集.

容易看见，如果 $(\mathrm{E}_t^{\theta})_c$, $\mathrm{E}_{g_1\cdots g_l}^{\psi_1\cdots\psi_l}$, $\mathrm{E}\vdash \mathrm{f}(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n)=\mathbf{x}$, 则 $(\mathrm{E}_t^{\theta^*})_c$, $\mathrm{E}_{g_1\cdots g_l}^{\psi_1\cdots\psi_l}$, $\mathrm{E}^*\vdash \mathrm{f}(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n,\mathbf{c})=\mathbf{x}$, 当然更有 $\mathrm{E}_{tg_1\cdots g_l}^{\theta^*\psi_1\cdots\psi_l}$, $\mathrm{E}^*\vdash \mathrm{f}(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n,\mathbf{c})=\mathbf{x}$.

我们今证其逆. 设 $(\mathrm{E}_{g_1\cdots g_l}^{\psi_1\cdots\psi_l})_c$ 为下列的方程所成的集，$g_i(\mathbf{y}_1,\cdots,\mathbf{y}_{m_i},\mathbf{c})=\mathbf{y}$ 而 $g_i(\mathbf{y}_1,\cdots,\mathbf{y}_{m_i})=\mathbf{y}\varepsilon\mathrm{E}_{g_1\cdots g_l}^{\psi_1\cdots\psi_l}$. 在方程系 $\mathrm{E}_2^*$ 中把 c 通通代以 $\mathbf{c}$ 后所得的方程系命为 $(\mathrm{E}^*)_c$. 我们说，一方程 e 是一个 $c$-方程，如果有一个由 $\mathrm{E}_{tg_1\cdots g_l}^{\theta^*\psi_1\cdots\psi_l}$, $\mathrm{E}^*$ 到 e 的推演，并且或者 $\mathrm{e}\varepsilon(\mathrm{E}_t^{\theta^*})_c$, 或者 $\mathrm{e}\varepsilon(\mathrm{E}_{g_1\cdots g_l}^{\psi_1\cdots\psi_l})_c$, 或者在该对 e 的推演中其主要方程(§ 54)是 $\varepsilon\mathrm{E}_2^*$ 的而其主支使用了 R1 一次，它把 $c$ 代以 $\mathbf{c}$. 我们可以证明(就所给的这个对 e 的推演的高度作归纳)，如果 e 为 $c$-方程，则 $(\mathrm{E}_t^{\theta^*})_c$, $(\mathrm{E}_{g_1\cdots g_l}^{\psi_1\cdots\psi_l})_c$, $(\mathrm{E}^*)_c\vdash\mathrm{e}$. 在这个结果推演中，函数符号 h 的每一次出现都出现于形为 $\mathrm{h}(\mathrm{r}_1,\cdots,\mathrm{r}_s,\mathbf{c})$ 的部分中. 任何形为 $\mathrm{f}(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n,\mathbf{c})=\mathbf{x}$ 的方程，如果能够由 $\mathrm{E}_{tg_1\cdots g_l}^{\theta^*\psi_1\cdots\psi_l}$, $\mathrm{E}^*$ 推演出，都必是一个 $c$-方程. 如果在刚才所描述的推演中，我们把每个 $\mathrm{h}(\mathrm{r}_1,\cdots,\mathrm{r}_s,\mathbf{c})$ 的部分都同时改为 $\mathrm{h}(\mathrm{r}_1,\cdots,\mathrm{r}_s)$，我们便得到一个由 $(\mathrm{E}_t^{\theta})_c$, $\mathrm{E}_{g_1\cdots g_l}^{\psi_1\cdots\psi_l}$, E 到 $\mathrm{f}(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n)=\mathbf{x}$ 的推演.

**定理 XXIV** (a) 如果 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 一致地部分递归于部分递归函数 $\theta_1,\cdots,\theta_r$, 则有一个部分递归函数 $\varphi(z_1,\cdots,z_r,x_1,\cdots,x_n)$ 使得，当 $t_1,\cdots,t_r$ 分别为 $\theta_1,\cdots,\theta_r$ 的任何哥德尔数时，有 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)\simeq\varphi(t_1,\cdots,t_r,x_1,\cdots,x_n)$.

(b) 如果 $\varphi$ 是一致地部分递归于部分递归函数 $\theta_1,\cdots,\theta_r$，则有一个原始递归函数 $\eta(z_1,\cdots,z_r)$ 使得，当 $t_1,\cdots,t_r$ 分别为 $\theta_1,\cdots,\theta_r$ 的任何哥德尔数时，$\eta(t_1,\cdots,t_r)$ 为 $\varphi$ 的哥德尔数[1].

---

1) 根据乌斯平斯基 ([1955a]，定理 10*; [1955]，定理 7)，断言(b)的逆定理是成立的: 设泛函 $\varphi=\mathbf{F}(\theta_1,\cdots,\theta_r)$ 具有下列性质: 存在这样的原始递归函数 $\eta(z_1,\cdots,z_r)$ (只要求 $\eta$ 为部分递归便足) 使得，只要 $t_1,\cdots,t_r$ 分别为部分递归函数 $\theta_1,\cdots,\theta_r$ 的任一哥德尔数，则 $\eta(t_1,\cdots,t_r)$ 便是函数 $\varphi$ 的哥德尔数. 这时 $\mathbf{F}$ 便是部分递归的(即 $\varphi$ 一致地部分递归于 $\theta_1,\cdots,\theta_r$). 由此可得，断言(a)的逆定理亦成立· 设泛函 $\varphi=\mathbf{F}(\theta_1,\cdots,\theta_r)$ 具有下列性质，存在这样

当$\Psi$为$l$个完全有定义的函数时，如果把"部分递归于$\theta_1, \cdots, \theta_r$","部分递归","哥德尔数"分别改为"部分递归于$\theta_1, \cdots, \theta_r, \Psi$","部分递归于$\Psi$"，"由$\Psi$的哥德尔数"，则上述两结果仍成立。

**证明**(当$l=0$时) (a)由引理 VI，在由$\theta_1, \cdots, \theta_r$到$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$的定义中，如把$\theta_i(s_1, \cdots, s_{q_i})$改为$\Phi_{q_i}(z_i, s_1, \cdots, s_{q_i})$ $(i=1, \cdots, r)$，其结果得一函数$\varphi(z_1, \cdots, z_r, x_1, \cdots, x_n)$，部分递归于$\Phi_{q_1}, \cdots, \Phi_{q_r}$。但$\Phi_{q_1}, \cdots, \Phi_{q_r}$是部分递归的，故$\varphi(z_1, \cdots, z_r, x_1, \cdots, x_n)$是部分递归的。又$\theta_i(s_1, \cdots, s_{q_i}) \simeq \Phi_{q_i}(t_i, s_1, \cdots, s_{q_i})$，故$\varphi(x_1, \cdots, x_n) \simeq \varphi(t_1, \cdots, t_r, x_1, \cdots, x_n)$。

(b) 设$e$为$\varphi(z_1, \cdots, z_r, x_1, \cdots, x_n)$的一个哥德尔数，并取$\eta(z_1, \cdots, z_r) = S_n^r(e, z_1, \cdots, z_r)$。

**例 4** 根据我们对§60定理XIII的证明(追溯到§57定理IV的证明)，可知§61图1a中的$f$可以是部分递归函数$\mu y R(x, y)$的任何一个哥德尔数。因为$\mu y R(x, y)$一致地部分递归于$R$，由定理 XXIV (b)(应用到$R$的代表函数去)，有一个一般递归函数(实际上是原始递归)$\eta(z)$使得对$R(x, y)$的任何一个哥德尔数$r$，$\eta(r)$都是图1a中的$f$。这便证明了，可递归枚举集$C_0$(即$\hat{x}(Ey)T_1(x, x, y)$亦是一个创造集(坡斯特[1944]的用语)。(这里$R(x, y)$的哥德尔数$r$相当于坡斯特文中的可递归枚举集$\hat{x}(Ey)R(x, y)$的"基底B"。)

**例 5** §57定理V所给的非一般递归谓词的例子是$n \geqslant 1$个变元的。——0元谓词$(Ex)R(x)$不是一致地一般递归于谓词$R$的。否则，由定理 XXIV (a) $(n=0)$(应用到代表函数去)，便将有一个部分递归谓词$Q(z)$使得对于$R(x)$的任何一个哥德尔数$t$

---

的部分递归函数$\varphi(z_1, \cdots, z_r, x_1, \cdots, x_n)$，使得如果$t_1, \cdots, t_r$分别为部分递归函数$\theta_1, \cdots, \theta_r$的任一哥德尔数，则$\varphi(x_1, \cdots, x_n) \simeq \varphi(t_1, \cdots, t_r, x_1, \cdots, x_n)$。这时泛函$\mathbf{F}$是部分递归的。事实上，如果泛函$\mathbf{F}$满足刚才表述的断言的条件，而$e$为函数$\lambda z_1 \cdots z_r x_1 \cdots x_n \varphi(z_1, \cdots, z_r, x_1, \cdots, x_n)$的哥德尔数，则函数$\eta(z_1, \cdots, z_r) = S_n^r(e, z_1, \cdots, z_r)$便具有断言(b)中所说的性质，因此由断言(b)的逆定理，泛函$\mathbf{F}$便是部分递归的——俄译注。

都有$(Ex)R(x) \equiv Q(t)$. 今设$e$为谓词$T_1(a, a, x)$的哥德尔数. 则$Q(S_1^1(e, a))$将是$a$的一般递归谓词,且$(Ex)T_1(a,a,x) \equiv Q(S_1^1(e, a))$. 但$(Ex)T_1(a, a, x)$非一般递归的(定理V(15)).

**不定摹状　定理XXV**　对每个$n \geqslant 0$言,都有一个部分递归函数$\nu_n(z, x_1, \cdots, x_n)$具有下列性质. 设$r$为部分递归谓词$R(x_1, \cdots, x_n, y)$的一个哥德尔数. 则$\nu_n(r, x_1, \cdots, x_n)$之有定义当且仅当$(Ey)R(x_1, \cdots, x_n, y)$成立,这时它的值是使$R(x_1, \cdots, x_n, y)$成立的一数$y$. 我们经常把$\nu_n(r, x_1, \cdots, x_n)$缩写为"$\nu y_{(r)} R(x_1, \cdots, x_n, y)$",甚至缩写为"$\nu y R(x_1, \cdots, x_n, y)$". 并读为"使得$R(x_1, \cdots, x_n, y)$成立的一个$y$(与$r$有关)".

当$\Psi$为$l$个完全有定义的函数及谓词时仿此,这时可把"部分递归","哥德尔数","$\nu_n$","$\nu y_{(r)}$"分别改为"部分递归于$\Psi$","由$\Psi$的哥德尔数","$\nu_n^{\Psi}$","$\nu y_{(r)}^{\Psi}$".

**证明**(当$l = 0$时)可定义

$$\nu_n(z, x_1, \cdots, x_n)$$
$$\simeq (\mu y[T_{n+1}(z, x_1, \cdots, x_n, (y)_0, (y)_1) \& U((y)_1) = 0])_0.$$

**讨论**　最小数运算子$\mu y$以及不定摹状$\nu y$是计算使得$R(x_1, \cdots, x_n, y)$成立的$y$的两个不同的能行过程,各有其限制范围.

设$R$是能行地可判定的. 要计算$\mu y R(x_1, \cdots, x_n, y)$,我们首先根据对$R$的算法而决定$R(x_1, \cdots, x_n, 0)$为真或假. 如真,则取0为所找之数;如假,我们便试决定$R(x_1, \cdots, x_n, 1)$的真假;等等. 如果在找出一个使得$R(x_1, \cdots, x_n, y)$为真的$y$以前,先遇见一个使得$R(x_1, \cdots, x_n, y)$无定义的$y$,我们便不能跳过这个$y$而必须(遵照我们计算过程的规则)无穷地作出无效果的努力,用以解决$R(x_1, \cdots, x_n, y)$的真假问题. 对特殊的$R$来说,有时我们可有别的过程来避开这个阻碍,但一般说来,我们是无法避开的(参见§64例6).

要计算$\nu y R(x_1, \cdots, x_n, y)$,我们分散我们的努力来就各个不同的$y$而解决$R(x_1, \cdots, x_n, y)$的真假,例如,当我们用以解决$R(x_1, \cdots, x_n, 0)$是真或假的努力经过进行一定步骤后还未得出

判定时，我们可以开始从事于 $R(x_1, \cdots, x_n, 1)$的判定，等等. 这个探索如果未终止的话，可以对每个 $y$ 都把决定 $R(x_1, \cdots, x_n, y)$ 的真假的算法作到任意长. 只要对任何一个 $y$ 已经发现了 $R(x_1, \cdots, x_n, y)$是真的，我们便采用该 $y$ 而无须决定它是否最小的. 用这过程所获得的 $y$ 可以与所用的关于$R$的算法（即哥德尔数$r$)有关. 由下例(就 $n=0$ 而叙述)看来，这有关性一般地是不能避免的.

**例 6** 设 $\nu'(z)$ 为部分函数，具有下二性质：(a) 如果 $r$ 是部分递归谓词 $R(y)$ 的一个哥德尔数，则 $(Ey)R(y) \to R(\nu'(r))$. (b)如果 $r, s$ 为同一谓词的两个哥德尔数，则$\nu'(r) \simeq \nu'(s)$. 我们将证明，$\nu'$ 不是部分递归的. 设对每个 $k$ 把部分递归谓词 $R_k$ 及 $S_k$ 定义如下：

$$R_k(y) \cong y = 0 \vee y = 1 + 0 \cdot \mu z T_1(k, k, z),$$

$$S_k(y) \cong y = 0 \cdot \mu z T_1(k, k, z) \vee y = 1.$$

设$r_k$及$s_k$分别为 $R_k$ 及 $S_k$ 的任何哥德尔数. 任给 $k$，$R_k(0)$及 $S_k(1)$是真的，故由 (a)，$\nu'(r_k)$ 及 $\nu'(s_k)$ 均有定义. 如果 $(Ez)T_1(k, k, z)$，则$(y)[R_k(y) \cong S_k(y)]$；即 $R_k$ 与 $S_k$ 是相同的谓词；故用 (b)，$\nu'(r_k) = \nu'(s_k)$，即 $(Ez)T_1(k, k, z) \to \nu'(r_k) = \nu'(s_k)$，换质位（参见§ 26*12），

$$\nu'(r_k) \neq \nu'(s_k) \to (\overline{Ez})T_1(k, k, z).$$

反之，如果$(\overline{Ez})T_1(k, k, z)$，则 $R_k(y)$只对 $y=0$ 为真而$S_k(y)$只对 $y=1$ 为真，故由 (a)，$\nu'(r_k) \neq \nu'(s_k)$. 故得

$$\nu'(r_k) \neq \nu'(s_k) \equiv (\overline{Ez})T_1(k, k, z) \equiv (z)\overline{T}_1(k, k, z).$$

用以定义 $R_k(y)$ 及 $S_k(y)$ 的表达式是二元 $k, y$ 的部分递归谓词；设这两谓词分别具有哥德尔数 $r$ 及 $s$. 我们可取 $r_k = S_1^1(r, k)$ 及 $s_k = S_1^1(s, k)$，从而得到等价式 $\nu'(S_1^1(r, k)) \neq \nu'(S_1^1(s, k)) \equiv (z)\overline{T}_1(k, k, z)$. 如果 $\nu'$ 是部分递归的，则左端将是 $k$ 的一般递归谓词；但右端则否(定理Ⅴ(14)).

## §66. 递归定理

**定理 XXVI** 对任何 $n \geqslant 0$ 言,设 $\mathbf{F}(\zeta; x_1, \cdots, x_n)$ 为一个部分递归泛函,其中函数变元 $\zeta$ 的变域是 $n$ 元部分函数. 则方程

$$\zeta(x_1, \cdots, x_n) \simeq \mathbf{F}(\zeta; x_1, \cdots, x_n)$$

对 $\zeta$ 有一解 $\varphi$,使得 $\zeta$ 的任何解 $\varphi'$ 都是 $\varphi$ 的扩张,并且这个解 $\varphi$ 是部分递归的.

仿此,当 $\Psi$ 是 $l$ 个部分函数及谓词时,

$$\zeta(x_1, \cdots, x_n) \simeq \mathbf{F}(\zeta, \Psi; x_1, \cdots, x_n)$$

对 $\zeta$ 有一解 $\varphi$, 使得 $\zeta$ 的任何解 $\varphi'$ 都是 $\varphi$ 的扩张,并且这个解 $\varphi$ 是部分递归于 $\Psi$ 的.(第一递归定理.)

**证明**(当 $l = 0$, $n = 1$ 时)令 $\varphi_0$ 为完全无定义的函数,我们依次引入 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \cdots$ 如下

$$\varphi_1(x) \simeq \mathbf{F}(\varphi_0; x),\ \varphi_2(x) \simeq \mathbf{F}(\varphi_1; x),$$
$$\varphi_3(x) \simeq \mathbf{F}(\varphi_2; x), \cdots.$$

因为 $\varphi_0$ 是完全无定义的,故 $\varphi_1$ 是 $\varphi_0$ 的扩张;故由定理 XXI (a), $\varphi_2$ 是 $\varphi_1$ 的扩张, $\varphi_3$ 是 $\varphi_2$ 的扩张,等等. 设 $\varphi$ 是 $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \cdots$ 的"极限函数";即对每个 $x$, $\varphi(x)$ 有定义当且仅当有 $s$ 使 $\varphi_s(x)$ 有定义,这时 $\varphi(x)$ 的值便是这些 $\varphi_s(x)$ 的公共值,当 $s \geqslant$ 最小的这样的 $s$ 时. 今有:

(i) 对每个 $x$, $\varphi(x) \simeq \mathbf{F}(\varphi; x)$. 试考虑任一 $x$. 设 $\varphi(x)$ 有定义. 则有 $s$ 使得 $\varphi(x) \simeq \varphi_{s+1}(x)$ [由 $\varphi$ 的定义] $\simeq F(\varphi_s; x)$ [由 $\varphi_{s+1}$ 的定义] $\simeq \mathbf{F}(\varphi; x)$ [由定理 XXI (a),因 $\varphi$ 是 $\varphi_s$ 的扩张]. 反之,设 $\mathbf{F}(\varphi; x)$ 有定义;命其值为 $k$. 因 $\mathbf{F}$ 是部分递归的,所以有一方程系 $F$ 递归地由 $\zeta$ 而定义 $\mathbf{F}(\zeta; x)$, 设它以 f 为主要函数字母,以 g 为已给函数字母;这时有一个由 $E_g^\varphi$, $F$ 到 $\mathrm{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{k}$ 的推演. 设 $E_g^\varphi$ 中的方程出现于这个推演中的是下列方程, $\mathrm{g}(\mathbf{y}_1) = \mathbf{z}_1, \cdots, \mathrm{g}(\mathbf{y}_p) = \mathbf{z}_p$ (而 $z_i = \varphi(y_i)$). 但有某些 $s_1, \cdots, s_p$ 使 $\varphi(y_1) = \varphi_{s_1}(y_1), \cdots, \varphi(y_p) = \varphi_{s_p}(y_p)$. 设 $s = \max(s_1, \cdots, s_p)$. 则

$\varphi(y_1)=\varphi_s(y_1),\cdots,\ \varphi(y_p)=\varphi_s(y_p)$. 故 $g(\mathbf{y}_1)=\mathbf{z}_1,\cdots,$ $g(\mathbf{y}_p)=\mathbf{z}_p \varepsilon E_g^{\varphi_s}$. 故 $E_g^{\varphi_s}$, F$\vdash f(\mathbf{x})=\mathbf{k}$,故

$$k\simeq \mathbf{F}(\varphi_s;\ x)\simeq \varphi_{s+1}(x)\simeq\varphi(x).$$

(ii) 如果对于每个 $x$ 都有 $\varphi'(x)\simeq \mathbf{F}(\varphi';x)$,则 $\varphi'$ 是 $\varphi$ 的一个扩张. 只须就 $s$ 作归纳而证明下事实便够了: 对每个 $x$, 如果 $\varphi_s(x)$有定义则 $\varphi'(x)\simeq\varphi_s(x)$. 奠基: $s=0$ 空虚地为真. 归纳推步. 设对一个给定的 $x$, $\varphi_{s+1}(x)$有定义,则

$$\varphi_{s+1}(x)\simeq \mathbf{F}(\varphi_s;\ x)\simeq \mathbf{F}(\varphi';\ x)$$

[由定理 XXI(a),因由归纳假设, $\varphi'$ 是 $\varphi_s$ 的扩张]$\simeq\varphi'(x)$.

(iii) 如果 F 递归地由 $\zeta$ 而定义 $\mathbf{F}(\zeta,\ x)$, 在 F 中把已给函数字母 g 改为主要函数字母 f 后设得方程系 E, 则 E 递归地定义 $\varphi$. 这只须证明下事便够了: E$\vdash f(\mathbf{x})=\mathbf{k}$ 当且仅当有 $s$ 使 $\varphi_s(x)\simeq k$. 容易看见,如果 $\varphi_s(x)=k$, 则 E$\vdash f(\mathbf{x})=\mathbf{k}$. 今证其逆. 我们就 $k$ 作归纳而证明: 如果对 $f(\mathbf{x})=\mathbf{k}$ 有一个高度为 $k$ 的推演, 则有 $s$ 使 $\varphi_s(x)=k$. 如有必要可把这推演更改,使得在任一用 R2 的推理中(其小前提呈 $f(\mathbf{y})=\mathbf{z}$ 形), 其大前提中只有 $f(\mathbf{y})$的一个出现是被替换以 $\mathbf{z}$ 的(动作 1).在推演内各方程中 f 的出现可依照显然的方法分成两种,一种是由 F 中 f 的出现而来的,一种是由 F 中 g 的出现把 g 改为 f 后而来的. 今考虑根据 R2 的推理(其小前提呈 $f(\mathbf{y})=\mathbf{z}$ 形) 而被替换的部分 $f(\mathbf{y})$其 f 乃由 F 中的 g 而来的. 今设有 P 个这样的推理,其小前提分别为 $f(\mathbf{y}_1)=\mathbf{z}_1,\cdots,f(\mathbf{y}_p)=\mathbf{z}_p$, 它们的下面不再有同类的前提出现. 这 $p$ 个前提, 在动作 1 之前,都是出现在该推演的尾方程之上的;故应用归纳假设可得, $z_1\simeq\varphi_{s_1}(y_1)\simeq\varphi_s(y_1),\cdots,z_p\simeq\varphi_{s_p}(y_p)\simeq\varphi_s(y_p)$, 这里 $s=\max(s_1,\cdots,\ s_p)$. 今在动作 1 以后的推演中,把所有在 $f(\mathbf{y}_1)=\mathbf{z}_1,\ \cdots,\ f(\mathbf{y}_p)=\mathbf{z}_p$ 以上的方程都除去, 试考虑余下的树枝形(作动 2). 在这树枝形中, 凡 f 的出现如果 (在动作 2 以前)是由 F 中的 g 而来的,今再换回 g (动作 3). 这种的 f 都是出现在方程的右端的,因为 g 既是 F 中的已给函数字母,故在 F 中只在右端出现;因此,下列各方程中的 f 均不被动作 3 所更改: 在动

作 3 以前已作为 R2 的前提的那些方程以及尾方程 $\mathrm{f}(\mathbf{x})=\mathbf{k}$. 最后把 $f(\mathbf{y}_1)=\mathbf{z}_1, \cdots, \mathrm{f}(\mathbf{y}_p)=\mathbf{z}_p$ 中的 f 改回 g (动作 4)，这便使得被动作 3 所破坏了的依 R2 而作的推理又恢复为推理 3. 结果所得的树枝形便是由 $E_g^{\varphi_s}$,F 到 $\mathrm{f}(\mathbf{x})=\mathbf{k}$ 的推演. 故得

$$k \simeq \mathbf{F}(\varphi_s;\ x) \simeq \varphi_{s+1}(x).$$

**例 1** 试考虑下问题：找一个部分递归函数 $\varphi$ 使得

(a) $$\varphi(x) \simeq \varphi(x);$$

即就 $\zeta$ 而解方程 $\zeta(x) \simeq \zeta(x)$. 显然任何部分函数都满足该方程. 但满足该方程而具有最小的定义域的部分函数是完全无定义的函数. 这便是本定理所给的解 $\varphi$ (这里 $\mathbf{F}(\zeta;\ x) \simeq \zeta(x)$).

**例 2** 试找一个部分递归函数 $\varphi$ 使得

(a) $$\varphi(x) \simeq \varphi(x)+1;$$

即就 $\zeta$ 而解 $\zeta(x) \simeq \zeta(x)+1$. 只有完全无定义的部分函数才满足它. 这当然是本定理所给的解 $\varphi$ (这里 $\mathbf{F}(\zeta;\ x) \simeq \zeta(x)+1$).

**例 3** 试找一个部分递归于 $\chi$ 的函数 $\varphi$ 使得

(a) $$\begin{cases}\varphi(0) \simeq q, \\ \varphi(y') \simeq \chi(y, \varphi(y))\end{cases}$$

(§ 43 模式 (Va)). 对一个给定的 $\chi$ 言，只有一函数 $\varphi$ 满足它，由定理 XVII (a) 我们已知它是部分递归于 $\chi$ 的. 但是，为了要看本定理在这里如何应用，可先把(a)重写为

(b) $\varphi(x) \simeq \mathbf{F}(\varphi, \chi;\ x)$，这里

$$\mathbf{F}(\zeta, \chi; x) \simeq \begin{cases} q & \text{当 } x=0 \text{ 时}, \\ \chi(x \dot{-} 1, \zeta(x \dot{-} 1)) & \text{当 } x>0 \text{ 时}. \end{cases}$$

(等价地，可写为

$$\mathbf{F}(\zeta, \chi;\ x) \simeq \mu w[\{x=0 \& w=q\} \vee \{x>0 \& w = \chi(x \dot{-} 1, \zeta(x \dot{-} 1))\}]).$$

因为 $\mathbf{F}(\zeta, \chi; x)$ 是部分递归的(用定理 XVII, XX (c)或用 XVII, XVIII, XX (a). )依本定理，$\varphi$ 是部分递归于 $\chi$ 的.

**例 4** 今对定理 XVIII 给一个新证明（这证明已以各种面貌出现于克林 Kleene[1935, 1936, 1943]中). 设

$$\varphi(x) \simeq \mu y[\chi(x, y) = 0].$$

则 $\varphi(x) \simeq \varphi(x, 0)$，这里

(a) $$\varphi(x, y) \simeq \mu t_{t \geq y} [\chi(x, t) = 0].$$

但 $\varphi(x, y)$ 是满足下面方程的具有最小定义域的部分函数

(b) $$\varphi(x, y) \simeq \begin{cases} y & \text{当 } \chi(x, y) = 0 \text{ 时,} \\ \varphi(x, y') & \text{当 } \chi(x, y) \neq 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

由定理 XX (c)(及其第一个证明) (b) 的右边呈 $\mathbf{F}(\varphi, \chi; x, y)$ 形而 $\mathbf{F}(\zeta, \chi; x, y)$ 是部分递归的；因此，依本定理，$\varphi(x, y)$ 因而 $\varphi(x)$ 便是部分递归于 $\chi$ 的.

**讨论** 当 $l = 0$ 时本定理说，我们可以任意提出下形的关系式

(72) $$\varphi(x_1, \cdots, x_n) \simeq \mathbf{F}(\varphi; x_1, \cdots, x_n),$$

它把函数 $\varphi$ 的未定值 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 用 $\varphi$ 本身及 $x_1, \cdots, x_n$ 根据部分递归函数理论所已经处理过的方法来表示；并可作出结论说，满足这关系式而且具最小的定义域的部分函数是部分递归的.

更进一步，当 $l > 0$ 时，本定理说，可以提出下列的关系式

(73) $$\varphi(x_1, \cdots, x_n) \simeq \mathbf{F}(\varphi, \Psi; x_1, \cdots, x_n),$$

因而这定理可用以把一大堆方法推广到别的应用上去.

我们所讨论过的各种特殊种类的“递归式”(§ 43, § 46 及§ 55 起首处)，都是把函数的未定值 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 用在前的变目处(依照对变目 $n$ 元矢所作的某种特殊排序的) 该函数的值而表示的. 现在我们有一般“递归式”，其中值 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 与同一函数的其它的值之间的关系很是随便，只要其依赖性能够用预先处理过的能行方法加以描述便成.

但是作为通常的(即完全有定义的)数论函数 $\varphi$ 的定义言，所给的递归式却嫌含混，由于它可被多于一个函数所满足(例 1 或例 4 (b)，当 $\chi(x, y)$ 对无穷多个 $y$ 值不为 0 时). 但我们可只取下者作为解答，即只当递归式要求它有定义时它才有定义，它最对我们有兴趣. 作为通常函数的定义而言，所给的递归式可能是不相容的 (例 2)；但我们所找的解只是部分函数，因此困难也就克服了.

当 **F** 为一般递归时，这两种困难都可出现（例 1 及例 2）。当 **F** 为不完全定义时，在我们一般约定下（§ 63），该递归式既可直接要求该 $\varphi$ 对某些变目是无定义的（如例 3，当 $\chi$ 取作完全无定义的函数时），亦可通过不相容性而间接地要求其无定义（未必如例 2 那末明显）。

给出一个形如(72)或(73)的关系式，要认出对什么样的变目 $x_1, \cdots, x_n$ 该函数值 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 必须有定义，这是一个很困难的问题。这问题与下列问题不同，认出具有最小定义域的解答 $\varphi$ 的部分递归性，后者已由第一递归定理解决了。

我们可用该定理来叙述§ 62(A2)所说的情形。我们以前用以证明一个能行地可计算函数必是部分递归的（因此，如果完全有定义的话便是一般递归的）方法，现在已经发展了，亦可用以处理对一函数可能提出的任何能行的定义了。在普通语言中，要描述计算一新函数 $\varphi$ 的过程，我们需要能行地说明，函数值 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 如何地通过 $\varphi$ 的已计算过的值而获得。在说明中，我们正常地是使用已经预先研究过的能行地可计算函数，命题演算的联结词，可能还有有界量词（无界量词不是能行的）以及形如"使得…成立的最小的数"的描述。这些话都可以翻译成我们的理论中已经处理过的运算去（参见，特别地，定理 XVIII 及 XX）。因此整个的说明便如第一递归定理所说的；即我们可把它表示为下列的叙述：$\varphi$ 须对某个 **F** 而满足（72），并且只当根据这个说明而使得它有值时它才有定义，即 $\varphi$ 须是满足(72)的具有最小定义域的函数。因此依照定理我们可作出结论说，$\varphi$ 是部分递归的。

除上述的以外，其它运算亦可用已经考虑过的方法而处理，例如几个函数的联立定义（参见§ 46 例 4）。我们希望其它可能使用的观点亦能够先用上述的词汇来说明之。我们今把结果这样地表述，使得不但成为证明某特殊函数的部分（或一般）递归性的方法，而且遇必要时还可以增加我们可能使用的方法。

**定理 XXVII** 对每个 $n>0$ 言：给定任何部分递归函数 $\psi(z, x_1, \cdots, x_n)$，都可找出一数 $e$，它递归地定义 $\psi(e, x_1, \cdots,$

$x_n$)，即使得

(74a) $\{e\}(x_1,\cdots,x_n)\simeq\phi(e,x_1,\cdots,x_n)$.

同样，对 $l$ 个完全有定义的函数及谓词 $\Psi$ 言，可把“部分递归”，“递归地定义”，“{ }”分别地改为“部分递归于 $\Psi$”，“由 $\Psi$ 递归地定义”，“$\{\ \}^{\Psi}$”.（递归定理，克林 [1938]）

**证明**（$l=0$ 时） 函数 $\phi(S_n^1(y,y),x_1,\cdots,x_n)$ 是部分递归的(参见定理 XXIII). 设 $f$ 递归地定义它，并取 $e=S_n^1(f,f)$，则 $e$ 递归地定义由下法所得的 $n$ 元函数，即在 $\phi(S_n^1(y,y),x_1,\cdots,x_n)$ 中把变元 $y$ 代以 $f$ 所得的；即 $e$ 递归地定义 $\phi(S_n^1(f,f),x_1,\cdots,x_n)$，即 $e$ 递归地定义 $\phi(e,x_1,\cdots,x_n)$，如所欲证.

**讨论** 这定理可以读为，对任何部分递归函数 $\varphi$ 言，下方程

$$z(x_1,\cdots,x_n)\simeq\phi(z,x_1,\cdots,x_n)$$

可对 $z$ 求解. 这里，关于记号方面可参见§ 65 尤其(66). 由这方程的解 $e$ 所递归地定义的函数 $e(x_1,\cdots,x_n)$，若改写为 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$，则 (74a) 可写为

(74b) $\varphi(x_1,\cdots,x_n)\simeq\phi(e,x_1,\cdots,x_n)$.

但 $\phi(z,x_1,\cdots,x_n)$可为任意的 $n+1$ 元部分递归函数. 因此这定理说，可找一个部分递归函数 $\varphi$，它的未定值$\varphi(x_1,\cdots,x_n)$可由它自己的一个哥德尔数 $e$ 及 $x_1,\cdots,x_n$ 通过任何预先指定的部分递归函数 $\phi$ 而表示出来. 这时，在作出 $\varphi$ 自己的未定值的时候，$\varphi$ 函数本身仍然是可以使用的，因为，在作出 $\phi(e,x_1,\cdots,x_n)$时，可以把 $e$ 填入形如 $\Phi_n(e,u_1,\cdots,u_n)$（简写为 $e(u_1,\cdots,u_n)$）的部分中，而 $\Phi_n(e,u_1,\cdots,u_n)$便是 $\varphi(u_1,\cdots,u_n)$. 为强调这点可叙述成一系理.（当 $l>0$ 时其说法读者可自为之.）

**系** 给定一个部分递归泛函 $\mathbf{F}(\zeta;z,x_1,\cdots,x_n)$，这里 $\zeta$ 以 $n$ 元部分递归函数为变域，总可以找出一个部分递归函数 $\varphi$ 及 $\varphi$ 的一个哥德尔数 $e$ 使得

(75) $\varphi(x_1,\cdots,x_n)\simeq\mathbf{F}(\varphi;e,x_1,\cdots,x_n)$.

给定一个部分递归泛函 $\mathbf{F}(\zeta,\theta_1,\cdots,\theta_r;z,w_1,\cdots,w_r,x_1,\cdots,x_n)$，这里 $\zeta$ 以 $n$ 元部分递归函数为变域，而 $\theta_1,\cdots,\theta_r$ 的变

域则是具有明指变元个数的部分递归函数，总可找出一个部分递归函数 $\varphi(w_1, \cdots, w_r, x_1, \cdots, x_r)$ 及 $\varphi$ 的一个哥德尔数 $e$，使得当 $t_1, \cdots, t_r$ 分别为 $\theta_1, \cdots, \theta_r$ 的任何哥德尔数时，都有

$$(76)\quad \varphi(t_1, \cdots, t_r, x_1, \cdots, x_r) \simeq \mathbf{F}(\varphi, \theta_1, \cdots, \theta_r; t_1, \cdots, t_r, x_1, \cdots, x_n).$$

**证明**（$r=0$ 时） 由定理 XXIV (a)，可找一个 $n+2$ 元部分递归函数 $\psi$ 使得

$$\mathbf{F}(\zeta; z, x_1, \cdots, x_n) \simeq \psi(s, z, x_1, \cdots, x_n),$$

这里 $s$ 是 $\psi$ 的任何哥德尔数．今令 $\phi(z, x_1, \cdots, x_n) \simeq \psi(z, z, x_1, \cdots, x_n)$．再根据本定理就(74)而找数 $e$．把 $e$ 所递归地定义的函数写为 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$，我们便得

$$\varphi(x_1, \cdots, x_n) \simeq \phi(e, x_1, \cdots, x_n) \simeq \psi(e, e, x_1, \cdots, x_n) \simeq \mathbf{F}(\varphi; e, x_1, \cdots, x_n)$$

**讨论**（续完） 当 $\varphi$ 一致地部分递归于 $\zeta$ 时，我们可以看作 $\varphi$ 是部分递归于作为函数的 $\zeta$；当 $\varphi$ 是 $x_1, \cdots, x_n$ 及 $\zeta$ 的一个哥德尔数的部分递归函数时，我们可以看作 $\varphi$ 部分递归于作为客体的 $\zeta$．定理 XXVII 不同于定理 XXVI 之点在于，在用 $\varphi$ 本身及 $x_1, \cdots, x_n$ 而表示未定值 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 时，$\varphi$ 不但可作为函数而出现，还可以作为客体而出现．我们亦可以作结论说，有某个部分递归函数 $\varphi$ 满足这关系；但在定理 XXVII 证明中的 $\psi(S_n^1(y, y), x_1, \cdots, x_n)$，若对它的哥德尔数 $f$ 作不同的选择，一般说将会得到不同的解答 $\varphi$．

定理 XXVII 并不完全包括定理 XXVI 作为其特例，即 $\varphi$ 只作为函数而出现于“递归式”中的特例（这时，系中的 $\mathbf{F}(\zeta; z, x_1, \cdots, x_n)$ 便化归为 $\mathbf{F}(\zeta; x_1, \cdots, x_n)$），因为由定理 XXVII 的证明并没有得出（至少必须再继续论证）所得的部分递归的解答 $\varphi$ 必然地是具有最小定义域的．因此，当加入论点 I, I*, I†(b) 及 I*†(b) 后，定理 XXVII 与其系合并可代替定理 XXVI，但若只加入 I†(a) 及 I*†(a)，则不能代替．

当然，只有当我们采取邱吉论点后，我们才有工具把每个能行

地可计算函数看作数论上的客体. 至于总有一个能行地可计算函数来适合任何的"递归式", 在其中它除了作为函数而出现外还可作为客体而出现,这点便是该论点的一个后承,而在今后的发展中非常有用的.

**例 2** (续完) 试不用定理 XXVI 而用 XXVII 处理之,把定理 XXVII 中的 $\psi(z, x)$ 取为 $\simeq \Phi_1(z, x) + 1$.

**例 3** (续完) 同上,而取

$$\psi(z, x) \simeq \mathbf{F}(\lambda x\Phi_1(z, x), \chi; x) \simeq \mu w[(x = 0 \& w = q) \vee \{x > 0 \& w = \chi(x \dot{-} 1, \Phi_1(z, x \dot{-} 1))\}].$$

**例 5** 给出固定的部分递归函数 $\theta_1, \cdots, \theta_5$,要找一个具下性质的部分递归函数 $\varphi$. 如果 $\theta_1(x) = 0$ 则 $\varphi(x) = 1$. 如果 $\theta_1(x) = 1$ 则 $\varphi(x) \simeq \theta_2(\varphi(\theta_3(x)))$. 如果 $\theta_1(x) = 2$ 则

$$\varphi(x) \simeq \theta_4(a_{\varphi,x}),$$

这里 $a_{\varphi,x}$ 是递归地定义 $\lambda y\varphi(\theta_5(x, y))$ 的一数. 首先注意, 如果 $e$ 为 $\varphi$ 的任一哥德尔数, 则 $\varphi(\theta_5(x, y)) \simeq \Phi_1(e, \theta_5(x, y))$. 又 $\lambda zxy\Phi_1(z, \theta_5(x, y))$ 是一个固定的部分递归函数. 如果 $g$ 为它的一个哥德尔数,则 $S_1^2(g, e, x)$便是 $\lambda y\Phi_1(e, \theta_5(x, y))$即 $\lambda y\varphi(\theta_5(x, y))$的一个哥德尔数. 故根据上述三性质 $\varphi$ 须满足下方程

$$\text{(a)} \quad \varphi(x) \simeq \mu w[\{\theta_1(x) = 0 \& w = 1\} \vee \{\theta_1(x) = 1 \& w = \theta_2(\varphi(\theta_3(x)))\} \vee \theta_1(x) = 2 \& w = \theta_4(S_1^2(g, e, x))\}].$$

这便是系中的(75)形,因为(用定理 XVII, XVIII, XX, XXIII)右端呈 $\mathbf{F}(\varphi; e, x)$形,而 $\mathbf{F}(\zeta; z, x)$为一个固定的部分递归泛函,而 $e$ 可为 $\varphi$ 的任何哥德尔数. 若用本定理,则可改取

$$\psi(z, x) \simeq \mu w[\{\theta_1(x) = 0 \& w = 1\} \vee \{\theta_1(x) = 1 \& w = \theta_2(\Phi_1(z, \theta_3(x)))\} \vee \{\theta_1(x) = 2 \& w = \theta_4(S_1^2(g, z, x))\}].$$

在克林 [1938] 中已出现上述问题, 不过其中的 $\theta_1, \cdots, \theta_5$ 为特殊的函数罢了. 我们可把它推广,把 $\theta_1, \cdots, \theta_5$ 看作未明指的部分递归函数. 设 $t_1, \cdots, t_5$ 为它们的任一哥德尔数. 如果 $h$ 为

$$\lambda zwxy\Phi_1(z, \Phi_2(w, x, y))$$

的一个哥德尔数，则 $S_1^3(h, e, t_5, x)$ 便是 $\lambda y\Phi_1(e, \Phi_2(t_5, x, y))$ 即 $\lambda y\varphi(\theta_5(x, y))$ 的一个哥德尔数．根据上述性质，$\varphi$ 便须满足下方程

(b) $\qquad \varphi(x) \simeq \varphi(t_1, \cdots, t_5, x) \simeq \mu w[\{\theta_1(x) = 0 \& w = 1\}$
$\qquad \vee \theta_1(x) = 1 \& w = \theta_2(\varphi(\theta_3(x)))\} \vee \{\theta_1(x) = 2 \&$
$\qquad w = \theta_4(S_1^3(h, e, t_5, x))\}]$.

由系理的第二部分，我们可找出一个部分递归函数 $\varphi(w_1, \cdots, w_5, x)$ 及 $\varphi$ 的一个哥德尔数 $e$ 使满足(b)。

# 第十三章　可机算函数

## §67. 杜令机器

假设有一人根据下列的预先给定的能行指示而计算[1] 在某组给定变目处一函数的值. 在实施计算时，他将使用有限个同种类的不同的符号. 在同一时间内他只能观察到有限个符号（的出现）. 他能够记忆预先看过的别的记号,但也只能是有限个的. 预先给定的指示也只能是有限多个. 但指示应用到有限多个看到的及记忆起的记号去后,他只能实施一动作,用有限个方法把状态更改,例如,增加或擦去某些记号的出现,把他的观察移到别处,把刚才看到的录入他的记忆中. 继续这些动作一定能使他从代表变目的那个符号表达式转到代表函数值的符号表达式去.

现在我们要问，能不能把计算员所实施的动作分解成为一些"原子"动作，使得任何可实施的动作都是这些原子动作的继续. 原子动作将是下列动作的合并：认出给定符号的一次出现，擦去这次出现,写下一符号的一次出现,在一给定符号序列上从一个观察点转到邻点,并更改记忆情报.

这个分析首由杜令([1936—7],收到时为 1936 年 5 月 28 日)所从事,他给出一种计算机器的定义. 同样的分析亦由坡斯特(坡斯特[1936],收到时为 1936 年 10 月 7 日)简短地给出.

当我们熟悉杜令机器以后我们再给出一些明证，以指出这个分析是完全的，即对任何的能行地可计算的函数都可作出一杜令机器来计算它（§ 70).

---

1) 原文为 compute，在本段中(未定义机器以前)我们仍译为"计算",待定义了机器以后便译为"机算". 至于 computable 则从头到尾译为"可机算的"——译者注.

我们首先表述杜令机器的意念如下.

机器附有一条线形的带，其两端(左及右)都是(潜伏)无穷地长. 带被分成方格. 每个方格都可以是空的或可有有限多个符号 $s_1, \cdots, s_j (j \geqslant 1)$ 印在其上,这些符号对每一种特殊机器言都是固定的. 如果我们把"空"写为 $s_0$,刚一给定的方格可以有 $j+1$ 种形态之一: $s_0, \cdots, s_j$. 使用这条带时,在任何"情况"之下,都只有有限个($\geqslant 0$)方格已被印着.

带子通过机器,使得在一个给定的"情况"之下,机器恰巧注视一方格(被注视方格), 在这方格内的记号,如果空时则指 $s_0$, 便叫做被注视的记号(虽则严格地说, $s_0$ 不是一记号).

机器可以在有限多个(机器)状态(以后省译为机态——译者) $q_0, \cdots, q_k (k \geqslant 1)$ 之一之下(杜令叫做"机器布局"或"$m$布局"). $q_0$ 叫做被动(或终止)机态; 而 $q_1, \cdots, q_k$ 叫做主动机态. 对一特殊的机器说, $q_0, \cdots, q_k$ 是固定的.

(纸带的及机器的)情况(杜令叫做"完全布局")包括三者: 一个特殊的带上印录(即在什么方格上印着什么符号), 在机器中的带上位置(即什么方格被注视着)及一个特殊的机态(即机器是在什么机态之下). 如果这机态是主动的, 则该情况便叫做主动的; 否则便叫做被动的.

给出一个主动情况, 机器便实施一个(原子)动作(杜令叫做"一动"). 所实施的动作是由所给定的情况中被注视符号 $s_a$ 及机态 $q_c$ 而决定的. 对偶 $(s_a, q_c)$ 叫做布局(当 $q_c$ 为主动的时,它叫主动的;否则叫被动的). 该动作把情况的三个部分更改了, 得出一个新情况如下. 首先被注视的符号由 $s_a$ 变成 $s_b$. (但 $a=b$ 是可以的,这时"变换"是恒等变换.)其次, 在机器中的带子被移动了(或机器沿带子移动),使得在新情况中被注视方格与原给情况中被注视方格相比较, 或在其左, 或在同一位置或在其右. 第三,机态由 $q_c$ 变成 $q_d$ (但 $c=d$ 是容许的.)

如果所给的情况是被动的,则机器不实施任何动作.

机器照下列方式而使用. 我们选择一主动情况来开动该机

器，这叫做开始情况或输入．我们的记法将把在这情况时的机态(开始机态)记为 $q_1$．机器于是实施一原子动作．如果这动作以后所得的情况是主动的，则机器又再动作．机器照这样继续下去，只要继续得出主动情况，便继续作出动作．如果万一达到了被动情况，我们便说机器停止．它停止时的情况叫做终止情况或输出．

由开始情况到终止情况(如果有的话)的更改，可以叫做机器所实施的运算．

要描述原子动作，我们使用具下列三形状之一的表达式：

$$s_b L q_d,\quad s_b C q_d,\quad s_b R q_d.$$

这里"$L$"，"$C$"，"$R$"分别表示结果所得的被注视方格在原给的被注视方格之左、同(之中)、之右．

这动作的第一部分(即由 $s_a$ 变 $s_b$)有四种情形：当 $a=0$ 而 $b>0$，它是"印 $s_b$"；当 $a>0$ 而 $b=0$，则"擦去 $s_a$"；当 $a, b>0$ 且 $a\neq b$，则"擦去 $s_a$ 印上 $s_b$"或简单地是"改印 $s_b$"；当 $a=b$ 则"没有更改"．我们常把这一部分描述为"印 $s_b$"，而不再区别各情形．

要定义一特殊机器，我们必须列出符号 $s_1, \cdots, s_j$ 及主动机态 $q_1, \cdots, q_k$，对每个主动机态还要明指所实施的原子动作．这种所作动作的明指可用 $k$ 行 $j+1$ 列的(机器)表而描述，$k$ 行用以列主动机态，$j+1$ 列用以列方格形态．

**例 1** 下表定义一机器("机器 $\mathfrak{A}$")，只具有一符号 $s_1$ 及一主动机态 $q_1$．

| 机器名 | 机态 | 被注视符号 $s_0$ | 被注视符号 $s_1$ |
|---|---|---|---|
| $\mathfrak{A}$ | $q_1$ | $s_1 C q_0$ | $s_1 R q_1$ |

假设符号 $s_1$ 实际上是竖号"|"．让我们看看，如果具下列外貌的纸带放到机器去，使得上面写有机态 $q_1$ 的那一格是被注视方格时，机器将怎样动作．未曾写出的方格其形态如何将是没有关系的，在动作过程中它们亦是不受改变的．

| $q_1$ | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | |

机器在机态 $q_1$ 中，所注视的方格内印有记号 $s_1$. 在这布局下，表上所要求的原子动作是 $s_1Rq_1$，即对被注视方格的形态不作更改，机器向右移，仍然取得机态 $q_1$. 结果情况便如下.

| | $q_1$ | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | |

其后的三个动作便依次地得出下列各个情况，在最后的情况下，机器停止.

| | | $q_1$ | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | |

| | | | $q_1$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | |

| | | | $q_0$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |

机器 $\mathfrak{A}$ 实施下列的运算：它找出被注视方格右面(本身在内)的第一个空格，在那里印下|，并注视该方格而停止.

现在我们定义，所谓一机器把一个 $n$ 元部分数论函数 $\varphi$ 加以"机算"到底指的是什么(参见§ 63). 至于就通常的(即完全有定义的)数论函数而作的定义，只须删去 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 可能无定义的可能性便成了.

我们首先约定把自然数 0，1，2，…分别用竖号|，||，|||…表之，竖号"|"便是记号 $s_1$. 在自然数 $y$ 的表示式中，共有 $y+1$ 个竖号.

要把自然数 $m$ 矢 $y_1, \cdots, y_m (m \geqslant 1)$ 在带上表示，我们相应地印出适当个数的竖号，但在两群竖号之间留一空格，在第一群之前及最末群之后亦留一空格.

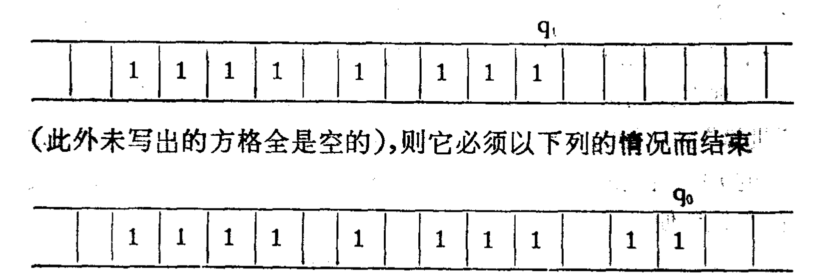
**例 2** 3矢3，0，2可如下表示

| | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 | | 1 | 1 | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

我们说，在带上的一数 $y$（或一个 $m$ 矢 $y_1,\cdots,y_m$）（的表示式）是在标准位置（被注视着）（以后又常省称被标准地注视——译者）．如果被注视方格恰巧印着表示 $y$（表示 $y_m$）的最后一根竖号时．

我们说，一给定机器 $\mathfrak{M}$ 机算了一个给定的 $n$ 元部分函数 $\varphi$（$n\geqslant 1$），如果对于每个自然数 $n$ 矢 $x_1,\cdots,x_n$，下列的话成立（当 $n=0$ 时，参见下面的附注1）．设在带上表示了 $x_1,\cdots,x_n$，而其它的方格空着，即除却该表示式所需要的 $x_1+x_2+\cdots+x_n+2n+1$ 个方格外，其余均空着．设 $\mathfrak{M}$ 开始时，标准地注视着 $x_1,\cdots,x_n$ 的表示式．则当且仅当 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 有定义且 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)=x$ 时 $\mathfrak{M}$ 停止，而有 $n+1$ 矢 $x_1,\cdots,x_n,x$ 表示于带上且被标准地注视着．（如果 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 无定义，$\mathfrak{M}$ 可不停止，亦可停止但没有 $n+1$ 矢 $x_1,\cdots,x_n,x$ 被标准地注视着．）

**例 2**（续完） 如果 $\varphi(3,0,2)=1$，而 $\mathfrak{M}$ 机算 $\varphi$，则当 $\mathfrak{M}$ 从下列情况开始时，



(此外未写出的方格全是空的)，则它必须以下列的情况而结束

这里，未写出的方格是无关重要的．

虽则在叙述变目以及获得函数值时只用到一符号 $s_1$ 或“1”，但在机算过程中却可用到其它符号．对每个 $n\geqslant 1$ 言，每个机器（以它的第一个记号作为竖号）都机算了某一个 $n$ 元部分函数．

一个部分函数 $\varphi$ 叫做可机算的，如果有一机器 $\mathfrak{M}$ 来机算它．

我们并不企图把杜令 Turing [1936-7]的详细表述重新写出，而只是重述它关于机器性状的一般概念．虽则它说出了一大堆的他的机器的应用，但它关于机器的开展却限于机算实数 $x(0 \leqslant x \leqslant 1)$的二进展式．各位数字都在 1 向无穷长的带上每隔一方格而无限地印出，中间的方格只留作暂时记录，作为继续机算时的草稿[1)]．在§ 68，§ 69 后读者可以作为一个简易的练习而证明，这样的机器是存在的当且仅当该二进展式中的第 $n$ 个数字为 $n$ 的可机算函数时．要详细地研究杜令的文章，玻斯特[1947]的附录中给了一个很有帮助的评论．我们这里的处理在某方面比较靠近于玻斯特[1936]．玻斯特[1936]考虑只用一个符号的 2 向无穷带的机算．

我们第二个主要目的是，证明可机算性与部分递归性相等价；或者如果只考虑完全有定义的函数，则与一般递归性相等价．

我们还可以看看，1 向无穷带与 1 个符号是不是已经够了．我们说，一机器 $\mathfrak{M}$1/1 地机算了 $\varphi$，如果它在下列的限制之下机算了 $\varphi$，我们说 $\varphi$ 是 1/1 可机算的，如果它被某机器 $\mathfrak{M}$ 所 1/1 机算着：(i) 机器 $\mathfrak{M}$ 只有一符号 $s_1$．此外当 $\mathfrak{M}$ 对任何 $n$ 矢 $x_1, \cdots, x_n$ 照上述那样开始后，它继续进行使得下列 (ii)—(iv) 成立．(ii) 在开始情况中在 $x_1, \cdots, x_n$ 的表示式以左的方格（即在表示 $x_1$ 的最左竖号之前的空格以左）在今后的情况中绝不被注视着．因此这计算亦可以在 1 向的无穷带(向右无穷长)之上来实施．(iii) 如果 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$有定义，则在终止情况时，$x_1, \cdots, x_n$，$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 的表示式恰巧和开始情况时 $x_1, \cdots, x_n$ 的表示式是在同一方格而开始的，而且 $x_1, \cdots, x_n$，$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 的表示式以右的各方格（依 (ii)，以左各方格亦然)都是空格．(iv) 只当 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 有定义时，机器 $\mathfrak{M}$ 才会停止．

由§ 68 及§ 69 的结果，1/1 可机算性与可机算性是等价的；因

1) 与本书的叙述不同而更近于杜令当初所述的机器的描写（但却用两端无穷长的带子)，可见于培特[1951]§ 20．但培特所考虑的只适用于机算完全有定义的函数——俄译注．

此一切 $w/s$ 可机算性都是等价的，这里 $w$ 是 1 或 2 看要求 (ii)—(iv) 与否而定[1]，而 $s$ 则是不同的机器所可能有的符号个数的上界（如果没有有穷的上界则是∞）．（就这点说，我们关于可机算性的原来的观念是 2/∞ 可机算性．）

亦可表述别种的“可机算性”，例如，可删去 (iii) (iv) 而留 (ii)（按，这亦是 1/1 可机算性——译者），或不用 (ii) 而假定机器只具有 1 向无穷带，并且如果达到一情况，该情况要求（按照机器表）它从最左方格向左移时它便停止．在带上亦可不用竖号表示一数而用二进记法或十进记法．在§§ 68 及 69 后，不难证明这各种可机算性都等价于我们所用的（参见§ 70）．

现在把我们的观念推广到下情形去：由 $l$ 个分别为 $m_1, \cdots, m_l$ 元的完全有定义的函数 $\psi_1, \cdots, \psi_l$（简写为 $\Psi$）出发而作的机算．这里意念的改变在于：在机算的过程中，如果需要的话，随时补入 $\Psi$ 函数中任一函数的任一值（参见§ 61 末）．

用以达到这目的机器，在它的主动机态 $q_1, \cdots, q_k$ 中可以有一些是能够实施一些新动作的（本质上非原子动作）．设 $q_c$ 为这种机态之一．当机态为 $q_c$ 而（对于一个依赖于 $c$ 的 $i$）$m_i$ 矢 $y_1, \cdots, y_{m_i}$ 又已被标准地注视时，则机器所实施的动作将是在这 $m_i$ 矢之右补入 $\psi_i(y_1, \cdots, y_{m_i}) + 1$ 个竖号及一空格，同时并把被注视方格以右原来存在的方格一律向右移置 $\psi_i(y_1, \cdots, y_{m_i}) + 2$ 个方格，然后取得机态 $q_d$（由 $c$ 决定），并把结果所得的 $m_i + 1$ 矢 $y_1, \cdots, y_{m_i}, \psi_i(y_1, \cdots, y_{m_i})$ 标准地注视．当机态为 $q_c$ 但 $m_i$ 矢未被标准地注视，则该机器便实施恒等动作（结果情况与原来情况同）．在机器表上，相当于每个这样的机态 $q_c$，我们只明指 $iq_d$ 便够，其它方面可由情况及刚才所给的定义及函数 $\Psi$ 而决定其动作了．

若照这方式而修整我们关于机器的观念，我们便得到三个观念：由 $\Psi$ 而作机算的机器，$\mathfrak{M}$ 由 $\Psi$ 而机算 $\varphi$，$\varphi$ 可由 $\Psi$ 机算．如果（对于固定的 $n, l, m_1, \cdots, m_l$）$\varphi$ 可由 $\Psi$ 用机器 $\mathfrak{M}$ 而计算，而

1) 按 (iii)—(iv) 的要求，并不影响于 $w$ 之为 1 与否．只要求 (ii)，便得 $w = 1$，只要求(i)便得 $s = 1$——译者注．

机器表与$\Psi$无关，我们说$\varphi$可由$\Psi$一致地机算，或说泛函$\varphi \simeq \boldsymbol{F}(\Psi)$是可机算的.（在§68及§69的定理中，如果假设了一致性，则结果亦有一致性.）

在定义$\mathfrak{M}$1/1地由$\Psi$机算$\varphi$，$\varphi$是1/1地由$\Psi$可机算时，除限制(i)—(iv)外，还须加入限制(v)：对于每个机态$q_c$，它在表上相当于$iq_d$的，则只当某些$m_i$矢$y_1, \cdots, y_{m_i}$被标准地注视而在被注视的$y_1, \cdots, y_{m_i}$的表示式右方全为空格时，才会出现这个机态.

由假定函数出发的'可机算性'，其定义容易用另一个等价的方式而表述，设$l = m_1 = 1$而假定函数为$\psi$，则机器本质上只是实施原子动作，但却附有一带其上有(潜伏)无穷多个印格以表示$\psi$的值叙列. 这些印格可以在另一带上，亦可以在同一带上但每隔一格地印上.

附注 1. 在本章内除本附注及引用本附注的段落外，我们均理解为是处理$n \geqslant 1$元的函数的. 由于当$n = 0$时，我们并没有在带上表示自然数$n$矢的方法，我们说，一机器机算了一个0元函数$\varphi$，如果它机算了1元函数$\varphi(x)$而有$\varphi(x) \simeq \varphi$的. 就0元的假定函数$\psi_i$言，只要带上表示有1矢$x$时，对应于$iq_d$的机态$q_c$的非恒等动作均须实行. 作了这些定义后，只要定理XXVIII—XXX已经就多于0元函数而证明了，它们便也对0元函数成立了.

## §68. 递归函数的可机算性

**定理 XXVIII** 每个部分递归函数$\varphi$都是1/1可机算的. 每个部分递归于$l$个完全有定义的函数$\Psi$的函数$\varphi$都是1/1地由$\Psi$可机算的.

证明将见于本节之末，它是根据§63定理XIX系的（当$l = 0$及一般递归于$\varphi$时，则基于§58定理IX). 根据模式(I)—(VI)而作的直觉计算乃由于重复一些简单的运算而得，如重抄以前已写下的数（在一个确定的位置处)，加1或减1，决定所给的数为0或

否．我们先造一些机器以实施这些运算．

我们先引入一些很便于这里使用的记号，同时并对§67所用的记号作一些修整．

带上一个给定的方格下必是两形态之一，$s_0$ 或 $s_1$，即空格与印有竖号"|"，或白与黑．在本节的例示中，可分别用0与1来表示。

在例示中，我们写一小横"—"于一方格之上表示它被注视，而不必象§67那样写机态于其上．有时我们在小横之上再注以小数字"1"或"2"以表示某个机态（同一小数字的各次出现都表示同一机态），这时我们只是提醒注意而暂时不指出到底是 $q_0,\cdots,q_k$ 中的那一个．

在描述原子动作时，我们用"$P$"（"印"（prints））表示由0变到1（即 $s_0$ 到 $s_1$），用"E"（"擦"（erases））表示由1到0（即由 $s_1$ 到 $s_0$），当 $a=b$ 而由 $s_a$ 变到 $s_b$ 时则不作任何表示．在§67中当被注视方格不变时，我们曾用"$C$"表示，今将"$C$"删而不用．我们简单地只写"0"，"1"，…，"$k$"以代机态 $q_0,\cdots,q_k$．例如依§67可写为"$s_1Cq_0$"的动作，如果开始时被注视的符号为 $s_0$，现在便写成"$P0$"，如果开始时被注视的符号为 $s_1$，现在便写成"0"．

再举一例，我们把机器 $\mathfrak{A}$ 的表（§67例1）及它所实施的运算的例子重新写下（但只写原来情况及最后情况）．

| 机器名 | 机态 | 被注视符号 | |
|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 |
| $\mathfrak{A}$ | 1 | $P0$ | $R1$ |

若机器 $\mathfrak{A}$ 由开始情况

$$\bar{1}\quad 1\quad 1\quad 0$$

出发，它便达到终止情况

$$1\quad 1\quad 1\quad \bar{1}.$$

机器 $\mathfrak{A}$ 在所注视的空格处或其右第一个空格处印记号，并停在那里．

在"定理XXVIII的证明"以前所举的各例子里，在机器的动作

过程中，绝未曾有任何一机器它要求注视在写出来的方格以左及以右的方格的，因此，那些方格的形态是无关重要的.

在“定理 XXVIII 的证明”以前所造出来的各机器，只要在机器动作过程中机器所曾注视过的方格不在开始时注视的方格及终止时注视的方格之间（两端在内），我们都叙述了在过程中它所曾注视过的最左的方格在那里. 这个情报将用以作出结论说，我们在定理的证明中所造的机器是满足§ 67 的限制(ii)的.

在本节中，我们将把连续的 $y+1$ 个印格而前后均为一空格的作为自然数 $y$ 的表示式. 两组印格之间如只有一空格，这空格既是前一数的表示式的最后一格也是后一数的表示式的最初一格. 这便使得我们可以把(2 向无穷)带上的任何印格看作是有限个自然数的表示式. 在两群相继的印格之间如果多过一个相继空格(设有 $z+1$ 个)，我们说在所表示的两数之间有一个(具 $z$ 方格的) 沟 (gap). 在印格以前及印格以后的空部分亦叫做一沟(具∞方格的). 正如§ 67 那样，带上面的 $m$ 个相继的自然数表示式，只当其间没有沟时，才表示 $m$ 矢.

只要最初的(最左的)方格是空的，则对 1 向无穷带亦可作同样的附注. 在第一个数以前可以有亦可以没有一(有穷的)沟.

现在我们考虑如何构作实施下列运算的机器 $\mathfrak{B}$. 给出在带上的一数，但不是最左的数，试把该数移左，合拢其沟，即使得它和前一数之间不再有沟(如果当初有沟的话). 在运算之前及后该数均须被标准地注视. 在动作过程的任一情况中，被注视的最左方格将是前一数的最后一个印格.

我们先举一例，表明在把运算加以机械化的计划中，一个典型的开始情况 (情况 1)，一些中间的情况，未必是相继的(情况 2—16)，以及所要求的最后情况 (情况 17). 至于其说明，以及根据计划而实施该运算的机器的表将见于后. 右面所写的 $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{A}$ 等，则是把这机器分解为一些更简单的机器，这些亦将在后给出.

| 情况 | 带 | 步骤组 |
|---|---|---|
| 1. | $1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ \bar{1}\ 0$ | $\mathfrak{B}_1$ (1—5) |
| 2. | $1\ 0\ 0\ 0\ 1\ \bar{1}\ 0\ 0$ | |
| 3. | $1\ 0\ 0\ \bar{0}\ 1\ 1\ 0\ 0$ | |
| 4. | $1\ 0\ \bar{0}\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0$ | |
| 5. | $1\ 0\ 0\ \bar{1}^1\ 1\ 1\ 0\ 0$ | $\mathfrak{B}_2$ (5—6) |
| 6. | $1\ 0\ 0\ 1\ 1\ \bar{1}\ 0\ 0$ | $\mathfrak{B}_1$ (6—10) |
| 7. | $1\ 0\ 0\ 1\ \bar{1}\ 0\ 0\ 0$ | |
| 8. | $1\ 0\ \bar{0}\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0$ | |
| 9. | $1\ \bar{0}\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0$ | |
| 10. | $1\ 0\ \bar{1}^1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0$ | $\mathfrak{B}_2$ (10—11) |
| 11. | $1\ 0\ 1\ 1\ \bar{1}\ 0\ 0\ 0$ | $\mathfrak{B}_1$ (11—15) |
| 12. | $1\ 0\ 1\ \bar{1}\ 0\ 0\ 0\ 0$ | |
| 13. | $1\ \bar{0}\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0$ | |
| 14. | $\bar{1}\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0$ | |
| 15. | $1\ \bar{1}^2\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0$ | $\mathfrak{B}_3$ (15—16) |
| 16. | $1\ 0\ \bar{1}\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0$ | $\mathfrak{A}$ (16—17) |
| 17. | $1\ 0\ 1\ 1\ \bar{1}\ 0\ 0\ 0$ | |

由情况1到情况2的步骤是擦去被注视的1，并向左移一步．然后(2—3)机器便找在所注视格的或其左的第一空格；(3—4)它印在那里，再向左移一格；(4—5)它认出(在本例子)并记录下来说它停在空格，然后向右移一格；(5—6)它走到所注视的数的标准位置．1—6合并起来便是把整个数向左移一格．6—11重复该运算．以后仍然重复开始(11—14)，但由于认出所检查的最左一格为1而非0(在情况14处)，故结果便不同了(14—17).

读者容易核验，下表所定义的机器便通过情况1—17以及中间的情况而完成了所例示的运算．因而可以相信（或经过下面的讨论后），从任何上面所描述的开始情况出发，这机算经常实施上述的运算．在表中应该写原子动作命令处而只写折线“——”的地方，是指该处所给的原子动作命令是无关重要的，因为使用我们的机器时，那里的布局是不会碰到的，即当从上面所描述的开始情

况出发时不会碰到的．但可补入“0”而把机器的定义补充完全．

| 机　器　名 | 机　　态 | 被注视符号 | |
|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 |
| $\mathfrak{B}$ | 1 | — | $EL2$ |
| | 2 | $PL3$ | $L2$ |
| | 3 | $R4$ | $R5$ |
| | 4 | $L1$ | $R4$ |
| | 5 | — | $ER6$ |
| | 6 | $P0$ | $R6$ |

要发现这个机器，我们先把它所应实施的整个运算分解为更简单的(未必是原子的)动作，然后再分解为机器所实施的原子动作．我们可把这机器想像为由几个简单机器组合而成，这些简单机器则实施在初步分析中的一个或几个相继的步骤．为了要把一机器描述为几个简单机器的组合，我们引入一些记号．

如果要继续实施两个运算，而机器 $\mathfrak{X}$ 实施第一个运算，机器 $\mathfrak{Y}$ 实施第二个运算，则合并的运算将由下列机器所实施，把 $\mathfrak{X}$ 的终止机态与$\mathfrak{Y}$的开始机态等同起来而得的．$\mathfrak{X}$ 的输出便成为 $\mathfrak{Y}$ 的输入．结果所得的机器记为“$\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$”．(于是 $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})3 = \mathfrak{X}(\mathfrak{Y}3)$.)

当 $n > 0$ 时“$\mathfrak{X}^n$”指 $\mathfrak{X}\cdots\mathfrak{X}$($n$ 个因子)；“$\mathfrak{X}^0$”则指其机器表上只载有 0 的那种机器，故 $\mathfrak{X}^0\mathfrak{Y}$ 和 $\mathfrak{Y}\mathfrak{X}^0$ 所实施的运算都和 $\mathfrak{Y}$ 所实施的相同．

我们又可希望机器 $\mathfrak{X}$ 的输出成为机器 $\mathfrak{Y}$ 的输入或为机器$\mathfrak{Z}$的输入，视当 $\mathfrak{X}$ 动作时所出现的环境而定．这时我们可推广关于杜令机器的观念而容许有两个终止状态 $0_1$ 及 $0_2$．这种两尾机器只供构造§ 67 所定义的只具一个终止机态的机器之用．若把 $\mathfrak{X}$ 的机态 $0_1$ 与 $\mathfrak{Y}$ 的开始机态相等同，而把机态 $0_2$ 与$\mathfrak{Z}$的开始机态相等同，我们便得到一机器可记为“$\mathfrak{X}\begin{cases}\mathfrak{Y}\\ \mathfrak{Z}\end{cases}$”．

今把机器 $\mathfrak{B}$ 表成几个机器的合并．首先我们定义一机器 $\mathfrak{B}_1$，它实施由 1—5 或 6—10 或 11—15 所例示的运算，即，从标准注视

一数开始，擦去所注视的方格，在它左面第一个空格处加印，注视该方格，走到机态 $0_1$ 或 $0_2$，看该方格的左旁的方格为空格或印格而定． 在运算中最左的注视方格是最后注视方格的左一方格．这机器有下列的表(参见机器 $\mathfrak{B}$ 的表中 1—3 行)．

| 机器名 | 机态 | 被注视符号 | |
|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 |
| $\mathfrak{B}_1$ | 1 | — | $EL2$ |
| | 2 | $PL3$ | $L2$ |
| | 3 | $R0_1$ | $R0_2$ |

其次，由 5—6 或 10—11 所例示的运算由下表所定义的机器所实施(参见机器 $\mathfrak{B}$ 的表中第 4 行)：

$$\mathfrak{B}_2 \qquad 1 \qquad L0 \qquad R1$$

要实施 15—16，我们有(参见机器 $\mathfrak{B}$ 处的第 5 行)：

$$\mathfrak{B}_3 \qquad 1 \qquad — \qquad ER0$$

而 16—17 所例示的运算由机器 $\mathfrak{A}$ 所实施．

机器 $\mathfrak{B}$ 的动作可用 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ 及 $\mathfrak{B}_3$ 而描述如下．首先用 $\mathfrak{B}_1$，按照其终止机态为 $0_1$ 或 $0_2$ 而用 $\mathfrak{B}_2$ 或 $\mathfrak{B}_3$． 如果用 $\mathfrak{B}_2$，则其输出回到 $\mathfrak{B}_1$．如果用 $\mathfrak{B}_3$，则其输出便到 $\mathfrak{A}$．我们用下公式表示

$$\text{(a)} \qquad \mathfrak{B} = \dot{\mathfrak{B}}_1 \begin{cases} \dot{\mathfrak{B}}_2 \\ \mathfrak{B}_3\mathfrak{A}. \end{cases}$$

这里两点表示 $\mathfrak{B}_2$ 的输出又回到 $\mathfrak{B}_1$ 的输入．这记法是由循环小数的记法暗示而得的． 如果 $\mathfrak{B}_1$ 所实施的运算每次都产生具机态 $0_1$ 的输出，则 $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$ 所实施的运算便重复以至无穷．如果 $\mathfrak{B}$ 从标准地注视最左的一数开始，结果便会这样；这时机器 $\mathfrak{B}$ 把这数逐格逐格地向左移．

公式(a)也指示了如何从 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$ 的表而作出机器 $\mathfrak{B}$ 的表．我们在 $\mathfrak{B}_1$ 的表中把其终止机态 $0_1$,$0_2$ 分别换为 $\mathfrak{B}_2$ 及 $\mathfrak{B}_3$ 的开始机态，然后适当地重新编号为 4，5 等等 (参见上面所给的 $\mathfrak{B}$ 的表)．

现在我们试造一个机器 $\mathfrak{T}_m$ (对每个固定的 $m \geqslant 1$) 使得：当

它开始标准地注视某一个自然数$m$矢$y_1, \cdots, y_m$的表示式时，而该$m$矢右面一切方格又都是(至少开首的$y_1+2$个)空的，则机器$\mathfrak{T}_m$便直继m矢之后(即没有沟)而抄写$y_1$，并标准地注视所抄写的数而终止．在动作中它所注视的最左的一格是所给的$m$矢的第一(空)格．

例如，由最初的开始情况(情况1)出发，$\mathfrak{T}_4$便会达到最后写出的那个情况(情况16)．动作的计划可由中间的情况而指出．

| 情况 | 纸带 | 机器 |
|---|---|---|
| 1. | $0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ \bar{1}\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0$ | $\mathfrak{C}$ |
| 2. | $0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ \bar{1}\ 0\ 0\ 0$ | |
| 3. | $0\ 1\ 1\ \bar{1}\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0$ | $\mathfrak{E}$　$\mathfrak{D}^4$ |
| 4. | $0\ 1\ 1\ \bar{1}^2\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0$ | $\mathfrak{F}$ |
| 5. | $0\ 1\ \bar{1}\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0$ | $\mathfrak{G}^4$ |
| 6. | $0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ \bar{1}\ 0\ 0\ 0$ | $\mathfrak{A}$ |
| 7. | $0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ \bar{1}\ 0\ 0$ | $\mathfrak{D}^4$ |
| 8. | $0\ 1\ \bar{1}\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0$ | $\mathfrak{E}$ |
| 9. | $0\ 1\ \bar{1}^2\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0$ | $\mathfrak{F}$ |
| 10. | $0\ \bar{1}\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0$ | $\mathfrak{G}^4$ |
| 11. | $0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ \bar{1}\ 0\ 0$ | $\mathfrak{A}$ |
| 12. | $0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ \bar{1}\ 0$ | |
| 13. | $0\ \bar{1}\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0$ | $\mathfrak{E}$　$\mathfrak{D}^4$ |
| 14. | $0\ \bar{1}^1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0$ | $\mathfrak{H}$ |
| 15. | $0\ 1\ 1\ \bar{1}\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0$ | $\mathfrak{G}^4$ |
| 16. | $0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ \bar{1}\ 0$ | |

根据该计划，机器$\mathfrak{C}$是：从标准注视一数出发，而该数后面有一沟的，便向右移两格，印并停在那里．

机器$\mathfrak{D}$，从标准注视一数开始，而该数不是纸带上最左的数，向左走到左旁一数的标准位置去．故机器$\mathfrak{D}^m$，如从标准注视一数开始，而该数之左至少有$m$个数，便向左跳过$m-1$个中间的数而走到左边第$m$个数的标准位置去．

机器$\mathfrak{E}$，从标准注视一数开始，判定该数是0或大于0，从而

取得机态 $0_1$ 或 $0_2$，这时该数仍被标准地注视着．在运算中被注视的最左一格是当初被注视的格的左旁一格．

机器 $\mathfrak{F}$，从注视一印格开始，擦净该格并左移一格．

机器 $\mathfrak{G}$ 向右走过一数（$\mathfrak{G}^m$ 走过 $m$ 个数）正和 $\mathfrak{D}$ 向左走过一数（$\mathfrak{D}^m$ 走过 $m$ 个数）同样．

机器 $\mathfrak{H}$，从标准注视一数开始，而该数不是纸带上最右的数，便填满该与右旁一数之间的沟（如果有的话），其法是把该数增大，沟有多少方格该数便增大多少，然后标准注视结果所得的数．

如果我们能够找到上面所描述的机器 $\mathfrak{C}$，$\mathfrak{D}$，$\mathfrak{E}$，$\mathfrak{F}$，$\mathfrak{G}$，$\mathfrak{H}$，则机器 $\mathfrak{I}_m$ 可由下公式而得：

(b)
$$\mathfrak{I}_m = \mathfrak{C}\dot{\mathfrak{D}}^m\mathfrak{E}\begin{cases}\mathfrak{H}\mathfrak{G}^m. \\ \mathfrak{F}\mathfrak{G}^m\dot{\mathfrak{A}}\end{cases}$$

只要施行 $\mathfrak{E}$ 时得出机态 $0_2$，则由 $\mathfrak{D}^m\mathfrak{E}\mathfrak{F}\mathfrak{G}^m\mathfrak{A}$ 所实施的运算便永远重复；但当得出机态 $0_1$，时动作便以 $\mathfrak{H}\mathfrak{G}^m$ 而终止．

我们给出 $\mathfrak{D}$，$\mathfrak{E}$ 及 $\mathfrak{H}$ 的表，至于 $\mathfrak{C}$，$\mathfrak{F}$，$\mathfrak{G}$ 的表则留给读者自作．

| 机　器　名 | 机　　态 | 被注视符号 | |
|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 |
| $\mathfrak{D}$ | 1 | L2 | L1 |
| | 2 | L2 | 0 |
| $\mathfrak{E}$ | 1 | — | L2 |
| | 2 | $R0_1$ | $R0_2$ |
| $\mathfrak{H}$ | 1 | — | R2 |
| | 2 | PR2 | L3 |
| | 3 | — | EL0 |

若多次应用 $\mathfrak{I}_m$，且适当地选择 $m$，我们可以把最右边的彼此之间无沟的各数作任意的排列（容许重复）后再设有沟地重写一次．例如从下列开始情况出发

$$0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ \bar{1}\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0,$$

机器 $\mathfrak{I}_4^4 (= (\mathfrak{I}_4)^4)$ 便达到下列的终止情况

$$0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ \bar{1}\ 0\ 0,$$

这时整个 4 矢被重抄了；而机器 $\mathfrak{J}_4\mathfrak{J}_2$ 达到

0 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0 1 $\bar{1}$ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

这时只有第一数及第四数被重抄了．

由下式所定义的机器 $\mathfrak{K}_m$

(c) $$\mathfrak{K}_m = \mathfrak{A}\mathfrak{J}_m^m\mathfrak{F}\mathfrak{D}^m\mathfrak{F}\mathfrak{G}^m$$

若从标准地注视 $m$ 矢 $y_1, \cdots, y_m$ 出发，而其右边全是（至少开首 $y_1 + \cdots + y_m + 2m + 1$ 个方格处）空格，它便隔开一个（1格的）沟把这 $m$ 矢重抄，并标准地注视所抄的数而停止．在动作中被注视的最左一方格是所给的 $m$ 矢的第一（空）格．例如由上述的开始情况出发，$\mathfrak{K}_4$ 便达到下列的终止情况

0 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1 0 1 1 0 0 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1 0 1 $\bar{1}$ 0.

现在我们想造一个机器 $\mathfrak{L}$ 使得，若从标准注视一数开始，便把该数以左所有各数（如果有的话）都擦去，直到碰到一沟时为止，这时它便回到原来所注视的数的标准位置．在运算中被注视的最左一格是构成沟的那组空格中末前一格．例如由情况

0 0 1 1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 0 1 0 1 1 $\bar{1}$ 0

出发，机器 $\mathfrak{L}$ 便达到下列的终止情况

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 $\bar{1}$ 0.

机器 $\mathfrak{L}$ 的构作让诸读者．

**定理 XXVIII 的证明，$l = 0$ 时．** 根据§63 定理 XIX 系而作归纳证明．共分六种情形，看当定义 $\varphi$ 时在模式 (I)—(VI) 中那一个模式最后被使用而定．对每种情形，我们都要指出如何作出一机器 $\mathfrak{M}_\varphi$，它 1/1 地机算 $\varphi$．

由所给的 $n$ 矢 $x_1, \cdots, x_n$ 而机算 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$，其开始情况可描述为

1. $$, x_1, \cdots, \bar{x}_n, .$$

这里每个“$x_i$”都是相继的 $x_i + 1$ 个印格，逗号则是空格，它亦是组成 $n$ 矢的表示式的一部分，而小横则用以指出 $x_n$ 的表示式被标准地注视着．根据可机算性的定义（§ 67），其左及其右的一切方格都是空格．如果 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 是有定义的，则机器 $\mathfrak{M}_\varphi$ 所应达到

的终止情况可描述为

$$,x_1,\cdots,x_n,\overline{\varphi(x_1,\cdots,x_n)},.$$

这里的第一个逗号和开始情况（情况 1)中的第一个逗号是纸带上的同一个方格. 同样，这里所没有写出的方格亦都是空格（由于§ 67(iii)). 由情况 1 出发后，只当 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 有定义，$\mathfrak{M}_\varphi$ 才停止（由于(iv)). 由情况 1 起，$\mathfrak{M}_\varphi$ 可以向右走到任意远，但绝不能注视这里第一个逗号所表示的方格以左的方格（由于 (ii)).

情形 (I)（模式(I)）: $\varphi(x)=x'$. 令 $\mathfrak{M}_\varphi=\mathfrak{J}_1\mathfrak{A}$.

情形 (II): $\varphi(x_1,\cdots,x_n)=q$. 令 $\mathfrak{M}_\varphi=\mathfrak{C}\mathfrak{A}^q$.

情形 (III): $\varphi(x_1,\cdots,x_n)=x_i$. 令 $\mathfrak{M}_\varphi=\mathfrak{J}_{n-i+1}$.

情形 (IV): $\varphi(x_1,\cdots,x_n)\simeq\psi(\chi_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,$
$\chi_m(x_1,\cdots,x_n))$.

根据归纳假设，有机器 $\mathfrak{M}_{\chi_1},\cdots,\mathfrak{M}_{\chi_m},\mathfrak{M}_\psi$ 分别 1/1 地机算 $\chi_1,\cdots,\chi_m,\psi$. 今 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$的机算可计划如下. 由情况 1 出发，我们隔开( 1 格的)沟(下面用两逗号表示)而重抄 $n$ 矢 $x_1,\cdots,x_n$ 得:

2. $$,x_1,\cdots,x_n,\ ,x_1,\cdots,x_n,.$$

这个沟标志着暂时记录的起点，以后要擦去的. 这个重抄过程可由机器 $\mathfrak{K}_m$ 而实施. 如果 $\chi_1(x_1,\cdots,x_n)$ 有定义的话，则从情况 $,x_1,\cdots,\overline{x}_n,$出发，机器 $\mathfrak{M}_{\chi_1}$ 便达到情况

$$,x_1,\cdots,x_n,\overline{\chi_1(x_1,\cdots,x_n)},.$$

在实施这个运算中，在任何一个中间情况，$\mathfrak{M}_{\chi_1}$ 从未注视过 $,x_1,\cdots,\overline{x}_n,$ 的第一方格以左的方格. 因此，如果从情况 2 出发，则在左边多一些印格 $,x_1,\cdots,x_n,$ 绝不影响其动作. 故由情况 2 出发，只要 $\chi_1(x_1,\cdots,x_n)$ 有定义，$\mathfrak{M}_{\chi_1}$ 便将达到下情况

3. $$,x_1,\cdots,x_n,x_1,\cdots,x_n,\overline{\chi_1(x_1,\cdots,x_n)},.$$

其次，我们用 $\mathfrak{J}^n_{n+1}$ 重抄 $x_1,\cdots,x_n$，不隔开一沟，便得:

4. $$,x_1,\cdots,x_n,\ ,x_1,\cdots,x_n,\chi_1(x_1,\cdots,x_n),x_1,\cdots,x_n,.$$

再应用 $\mathfrak{M}_{\chi_2}$，如果 $\chi_2(x_1,\cdots,x_n)$ 有定义便得:

5. $$,x_1,\cdots,x_n,\ ,x_1,\cdots,x_n,\chi_1(x_1,\cdots,x_n),x_1,\cdots,x_n,\chi_2(x_1,\cdots,x_n),.$$

继续应用这办法，只要所出现的函数值均有定义，我们便得到下式：

6. $\,,x_1,\cdots,x_n,\ ,x_1,\cdots,x_n,\chi_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,x_1,\cdots,x_n,$
$\overline{\chi_m(x_1,\cdots,x_n),\chi_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,\chi_m(x_1,\cdots,x_n),}$
$\overline{\psi(\chi_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,\chi_m(x_1,\cdots,x_n)),}$

用机器 $\mathfrak{L}$ 可以把在被注视数 $\psi(\chi_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,\chi_m(x_1,\cdots,x_n))$ （本身不在内）与沟（用双逗号表示）之间的数擦去，以后可用机器 $\mathfrak{B}$ 以合拢其沟，便得

7. $\,,x_1,\cdots,x_n,\overline{,\psi(\chi_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,\chi_m(x_1,\cdots,x_n)),}$

即 $\,,x_1,\cdots,x_n,\overline{,\varphi(x_1,\cdots,x_n),}$

当 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 有定义时，整个运算便被由下式所定义的机器 $\mathfrak{M}_\varphi$ 所实施：

$$\mathfrak{M}_\varphi=\mathfrak{R}_n\mathfrak{M}_{\chi_1}\mathfrak{J}^n_{n+1}\mathfrak{M}_{\chi_2}\cdots\mathfrak{J}^n_{n+1}\mathfrak{M}_{\chi_m}\mathfrak{J}_{(m-1)(n+1)+1}\mathfrak{J}_{(m-2)(n+1)+2}\cdots$$
$$\mathfrak{J}_{1\cdot(n+1)+(m-1)}\mathfrak{J}_{0\cdot(n+1)+m}\mathfrak{M}_\psi\mathfrak{L}\mathfrak{B}.$$

反之，由 $\mathfrak{M}_{\chi_1},\cdots,\mathfrak{M}_{\chi_m}$ 及 $\mathfrak{M}_\psi$ 的性质(iv)，可知只当 $\chi_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,\chi_m(x_1,\cdots,x_n),\psi(\chi_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,\chi_m(x_1,\cdots,x_n))$ 全有定义即只当 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 有定义时，$\mathfrak{M}_\varphi$ 才停止。

情形（V）：$n>1$ 时（模式（Vb）），$\varphi(0,x_2,\cdots,x_n)\simeq\psi(x_2,\cdots,x_n)$，$\varphi(y',x_2,\cdots,x_n)\simeq\chi(y,\varphi(y,x_2,\cdots,x_n),x_2,\cdots,x_n)$。根据归纳假设，有机器 $\mathfrak{M}_\psi$ 及 $\mathfrak{M}_\chi$ 分别 1/1 地机算 $\psi$ 及 $\chi$。如果所求的函数值有定义，我们可作出一系列的运算来得出下列的情况（相应于情形(IV)的情况 6）。凡遇到需要选择时，我们列出应该施用上面情况时的条件，否则便施用下面的情况了；因此对于一个给定的 $y$ 言，前面 $y$ 个选择是选用下面的情况，第 $y+1$ 个选择便选用上面的了。

$\,,y,x_2,\cdots,x_n,\ ,y,x_2,\cdots,x_n,\psi(x_2,\cdots,x_n),$

$y,\begin{cases}\overline{\psi(x_2,\cdots,x_n),} & \text{当 } y=0 \text{ 时.}\\ 0,\psi(x_2,\cdots,x_n),x_2,\cdots,x_n,\chi(0,\psi(x_2,\cdots,x_n),x_2,\cdots,x_n),\end{cases}$

$y-1,\begin{cases}\overline{\chi(0,\psi(x_2,\cdots,x_n),x_2,\cdots,x_n),} & \text{当 } y-1=0 \text{ 时.}\\ 1,\chi(0,\psi(x_2,\cdots,x_n),x_2,\cdots,x_n),x_2,\cdots,x_n,\end{cases}$

$$\chi(1, \chi(0, \psi(x_2, \cdots, x_n), x_2, \cdots, x_n), x_2, \cdots, x_n),$$

$$y - 2, \begin{cases} \chi(1, \chi(0, \psi(x_2, \cdots, x_n), x_2, \cdots, x_n), x_2, \cdots, x_n), \\ \qquad \text{当 } y - 2 = 0 \text{ 时.} \\ 2, \cdots. \end{cases}$$

然后把最后一数与沟之间各数全擦去，并合拢其沟. 整个运算便被由下法而定义的机器 $\mathfrak{M}_\varphi$ 所实施:

$$\mathfrak{M}_\varphi = \mathfrak{R}_n \mathfrak{M}_\psi \mathfrak{I}_{n+1} \mathfrak{C} \begin{cases} \mathfrak{I}_2 \mathfrak{L} \mathfrak{B}. \\ \mathfrak{C} \dot{\mathfrak{I}}_2 \mathfrak{I}_{n+3}^{n-1} \mathfrak{M}_\chi \mathfrak{I}_{n+3} \mathfrak{F} \mathfrak{C} \begin{cases} \mathfrak{I}_2 \mathfrak{L} \mathfrak{B} \\ \mathfrak{I}_{n+3} \dot{\mathfrak{A}} \end{cases} \end{cases}$$

略作更改便可处理 $n = 1$ 的情形(模式(Va)).

情形 (VI): $\varphi(x_1, \cdots, x_n) \simeq \mu y [\chi(x_1, \cdots, x_n, y) = 0]$ ($n \geq 1$ 时;参见§ 67 末附注1). 仿情形(V)处理(但更简些).

**定理 XXVIII 的证明,** $l > 0$ **时.** 我们现在有一新情形，即 $\varphi$ 可为假定函数 $\Psi$ 之一，设为 $\psi_i$. 这时 $\varphi$ 可由机器 $\mathfrak{M}_\varphi$ 而 1/1 地机算; $\mathfrak{M}_\varphi$ 具有唯一的主动机态 $q_1$，其表值是 $iq_0$ 的.

## § 69. 可机算函数的递归性

在本节中,我们用§ 67 中的记号而不用§ 68 中的.

**定理 XXIX** 每个可机算的部分函数 $\varphi$ 都是部分递归的. 每个可由 $l$ 个完全有定义的函数 $\Psi$ 而机算的部分函数 $\varphi$ 都是部分递归于 $\Psi$ 的.

**证明** ($l = 0$ 时) 一个给定机器 $\mathfrak{M}$ 的纸带的及机器的情况可用一个形式表达式而表示（的确，为了另一个目的，我们将在§ 71 中做此,那里的表达式叫做"坡斯特字"). 本定理可以看作是§ 62 (D2)的一个运用(推广到部分函数后;又这里 $E_{x,j+1}$ 只依赖于 $E_{x,j}$).

但如果要详细作出证明则下面的证明比较起来要略为直接一些. 我们直接地对纸带的及机器的情况而给以哥德尔数；我们不对推演或证明来给哥德尔数(像§ 58 定理 IX 及§ 62(D1)那样),而

只是把一机器从一给定的情况出发，依次达到的各情况简单地叫做第0个，第一个，…，第 $z$ 个，…情况，如果我们把"部分函数"改为"函数"，把"部分递归"改为"一般递归"，我们便无须使用第十二章．若用§66定理XXVI，这些证明还可略微短些．

在对情况而作哥德尔编号时，我们把纸带上的形态就被注视的方格而描述，不就一固定的方格而描述．这对我们的目的言是足够的，因为在可机算性的定义中，并没有用到纸带上的绝对位置．（就 $1/s$ 可机算性而论，绝对位置，至少就 $x_1, \cdots, x_n$ 的表示式中第一方格而言的位置，却是有关系的，由于(ii)及(iii)之故．）

我们先对纸带上任一特殊方格以左的纸带形态给以哥德尔数．设该格以左的方格形态依次为 $s_{u_0}, s_{u_1}, s_{u_2}, \cdots$．因为只有有限个方格被印着，故除有限个以外各 $u_i$ 全是0．在该方格以左的纸带形态的哥德尔数 $u$ 将为

$$\prod_i p_i^{u_i} \text{ 即 } \prod_{i<t} p_i^{u_i},$$

这里 $t$ 是任何数只须大于使 $u_i \neq 0$ 的每个 $i$ 便成．以后（按找出 $u$ 以后——译者）$u$ 本身便是这个数，故

$$u = \prod_{i<u} p_i^{u_i} = \prod_{i<u} p_i^{(u)_i}.$$

对一给定方格右边的纸带形态亦可同法指派其哥德尔数．

在一给定情况中，如果在注视以左的纸带形态的哥德尔数为 $u$，被注视符号为 $s_a$，机态为 $q_c$，而注视格以右的纸带形态的哥德尔数为 $v$，则该情况的哥德尔数将为 $2^u \cdot 3^a \cdot 5^c \cdot 7^v$．

**例 1** 如果未写出的方格全是空格，则下情况

| | | | $q_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | $s_1$ | $s_3$ | $s_1$ | $s_0$ | $s_1$ |

的哥德尔数为 $2^{5^1 \cdot 3^1 \cdot 2^3} \cdot 3^1 \cdot 5^4 \cdot 7^{2^0 \cdot 3^1}$.

如果一情况的哥德尔数为 $2^u \cdot 3^a \cdot 5^c \cdot 7^v$，则布局为 $(s_a, q_c)$．如果 $c > 0$ 而机器根据这布局所实施的动作呈 $s_b L q_d$ 形，则结果

情况的哥德尔数 $\rho_{a,c}(u, v)$ 为

$$\left[2\exp\prod_{i<u}p_i^{(u)_{i'}}\right]\cdot 3^{(u)_0}\cdot 5^d\cdot\left[7\exp\left\{2^b\cdot\prod_{i<v}p_{i'}^{(v)_i}\right\}\right];$$

如动作呈 $s_bRq_d$ 形仿此。 如动作为 $s_bCq_d$，则 $\rho_{a,c}(u, v)$ 为 $2^u\cdot 3^b\cdot 5^d\cdot 7^v$。每个函数 $\rho_{a,c}$ 都是原始递归的。

下式所定义的 $\rho$ 是原始递归的(§ 45#F)并具下性质，如果 $w$ 是一主动(被动)情况的哥德尔数，则 $\rho(w)$ 是下一次(同一次)情况的哥德尔数：

$$\rho(w) =$$

$$\begin{cases}\rho_{a,c}((w)_0,(w)_3) \text{ 当 } (w)_1 = a\&(w)_2 = c \begin{pmatrix}a = 0,\cdots j,\\ c = 1,\cdots k\end{pmatrix}\text{时。}\\ w \quad \text{此外情形时。}\end{cases}$$

由此再定义一原始递归 $\theta$：

$$\begin{cases}\theta(w, 0) = w,\\ \theta(w, z') = \rho(\theta(w, z)).\end{cases}$$

如果 $w$ 为一情况的哥德尔数，而在该情况后该机器至少实施 $z$ 次动作，则 $\theta(w, z)$ 是经过 $z$ 次动作后所得情况的哥德尔数；如果在该情况后实施的动作少过 $z$ 次，则便是由该情况起而达到的终止情况的哥德尔数。

其次，对每个 $n\geqslant 1$ (参见§ 67 末附注 1)，我们定义一个具下性质的原始递归函数 $\tau_n$。 如果 $n$ 矢 $x_1,\cdots, x_n$ 被标准注视，机态为 $q_c$，$x_1,\cdots, x_n$ 以左的纸带形态的哥德尔数为 $u$，其右的纸带形态的哥德尔数为 $v$，则 $\tau_n(x_1,\cdots, x_n, c, u, v)$ 便是该情况的哥德尔数。首先我们把 $\tau_1$ 定义为：

$$\tau_1(x_1, c, u, v) = \left[2\exp\left\{\left(\prod_{i<x_1}p_i^1\right)\cdot p_{x_1}^0\cdot\prod_{i<u}p_{x_1'+i}^{(u)_i}\right\}\right]$$

$$\cdot 3^1\cdot 5^c\cdot\left[7\exp\left\{2^0\cdot\prod_{i<v}p_{i'}^{(v)_i}\right\}\right].$$

然后当 $n = 1, 2, 3,\cdots$时：

$$\tau_{n+1}(x_1,\cdots, x_n, x_{n+1}, c, u, v) = \tau_1(x_{n+1}, c, (\tau_n(x_1,\cdots,$$

$x_{n-1}, x'_n, c, u, v))_0, v)$.

当 $x_1, \cdots, x_n$ 被标准地注视，机态为 $q_1$，而纸带上别处全是空格时，该情况的哥德尔数为 $\tau_n(x_1, \cdots, x_n, 1, 1, 1)$. 当 $x_1, \cdots, x_n, x$ 被标准注视而机态为 $q_0$ 时，则有 $u$ 和 $v$ 使得该情况的哥德尔数为 $\tau_{n+1}(x_1, \cdots, x_n, x, 0, u, v)$; 逆理亦真.

今设 $\varphi$ 为 $n$ 元部分函数，可由给定的机器 $\mathfrak{M}$ 而机算，$x_1, \cdots, x_n$ 为给定的 $n$ 矢，则 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 之有定义当且仅当有一个自然数 4 矢 $(z, x, u, v)$ 使得

$$\theta(\tau_n(x_1, \cdots, x_n, 1, 1, 1), z) = \tau_{n+1}(x_1, \cdots, x_n, x, 0, u, v),$$

这时 $x$ 便是 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 的值. 故得

$$\varphi(x_1, \cdots, x_n) \simeq (\mu t[\theta(\tau_n(x_1, \cdots, x_n, 1, 1, 1), (t)_0) = \tau_{n+1}(x_1, \cdots, x_n, (t)_1, 0, (t)_2, (t)_3)])_1.$$

故由§ 63 定理 XVII, $\varphi$ 是部分递归的(如果 $\varphi$ 是完全有定义的，则由§ 57 定理 III, $\varphi$ 是一般递归的).

**证明**（$l > 0$ 时） 例如，设有一个一元假定函数 $\psi$ （即 $l = m_1 = 1$）. 对每个 $c$，只要表中 $q_c$ 所相应的值呈 $1q_d$ 形，我们便把 $\rho(w)$ 定义中"$\rho_{a,c}((w)_0, (w)_3)$，当 $(w)_1 = a \& (w)_2 = c (a = 0, \cdots, j)$ 时"那一句改为"$\rho_c(w)$，当 $Q_c(w)$ 时"，这里 $Q_c$ 是一个原始递归谓词，$\rho_c$ 为原始递归于$\psi$的函数，其定义如下：

$$Q_c(w) \equiv (Ey)_{y<w}(Eu)_{u<w}(Ev)_{v<w}[w = \tau_1(y, c, u, v)]$$

$\rho_c(w) = \tau_2(Y, \psi(Y), d, U, V)$，这里

$$Y = \mu y_{y<w}(Eu)_{u<w}(Ev)_{v<w}[w = \tau_1(y, c, u, v)],$$

$$U = \mu u_{u<w}(Ey)_{y<w}(Ev)_{v<w}[w = \tau_1(y, c, u, v)],$$

等等.

**定理 XXX**( = 定理 XXVIII + XXIX) 下列的部分函数集是一样的，即是具有同样元素的：(a)部分递归函数集，(b)可机算函数集，(c)1/1 可机算函数集. 具有 $l$ 个完全有定义的假定函数 $\Psi$ 时仿此.

## §70. 杜令论点

杜令论点是：每个很自然地被认为可计算[1]的函数都是在他的意义之下可被他的机器所计算的可计算函数．由定理 XXX，这论点等价于邱吉论点．现在我们就它的明证中，有关于机器部分的，即§ 62 中(c)项的明证加以检查．我们所要做的是证明，一个计算员所能做的任何动作都可以分解为一连串的某些杜令机器的原子动作．

"计算员在任何时刻的行为都由他所能看见的记号以及该时他的'内心状态'所决定"．他所能认出的记号是有限多个的．"如果我们容许无穷多个符号，那末便将有两符号其差异是任意地小"．(杜令[1936—7]，第 249 页—250 页．)由问题的叙述而引到答案的工作必须在某个"符号空间"(坡斯特[1936])内进行，即必须在有系统地排列着的、可以写上符号(的出现)的箱子或小盒子之上而进行．在每一瞬间他所能观察到的符号出现（或符号出现所在的箱子）个数必有一个有限的上界．他可以改变他的内心状态以记忆他预先观察到的符号．但是"须要考虑到的内心状态的个数必须是有限的，…如果我们容许无穷多个内心状态，它们将有些是'任意接近'的因而便会混乱了"(杜令[1936—7]，第 250 页)．计算员的动作必须由一个具体客体，即表示作为变目的某自然数(或自然数 $n$ 矢)的那个符号列，而达到另外一个具体的容体，即表示函数值的符号列．因为我们所讨论的是依照预先指定的方法而作的计算，在计算员实施过程中又不容许数学的发明，所以可能的内心状态必须在给出特殊的变目以前预先固定．计算员所实施的每一动作必须对下列三者作各别的改变：由符号空间内各符号的出现所组成的有限系统，符号空间内被观察的方格的分布，以及他自己的内心状态．

1) 原文亦为"computable"，但其意显指各种计算 — 译者注．

一计算员如果只依照预先指定的规则就一个给定的变目以计算数论函数的值，则其行为必须受到上列限制，这些限制和构造杜令机器时所作的限制是同一种类的．就机器言，符号空间便是纸带，而机态便相应于计算员的内心状态．

计算员的行为比之机器的行为，可受到较少的限制如下．(a)他可以在同一时间内观察到不止一个符号．(b)他比之机器能够实施更复杂的原子动作．(c)他的符号空间不必是一维的纸带．(d)在表示变目及函数值时他可以选用别的符号不必是上面可机算性定义中所用的那种．

我们试检查(a)—(d)各种可能性，并简单地看出如何可以化归到杜令机器中的等价的东西．我们的叙述只是逐一地化归，但我们的方法即使相继地作出合并化归亦是可用的．

对(a)言，我们看见，例如，17，21 及 100 等是可以在一个举动之内便观察得了的．但是一个很长的符号叙列只能用连续的动作而观察．例如我们不能一眼便说出：157767733443477 与 157767733443477 是否相同；"我们需要把这两数逐位数字地比较，可能还须用铅笔在各数字下面记以小点以保证不致于计算重复"．(杜令[1936—7]，第 251 页．)

如果 17，21 及 100 不但当作一个单体而观察，并且处理时亦当作只占符号空间由一个箱子的地位的，那末要把复合观察化归为杜令机器所用的简单观察，我们只须对符号重新定义，把这些都当作唯一的一个符号便成了．

在实际计算时，我们有时用一些标志(撇号，钩号，活动指针等等)，它们可和通常符号放在同一方格内．如果有 $j$ 个通常符号，$n$ 个这种特殊标志，它们都可放在同一方格内，则方格形态的个数不过由 $j+1$ 增加到 $(j+1)\cdot 2^n$ 罢了．

作为复合观察的另一例子，假设印了下列的符号序列

$$\cdots 4401385789264\cdots,$$

而观察员的注意力是集中在靠近中央的数字 7，并且他最多只能看清楚在这个 7 两旁的共 5 个数字；那末这 5 个数字 85789 以及

他当时的内心状态便决定他的动作. 更远的数字亦可朦胧地看到,但并不影响他的动作. 设其动作是杜令机器(每个方格内只有一符号,而不是五个符号同在一方格内的那种机器)所实施的那一种动作. 例如,如果下一动作是 $0Lq_d$,则所印的字变成

$$\cdots 4401385089264 \cdots,$$

而注视着 38508. 这时他的行为可以化归为杜令机器的行为. 假设机器的符号便是十个阿拉伯数字. 上述行为可以作为一个广义杜令机器的行为, 在该机器中, (决定动作的)布局是$(e, f, a, g, h, q_c)$,这里 $e, f, a, g, h$ 是以注视方格为中心的两旁五个方格中的数字. 但对广义杜令机器的每一机态 $q_c$,我们都可使对应于 $10^4$ 个新的机态 $q_{cefgh}(e, f, g, h = 0, \cdots, 9)$; 我们并把机器表也作下列的修整: 当达到机态 $q_c$ 时, 须实施一系列的杜令机器动作用以看出两旁的两个邻格,当看出它们被数字 $e, f, g, h$ 占据后, 便达到机态 $q_{cefgh}$. 我们不但加入机态 $q_{cefgh}$, 而且由 $q_c$ 到 $q_{cefgh}$ 的动作之间所取的机态亦须加入. 详细情形读者可自为之. 然后广义机器根据布局$(e, f, a, g, h, q_c)$所作的动作便由本机器根据布局$(a, q_{cefgh})$而作之. 这个化归是下述附注的一例,即可以在观察时改变内心状态从而记忆有限多个预先观察到的符号.

还可设想别的方格的印号亦可以作为观察的一部分, 例如具有明白指出的标志的方格中的(有限个). 如果这些方格这样地分布于符号空间中使得计算员可根据杜令机器所实施的动而找出它,然后再回来(参见下列 (c) 项讨论),则这种符号观察亦可用同法化归.

对 (b) 项言,计算员除却改变所注视的方格外,还能改变其它的方格. 这个新观察到的方格不必与原有的相邻接. 但如果它可作为计算员的一个单独动作的话,这动作必不能过于复杂,其复杂程度必须有一上界. 更复杂的动作必须一再地参考到被观察的资料以及在所给情况与结果情况之间的各情况的内心状态才成 (才有新动力). (的确, 我们可以说, 杜令机器的动作已经是复合的了; 心理上说,它含有印录及更改内心状态,跟以一移动及另一次

更改内心状态，因此坡斯特[1947]便把杜令动作分而为二；我们这里所以没有这样分，为的是使机器表不致太长.)

在情况方面所作的不属于杜令机器形式的简单更改，可以立刻想到的，例如不在移动之前而在移动之后印字，等等，都容易表成一系列的杜令机器原子动作的继续.（更复杂的运算，很难看作是唯一的一个动作的，已经这样分析了，见§68.）

对(c)项言，通常都是在2维空间的纸上而作计算的，纸张具有2维空间的这个特征就在初等算术处已经利用了. 理论上说，我们还须考虑别种符号空间的可能. 符号空间的结构必须足够有规则以免在计算过程中计算员也会迷乱了.

由一个方格（或该空间的一盒子）移动到同一的或相邻的盒子，将有有限种设$m+1$种方式，叫做$M_0,\cdots,M_m$，而$M_0$为恒等移动，例如在作好方格的平面上，$m=4$（不动及上下左右移动），如果还容许对角运动则$m=8$.在每个给定情况下，计算员的动作既然必须由有限多个布局中当时出现的那一个而决定的，所以他不能使用更多的移动法. 我们可以不丧失普遍性而假定对每个盒子都有同数的移动方向，如果对有些盒子言，其移动方向较少，则对其余移动可规定其所达到的终点就是本盒子，即这些移动与$M_0$一样定义为恒等移动.

因此，能够达到的盒子个数必是可数的. 同一盒子可由不同的移动方式而达到，例如在平面上，先下后右和先右后下是一样的.

我们假定对所有盒子作一个不许重复的枚举. 对每一个移动法$M_i(i=0,\cdots,m)$，都有一个可机算函数$\mu_i$，使得如果$x$为一个给定的盒子在枚举中的标码，那末$\mu_i(x)$便是经移动$M_i$后所达到的盒子的标码. 这假设在任何容易想像的符号空间中都是可实现的.

使用这个枚举法可把在枚举中编号为$x$的盒子($x=0,1,2,\cdots$)对应于线形带上从某一方格（叫做第0格）向右计数的第$x$格.

使用§68的方法我们可作出一机器使得，当把第0格(或第1格）上记下一个特别标志时，该机器可以从第$x$格出发而找出第$\mu_i(x)$格．为这个目的而机算时，可以对方格改印撇号以后再擦去，以免妨碍已有的印号．这样便使得我们可以把在所给的符号空间内的机算化归为在杜令机器的线形带上的机算．

在这个化归中，我们并不假定，必有一移动使从邻接的盒子而回到原来的盒子；即并不假定在这空间内每一运动都有一逆运动．这在任何一个通常的空间内都是有的．唯一的例外是，当计算员用耳朵在一时间间隔之内接收一信号时．

符号空间可以是几个不相连结的子空间，每个都有它的被注视的盒子，例如，当计算员同时用眼观察一张纸上的符号、用手摸一凸版纸带又用耳朵收听信号时．如果有$r$个这样的子空间，我们可以从每个空间内选出一盒子来作成$r$矢作为新盒子．

对(d)项言，我们说，就原来意义而论（§6），只当有$y+1$个客体例如$y+1$个竖号给出时，才算是把自然数$y$给出了；因此就一变目而计算一函数$\varphi$时，如果两者都是用别的记法表示的，那就必须计算员能够把关于数$y$的记号与$y+1$个竖号彼此互化时，才算解决了$\varphi$的计算问题．

根据我们的其它论证，可以作出两个杜令机器来把关于$y$的其它记号与$y+1$个竖号互化．

其详细情形和在一个记法系统内所作的计算定义一样．例如，对十进法言，第一个机器由下述的第一个情况出发可以达到第二情况．

| | $x$ | $q_1$ | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | | | $q_0$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |

就熟知的记法系统言，例如二进法或十进法，这一对机器的存在性是可以证明的．

我们是就数论函数而辩解杜令论点．但杜令机器亦可以适用到任何具有有限个符号的语言[1]中的表达式去．仿刚才的把一自然数记号与另一种记号互化那样，我们便得到一个直接方法来刻划在这样语言中关于表达式的‘能行’运算，用以代替下列的刻划：在一个特殊的能行的哥德尔编号下，要求相应的数论函数是一般递归的或可机算的（§ 61）．这方法还可推广到具可数无穷多个符号的系统中去，只要这些符号本身可以能行地当作由有限多个符号组成的便成；例如，对形式数论的符号体系言，可以把变元 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}\cdots$等考虑为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_{11}, \cdots$(§16, §50).

## *§ 71. 半群的字的问题

根据邱吉论点，有些判定问题是不可解决的，邱吉原来所举的例子是根据 $\lambda$ 可定义性而作的（[1936]）．上面所给的相应的例子（§ 60 定理 XII），则是根据一般递归性而作的（根据克林［1936，1943］）．杜令[1936—37]给出一些例子，是根据可机算性而作的，这可如下给出．一机器 $\mathfrak{M}$ 是由它的含有 $(j+1)k$ 个表格的机器表而决定的．我们可对这表因而对机器给以哥德尔编号．那末下面所定义的函数 $\xi$ 便是不可机算的：$\xi(x)=0$ 当 $x$ 为一机器 $\mathfrak{M}_x$ 的哥德尔数而 $\mathfrak{M}_x$ 所机算的一元部分函数 $\varphi_x$ 在变目 $x$ 处取得值 1，对此外情形则 $\xi(x)=1$．因此，依照杜令论点（或者，由于一般递归性与可机算性是等价的，由于邱吉论点）不可能有一算法来判定，任给一数 $x$，它是否具下列性质的机器的哥德尔数：当从标准注视 $x$ 出发，纸带上其它地方全是空的，它将达到标准注视 $x$, 1 而终止．作为另一例子，没有一个算法能够判定：任给一机器，当

---

1) “语言”（language）这用语理解为比之文字语言（linguistic）更广的意义，特别地，包括有各种形式体系（参见§ 15）．但通常的语言如俄语英语等亦包括于其内，因此，既然这些语言中表示意义的工具受制于明确表述的文法规则，杜令机器便可用以作出由一语言到另一语言的翻译．类似的原则便是用现存快速计算机以从一语言到另一语言作自动翻译这种现实经验的根据，该计算机的很多基本特点都反映于杜令机器的定义中——俄译注．

从任何给定情况出发时会不会停止．因为，如果有这个算法，则给定任一数 $x$ 后，我们可以先决定 $x$ 是否一机器 $\mathfrak{M}_x$ 的哥德尔数，如果是，则 $\mathfrak{M}_x$ 从标准注视 $x$ 而出发后，是否会停止，如果会，则其最后情况是否标准注视 $x$, 1.

这些判定问题的例子都是证明其为不可解决的，它们又都是直接由于一些数学观念（$\lambda$ 可定义性，一般递归性，可机算性）而引起的，这些观念又是和能行性相等价的（由于邱吉-杜令论点）．

第二类的例子，略为离远一步的，是关于一些形式系统的判定问题，例如§ 61 定理 33（又见§ 76，邱吉［1936］，363 页）．

坡斯特［1947］及马尔科夫［1947］证明其为不可解决的那个判定问题却特有其兴趣，因为（这是第一个例子）所处理的问题是现存的问题，与逻辑或基础领域无关的．

坡斯特与马尔科夫所证明不能解决的问题是吐氏（Thue）［1914］所提出的．假设已给出有限个不同的符号 $a_1, \cdots, a_m$ $(m \geqslant 1)$；设称之为字母，而这表称为字母表．由 0 个或多个符号（的出现）所组成的有穷序列叫做字（由这些字母所组成的）；根据第四章的用语（§ 16），如果把 $a_1, \cdots, a_m$ 当作形式符号，则一字简单地就是一个形式表达式，不过现在我们兼容许空表达式．如果字 D 是 UCV 形，而 U, V 为字（可能空的），则说字 C 为字 D 的部分．

今再假设给定有限对字 $(A_1, B_1), \cdots, (A_n, B_n)$ $(n \geqslant 1)$；这表叫做字典．我们说，（根据字典）字 R 与 S 直接等价，如果有两字 U，V 及一对 $(A_i, B_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 使得 R 与 S 分别是 $UA_iV$ 及 $UB_iV$ 形或分别是 $UB_iV$ 及 $UA_iV$ 形；换句话说，如果把在字典中彼此对应的部分 $A_i$, $B_i$ 更换后可使 R 与 S 彼此互化．如果有一个有穷的字序列 $R_1, \cdots, R_l$ $(l \geqslant 1)$ 使得 $R_1$ 为 P，$R_l$ 为 Q 并且 $R_{t-1}$ 与 $R_t$ 直接等价 $(t = 2, \cdots, l)$，则说 P 与 Q（根据字典）等价．

吐氏（一般）问题是，找出一算法使任给一字母表及字典后，任给两字都可判定该两字是否等价．这问题又叫做半群的字的问题．

**定理 XXXI** 半群的字的问题是不能解决的;事实上,有一特殊的字母表及字典,使得没有算法来判定,任给(由这些字母所组成的)两字后,判定它们是否(根据该字典)等价.(坡斯特[1947],马尔科夫[1947].)

**证明** 我们的证明方法在于找出一字母表及字典使得,如果我们能够对任何两字的等价性有一判定过程,那末我们便能够对谓词 $(Ey)T_1(x, x, y)$ 而找得一判定过程,与§ 60 定理 XII(根据邱吉论点而证明的)相矛盾.对这个特殊的字母表及字典,吐氏问题既不能解决,一般吐氏问题当然更不能解决了.

现在可把两字的等价关系表示为,根据下列 2n 个推理规则时由一字到别一字的形式可推演性:

(a) $\dfrac{UA_iV}{UB_iV}$, (b) $\dfrac{UB_iV}{UA_iV}$,

这里 $i = 1, \cdots, n$ 而U与V为由字母 $a_1, \cdots, a_n$ 所组成的任意两字(可为空的).

先论半吐系统,其中只使用(a)组规则而不用其逆(b)组的.

我们将描述一方法,使得任给一个特殊的杜令机器我们都可以作出一个半吐系统,使得纸带的及机器的情况可由半吐系统的字来表示,而机器的原子动作则相应于规则(a)的应用.

这个半吐系统的字母表由下组成,$s_0, \cdots, s_j$(表示机器的方格形态),$q_0, \cdots, q_k$(表示机态)及一新符号 $h$,(共 $j+k+3$ 个字母).

在一个给定的纸带及机器情况中,假设包含被注视方格及一切印格的那一个最小的连续不断的部分共含有 $r$ 格($r \geq 1$).设其方格的形态从左到右为 $s_{g_1}, \cdots, s_{g_r}$,设它的第 $p$ 个方格是被注视方格($1 \leq p \leq r$).设机态为 $q_c$. 这时该情况将由下字而表示

$$hs_{g_1}\cdots s_{g_p}q_cs_{g_{p+1}}\cdots s_{g_r}h,$$

这字叫做该情况的坡斯特字.(什么时候一字才是坡斯特字?)

**例 1** § 69 例 1 的情况的坡斯特字是 $hs_1s_1s_3s_1q_4s_0s_1h$.

这半吐系统的 $n$ 个推理规则(a)将包括那些规则，它们相应于杜令机器的 $(j+1)k$ 个主动布局的. 设关于 $(s_a, q_c)$ 的主动布局言，表上记载的呈 $s_bLq_d$ 形，$b \neq 0$，则将有 $j+2$ 个相应的规则如下 $(e=0,\cdots,j)$，

$$\frac{Us_es_aq_cV}{Us_eq_ds_bV}, \qquad \frac{Uhs_aq_cV}{Uhs_0q_ds_bV};$$

如果表上记载呈 $s_0Lq_d$ 形，则将有 $(j+2)^2$ 个相应规则如下 $(e, f=0,\cdots,j)$

$$\frac{Us_es_aq_cs_fV}{Us_eq_ds_0s_fV}, \quad \frac{Uhs_aq_cs_fV}{Uhs_0q_ds_0s_fV}, \quad \frac{Us_es_aq_chV}{Us_eq_dhV}, \quad \frac{Uhs_aq_chV}{Uhs_0q_dhV}.$$

仿此，如果表上记载的呈 $s_bRq_d$ 形，$b \neq 0$，则将有 $j+2$ 个相应规则；如果呈 $s_0Rq_d$ 形则有 $(j+2)^2$ 个相应规则. 如果表上所载的呈 $s_bCq_d$ 形，则有一个相应规则如下.

$$\frac{Us_aq_cV}{Us_bq_dV}.$$

在这 n 个规则中，各 $A_i$ 全是不同的. 给出一个相应于主动情况的坡斯特字，则在 $n$ 个规则(a)之中恰巧只有一个规则可以应用以之为前提，这规则便是相应于该情况的 $(s_a, q_c)$ 布局的那一个规则，而且只有一种方法可以应用，即 U, V 只有一个选择.（如果 $A_i$ 的第一字母为 h，则该规则的 U 经常是空的.）应用规则的结果给出一个坡斯特字，它相应于由该情况经过一次机器的原子动作后所得的情况. 如果给出一个相应于被动情况的坡斯特字，则任何规则均不能应用.

因此，在半吐系统内，一个给定的字 Q 可由另一个给定的字 P 推出，当且仅当由坡斯特字 P 所代表的情况出发后，该机器将达到一个由坡斯特字 Q 所代表的情况[1].

---

1) 注意，由所证明的结果可以推出，对于任何一个部分递归函数 $\varphi$ 都存在一个规范算法.（参见捷特洛斯 [1953]）. 事实上，试作出下列杜令机器的半吐系统：它机算 $\varphi$，并且如果某变目使 $\varphi$ 无定义时它对该变目绝不停止. 我们又修整杜令机器的定义如下，以适应于捷特洛斯的用语，即我们考虑由 $D_{x_1} * D_{x_2} * \cdots * D_{x_n}$ 所组成的系统 $x_1, \cdots, x_n$，这里 $D_{x_i}$ 由 $x_i$ 个竖号"|"组成(在半吐系统内，

部分递归函数$0 \cdot \mu y T_1(x,x,y)$有定义且取值 0 当且仅当我们有 $(Ey)T_1(x,x,y)$（参见§ 63）. 由定理 XXVIII，有一杜令机器1/1地机算了 $0 \cdot \mu_y T_1(x, x, y)$. 我们可作出一个半吐系统与它相应. 在这半吐系统内，设由下列情况所对应的坡斯特字出发：一数 $x$ 被标准注视，机态为 $q_1$，纸态上它处是空的（即由坡斯特字 $hs_1\cdots s_1q_1h$，共 $x+1$ 个 $s_1$，出发），能不能达到下列情况所对应的坡斯特字：数对 $x$，0 被标准注视，机态为 $q_0$，纸带上它处为空的（即能不能达到坡斯特字 $hs_1\cdots s_1s_0s_1q_0h$，在 $s_0$ 前共 $x+1$ 个 $s_1$ 的出现），全视 $(Ey)T_1(x, x, y)$成立与否而定. 根据邱吉论点，没有一算法可以判定 $(Ey)T_1(x, x, y)$ 的真假（定理 XII），所以没有算法使得，在该半吐系统内，任给两字 P，Q 可以判定Q是否可由P推出，即根据规则(a)是否可由P得Q.

要证明本定理，还须把这结果推广至于全吐系统，即兼容许逆规则(b)的系统. 这可由下述引理而得到.

**引理 VII** 就相应于杜令机器的上述规则 (a) 而言：设P为坡斯特字，Q可用规则(a)及(b)而从P推出，并且Q含有 $q_0$，则只用规则(a)亦可由P推出Q.

**引理 VII 的证明** 用(a)及(b)由P到Q有一推演，今就该推演的长度 $l$ 而作串值归纳. 设推演为 $R_1, \cdots, R_l$，而 $R_1$ 为 P，$R_l$ 为Q. 当 $l=1$ 时显然. 今设 $l>1$. 因P为坡斯特字，而规则(a)(b)又都保持这特性，故 $R_1, \cdots R_l$ 都是坡斯特字，因此都恰巧只含有一个q，即 $q_0, \cdots, q_k$ 中之一. 今 $R_l$ 即Q含有 $q_0$；由于我们选择规则（a）以对应于杜令机器的主动布局，故每个 $A_i$ 都含有 $q_c$，$c \neq 0$，故 $R_l$ 必是由 $R_{l-1}$ 根据规则(a)之一而得来的. 因此如果在所给的推演中，有使用规则(b)时，则最后使用的一次必是由

---

“1”与“*”相应于 $s_1$ 与 $s_0$)，要结果不是 $x_1, \cdots, x_n, \varphi(x_1, \cdots, x_n)$而是 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$、为了这点，只须把原机器 $\mathfrak{M}_\varphi$ 改为 $\mathfrak{M}_\varphi\mathfrak{C}$ 便成（参见§68）. 今把半吐系统的规则(a)改写为（按任何次序）$A_i \to B_i$ 形，我们便得到规范算法的模式 $\mathfrak{A}_\varphi$. 对这模式还须补充指示，使能够把 $x_1, \cdots, x_n, \varphi(x_1, \cdots, x_n)$与坡斯特字互化.——为此，只须在 $\mathfrak{A}_\varphi$ 之上依次加入有限个下列的短行：$q_0h \to t$，$s_1t \to ts_1$，$s_0t \to ts_0$，$ht \to \cdot$，$ks_1 \to s_1k$，$ks_0 \to s_0k$，$k \to q_1h$，$\to hk$ 便够了. 至于逆定理，每个“有算法的”函数都是部分递归的，容易用算术化方法证明，见§69——俄译注.

某个 $R_{t-1}$ 到 $R_t$ 而 $t < l$. 因此，由 $R_t$ 到 $R_{t+1}$ 必是使用规则(a)之一；但因规则(b)是规则 (a) 之逆，所以由 $R_t$ 到 $R_{t-1}$ 亦是使用规则(a)之一的. 但 $R_t$ 是坡斯特字，对这种字至多只有一个规则 (a) 可以使用，并且至多只有一方式. 故 $R_{t-1}$ 与 $R_{t+1}$ 是同一的字. 故我们可以在所给的由 P 到 Q 的推演中，把 $R_tR_{t+1}$ 省去而把推演缩短. 把递归假设应用到这个缩短的根据 (a) 与 (b) 的由 P 到 Q 的推演去，我们可以得出结论说，可以有一个由 P 到 Q 的推演只使用规则 (a).

容易看见，通过哥德尔编号，半群的字的问题等价于下形的问题：对一个给定的 $x$，$(Ey)R(x, y)$是否真，这里 $R$ 是一般递归的. 我们对定理 XXXI 的证明是把 $(Ey)\ T_1(x, x, y)$ 是否真的问题化归到字的问题去的，所以字的问题在形为 $(Ey)R(x, y)$ 的谓词的判定问题中具有最高的不可解决度(参见§ 61 末及§ 65 例 2)[1].

沿定理 XXXI 方向的其它结果可见于马尔科夫 [1947], [1947a], [1947b], [1951], [1951a], [1951b]. 又参见荷尔 (Hall) [1949] 及布尼 (Boone) [1951] 摘要[2].

上面我们在半群的字的问题中所用到的两字 P 与 Q 的等价性(用符号可记为 P ~ Q)，其定义亦可归纳地给出如下；P ~ Q 只能根据下列要求而给出(限制句子，以下则为直接句子)：1. $A_i \sim B_i$ $(i = 1, \cdots, n)$. 2. U ~ U 3. 如果 U ~ V 则 V ~ U. 4. 如果

---

1) 在数学中所碰到的找这个那个算法的问题，若应用哥德尔编号，经常可以表述为 $(Ey)R(x, y)$ 形谓词的判定问题，而 $R$ 为一般递归. 关于这种形状谓词的判定问题，如要证明这种类型中某一具体问题的不可解决性，其法常在于在这个问题之内引人一个显然不可解决的问题，例如 $(Ey)T_1(x, x, y)$ 的解决. 直到慕兹尼克[1956]的结果为止，还没有成功地作出一个$(Ey)R(x, y)$形的谓词，$R$ 一般递归，其判定问题是不可解决但亦无法转到谓词 $(Ey)T_1(x, x, y)$ 的判定问题去的. 这样谓词是否存在的问题，便是可化归性问题，它的一个等价的表述可见于第 350 页的脚注. 坡斯特[1944]曾经作出了特殊的$(Ey)R(x, y)$形的谓词，它的判定问题的不可解决性无须化归到谓词 $(Ey)T_1(x, x, y)$ 判定问题去而借助于很人为的办法. 但是对于所有这一切的谓词都可证明，它们的判定问题是可化归到 $(Ey)T_1(x, x, y)$ 的判定问题的(坡斯特，[1944]，迪克尔 (Dekker) [1954])——俄译注.

2) 参见马尔科夫 [1952, 1954]，布尼[1954, 1955]. 蔡以金 Цейтин [1956]
——俄译注.

$U \sim V$, $V \sim W$，则 $U \sim W$. 5～6. 如果 $U \sim V$，则 $Ua_i \sim Va_i$ 及 $a_iU \sim a_iV(i = 1, \cdots, m)$. 杜令 Turing[1950*] 指出，具有消元律的半群的字的问题亦是不可解决的，所谓消元律是指：7—8. 如果 $Ua_i \sim Va_i$ 或 $a_iU \sim a_iV$，则 $U \sim V(i = 1, \cdots, m)$[1].

1) 在一群中两字的等价性可定义如下，只须把 7—8 换为 7′. 对每一个字母 $a_i$ 在字母表中都有这样的字母 $a_i^{-1}$ 使得 $a_ia_i^{-1} \sim a_i^{-1}a_i \sim \Lambda$（译者按，$\Lambda$ 表示"空"字）. 下问题：找出一个算法以认出群论中两字的相等性(即字的问题)，在过去几十年之内是一个非常重要的代数问题. 诺维科夫（П. С. Новиков）[1952, 1955] 作出一个具有无法解决的字的问题的具体的群，从而证明了这问题的不可解决性. 利用诺维科夫的例子，亚丹（С. И. Адян）证明了一系列问题的不可解决性，有关于群的 [1955]，半群的 [1955a]. 最后只利用这样的例子是存在的这事实，蔡以金 [1956a] 作出非常简单的半群而具有不可解决的字的问题的.

# 第四部分　数理逻辑(附加项目)

## 第十四章　谓词演算与公理系统

### §72. 哥德尔的完备性定理

我们再行研究谓词演算，而从§37所达到的地方出发，设F为一谓词字母公式，只自由地含有不同的变元 $z_1, \cdots, z_q (q \geqslant 0)$ 并只含有不同的谓词字母 $P_1, \cdots, P_s (s \geqslant 1)$. 从一非空域D指派一些客体 $z_1, \cdots, z_q$ 作为 $z_1, \cdots, z_q$ 的值，又指派一些定义于D上的逻辑函数 $P_1, \cdots, P_s$ 作为 $P_1, \cdots, P_s$ 的值，我们说这指派满足F(或说它是对 $z_1, \cdots, z_q, P_1, \cdots, P_s$ 所作的满足F的指派)，如果在§28，§36及§37的赋值规则之下，F取值t. 正如在§37中所定义的，F在一非空域D上是可满足的（有效的），如果D中有一个(每一个)对 $z_1, \cdots, z_q, P_1, \cdots, P_s$ 的指派(都)满足F. 至于记号方面，我们把逻辑函数不再像§36，§37那样写"$\mathfrak{l}_j(a_1, \cdots, a_{n_j})$"，"$\mathfrak{l}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$"，等等而写为"$P_j(a_1, \cdots, a_{n_j})$""$A(a, b)$"等等. 当区域为自然数域时，逻辑函数简单地便是数论谓词，如果我们不区别命题与真假值t或f的话(参见§45(b)及那里的附注)；的确，今后我们亦把它们叫做谓词.

**定理 34°C**　如果一谓词字母公式F在谓词演算内是不可驳的（即如果 ¬F 是不可证的，§41)，则F在自然数域内是可满足的.（关于谓词演算的哥德尔完备性定理，哥德尔[1930]）.

哥德尔原证的修整可见于希尔柏特-阿克曼[1928]的第二版(1938)上，又见于希尔柏特-伯尔奈斯[1939]上. 汉金（Henkin)[1949]给出一个证明，在其中所使用的关于谓词演算推演特性的知识最少[1]. 我们今给一证明，就这方面言，可以说是介于希尔柏

1) 这证明不久便由汉金与哈森雅格（Hasenjalger）[1953] 所简化——俄译注.

特-伯尔奈斯与汉金之间．此外还有拉西奥瓦（Rasiowa）与西柯尔斯基（Sikorski）[1950] 的证明，用到代数学和拓扑学．

**定理 34 的证明**（预备性的） 根据 § 35 定理 19，任一谓词字母公式都等价于一前束谓词字母公式，它（根据该证明的方法）具有和 F 同样的不同自由变元 $z_1, \cdots, z_q$ 及谓词字母 $P_1, \cdots, P_s$．根据§ 37 定理 21 及§ 28 中～的赋值表，或者集合论地仿定理 19 的证明可知，F 的前束式之可以被一指派 $z_1, \cdots, z_q, P_1, \cdots, P_s$ 所满足，当且仅当 F 被它满足时．

在今后的证明（包括引理 22 及 23）中，我们假定 F 是前束的．例如，设 F 为 $\forall x_1 \exists y_1 \forall x_2 \forall x_3 \exists y_2 \forall x_4 B(z_1, z_2, x_1, y_1, x_2, x_3, y_2, x_4)$，而 $B(z_1, z_2, x_1, y_1, x_2, x_3, y_2, x_4)$ 不含量词，并且除列出的以外不含别的不同变元（因此 $q=2$）．

为在记号上更觉方便起见，我们今后经常容许对谓词字母公式的自由变元先代入以数字，因而我们不说，当谓词字母公式 $A(u_1, \cdots, u_p)$ 中的自由变元及谓词字母 $u_1, \cdots, u_p$, $P_1, \cdots, P_s$ 分别取值 $u_1, \cdots, u_p, P_1, \cdots, P_s$ 时该公式所取的值，而说当 $P_1, \cdots, P_s$ 取值 $P_1, \cdots, P_s$ 时 $A(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_p)$ 所取的值（这里 $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_p$ 为自然数 $u_1, \cdots, u_p$ 所对应的数字）．（这里 $A(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_p)$ 便是具有数字的谓词字母公式，这是§ 37 '$k$ 谓词字母公式' 观念的推广，即不但容许 $1, \cdots, \mathbf{k}$（及变元）作为项，而且容许一切数字．不含有任何自由变元或约束变元的具数字的谓词字母公式叫做具数字的命题字母公式．）

我们可把选择逻辑函数 $P_1, \cdots, P_s$ 的问题看作是对每一个公式 $P_j(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_{n_j})$ 而选取一值（t 或 f）的问题，这里 $j=1, \cdots, s$ 而 $a_1, \cdots, a_{n_j}$ 的变域则是所有的自然数 $n$ 矢．让这些公式依照某种无重复的方式而枚举如下，$Q_0, Q_1, Q_2, \cdots$．

根据 ∀, ∃ 的赋值规则可知，F 将被 $z_1, z_2, P_1, \cdots, P_s$ 满足，如果对于每个自然数 $x_1$，都有一个自然数 $y_1$（依赖于 $x_1$，可写为"$y_1(x_1)$"），使得对于每个 $x_2$ 与 $x_3$，都有一个 $y_2$（依赖于 $x_1, x_2, x_3$ 可写为"$y_2(x_1, x_2, x_3)$"）使得对于每个 $x_4$ 言下式都取 t 值（按还须假

定 B 内的 $P_1, \cdots, P_s$ 须释义为 $P_1, \cdots, P_s$. ——译者)

(I) $\quad \mathbf{B}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1(x_1), \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{y}_2(x_1, x_2, x_3), \mathbf{x}_4)$.

(这里 $\mathbf{y}_1(x_1)$ 是相应于自然数 $y_1(x_1)$ 的数字等等.) 我们今把 $z_1$, $z_2$, $y_1(x_1)$, $y_2(x_1, x_2, x_3)$ 分别取为 $2^0\cdot 3^1$, $2^0\cdot 3^2$, $2^1\cdot 3^{x_1}$, $2^2\cdot 3^{x_1}\cdot 5^{x_2}\cdot 7^{x_3}$. 这样，我们便决定了一个具数字的命题字母公式的无穷集 $\mathbf{F}_0$(即当 $x_1, x_2, x_3, x_4$ 历取一切自然数 4 矢而 $z_1, z_2, y_1(x_1)$, $y_2(x_1, x_2, x_3)$如刚才所明指时公式(I)所成的集)，使得如果 $P_1, \cdots, P_s$ 联立地满足这些公式，即，使得它们全为 t，则 $z_1, z_2, P_1, \cdots, P_s$ 必满足 F.

我们说，一类公式是相容于形式系统 $S$ 的，如果把这类公式作为公理加到 $S$ 的公设去，所得的形式系统是简单相容的 (§ 28)，即不能有公式 A 使得由这类公式出发，在 $S$ 内可以推演出 A 及 ¬A.

只要证明了引理 22 及 23，则定理 34 的证明便完毕了，这两引理是有关于任何前束谓词字母公式 F 以及由它依上法所得的公式集 $\mathbf{F}_0$ 的.

**引理 22°C** 如果 $\mathbf{F}_0$ 是相容于命题演算的，则 F 在自然数域内是可满足的.

**证明** 由预备证明处可知，只要证明了可对每个 $Q_0, Q_1, Q_2\cdots$ 指派一个真假值 (t 或 f)，使得在命题演算的赋值过程下，$\mathbf{F}_0$ 内的公式可被联立地满足，那便够了，(我们的方法可就下列情形而证明：$\mathbf{F}_0$ 是任何相容于命题演算的公式集，而 $Q_0, Q_1, Q_2\cdots$ 是不同的就命题演算言是素的公式，包括 $\mathbf{F}_0$ 中所有对命题演算言是素的那些成份，§ 25.)

根据在命题演算内有 $\mathbf{F}_0 \vdash Q_0$ 或没有 $\mathbf{F}_0 \vdash Q_0$ 而命 $R_0$ 为 $Q_0$ 或 $\neg Q_0$ (这里 "$\mathbf{F}_0\vdash$" 指可由 $\mathbf{F}_0$ 内的公式而推演出)，并把 $R_0$ 加到 $\mathbf{F}_0$ 后得出一新集 $\mathbf{F}_1$. 则 $\mathbf{F}_1$ 亦相容于命题演算. 因为，就第一情况言(即，当 $\mathbf{F}_0 \vdash Q_0$ 而 $R_0$ 为 $Q_0$)，$R_0$ 的增加并没有增加可推演的公式集；就第二情形言(即当 $\overline{\mathbf{F}_0 \vdash Q_0}$ 而 $R_0$ 为 $\neg Q_0$)，如果有 A 使 $\mathbf{F}_1 \vdash$ A 及 $\mathbf{F}_1 \vdash \neg$A，则 $\mathbf{F}_0, \neg Q_0 \vdash$ A 及 $\mathbf{F}_0, \neg Q_0 \vdash \neg$A，故由¬引及¬消可

得 $\mathbf{F}_0 \vdash \neg\neg Q_0 \vdash Q_0$，与穷举假设矛盾.

同样，对每个自然数 $i$，根据 $\mathbf{F}_i \vdash Q_i$ 或 $\overline{\mathbf{F}_i \vdash Q_i}$ 而命 $R_i$ 为 $Q_i$ 或 $\neg Q_i$，并把 $R_i$ 加到 $\mathbf{F}_i$ 去组成 $\mathbf{F}_{i+1}$；则由 $\mathbf{F}_i$ 的相容性可得 $\mathbf{F}_{i+1}$ 的相容性.

我们今根据 $R_i$ 为 $Q_i$ 或 $R_i$ 为 $\neg Q_i$ 而对 $Q_i$ 指派以值 t 或 f.

对这个指派言，不但 $R_0, R_1, R_2, \cdots$ 取值 t，而且 $\mathbf{F}_0$ 内的公式亦取值 t. 因设 H 为 $\mathbf{F}_0$ 的一个公式，H 中就命题演算言是素的那些不同的部分必出现于表 $Q_0, Q_1, Q_2, \cdots$ 之中，设它们为 $Q_{i_1}, \cdots, Q_{i_l}$. 试考虑公式 $H \& R_{i_1} \& \cdots \& R_{i_l}$；命之为"A". 设

$$i = 1 + \max(i_1, \cdots, i_l);$$

则 $\mathbf{F}_i \vdash A$，因为 $H, R_{i_1}, \cdots, R_{i_l}$ 全属于 $\mathbf{F}_i$ 之故. 但是能够使得 $R_{i_1}, \cdots, R_{i_l}$ 全取值 t 的指派值也只限于此了，所以如果在这个指派中 H 不取值 t，则 A 将为永假而 $\neg A$ 将为永真（§28）；由§29 定理 10，可在命题演算中证出 $\neg A$，当然更有 $\mathbf{F}_i \vdash \neg A$，这与 $\mathbf{F}_i \vdash A$ 合并便与 $\mathbf{F}_i$ 的相容性矛盾.

**引理 23** 如果在谓词演算中 F 是不可驳的，则 $\mathbf{F}_0$ 相容于命题演算中.

**证明** 注意，根据我们对各数 $z_1, z_2$ 及函数 $y_1(x_1), y_2(x_1, x_2, x_3)$ 的选择，我们有：(A)数 $z_1, z_2$，当 $x_1 = 0, 1, 2, \cdots$ 时的 $y_1(x_1)$，当 $x_1, x_2, x_3 = 0, 1, 2, \cdots$ 时的 $y_2(x_1, x_2, x_3)$ 都是彼此不同的. (B) $x_1 < y_1(x_1)$ 及 $x_1, y_1(x_1), x_2, x_3 < y_2(x_1, x_2, x_3)$.

为了用反证法而证 $\mathbf{F}_0$ 是相容的，今设有 A 使得，在命题演算（用到具数字的谓词字母公式）内可由 $\mathbf{F}_0$ 的公式推演出 A 及 $\neg A$. 再应用弱 $\neg$ 消，则由同样的各公式，即由有限个具形(I)的公式可以得出关于公式 $\boldsymbol{A} \& \neg \boldsymbol{A}$ 的推演.

设"$\bar{0}$"，"$\bar{1}$"，"$\bar{2}$"$\cdots$表示一些变元，彼此不同，且亦与 $x_1, y_1, x_2, x_3, y_2, x_4$ 不同，但 $\bar{z}_1$ 就是 $z_1$，$\bar{z}_2$ 就是 $z_2$. 在这推演中，每个数字 $\mathbf{u}$，只要它不是别的数字的一部分，我们便把它改变为相应的变元 $\bar{u}$，这样我们便在（谓词字母）命题演算中得到一个由有限多个具 $B(z_1, z_2, \bar{x}_1, \bar{y}_1(x_1), \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{y}_2(x_1, x_2, x_3), \bar{x}_4)$ 形的公式而作的关于

$\boldsymbol{A}\&\neg\boldsymbol{A}$ 的推演，当然更可以在（纯）谓词演算中得到，这时一切变元保持固定；因此应用 ∀ 消（注意 $x_4$ 与被写出的其它变元均不同），便可以由下公式而推演出公式 $\boldsymbol{A}\&\neg\boldsymbol{A}$：

$$\forall x_4 B(z_1, z_2, \bar{x}_1, \bar{y}_1(x_1), \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{y}_2(x_1, x_2, x_3), x_4).$$

因此若把各个不同的假定公式（设具有 $l$ 个）写出，那便是

$$\forall x_4 B(z_1, z_2, \bar{x}_1^1, \bar{y}_1(x_1^1), \bar{x}_2^1, \bar{x}_3^1, \bar{y}_2(x_1^1, x_2^1, x_3^1), x_4),$$

$$\forall x_4 B(z_1, z_2, \bar{x}_1^2, \bar{y}_1(x_1^2), \bar{x}_2^2, \bar{x}_3^2, \bar{y}_2(x_1^2, x_2^2, x_3^2), x_4),$$

(1)

……

$$\forall x_4 B(z_1, z_2, \bar{x}_1^l, \bar{y}_1(x_1^l), \bar{x}_2^l, \bar{x}_3^l, \bar{y}_2(x_1^l, x_2^l, x_3^l), x_4) \vdash \boldsymbol{A}\&\neg\boldsymbol{A}.$$

公式 $\boldsymbol{A}\&\neg\boldsymbol{A}$ 不含变元．在(1)的各假定公式中，最右边的自由变元是 $\bar{y}_2(x_1^1, x_2^1, x_3^1), \cdots, \bar{y}_2(x_1^l, x_2^l, x_3^l)$．因为这 $l$ 个假定公式是不同的，即当 $j=1, 2, \cdots, l$ 时，$x_1^j$，$x_2^j$，$x_3^j$ 是不同的自然数 3 矢，故由(A)，这 $l$ 个变元是彼此不同的，和 $z_1$，$z_2$ 亦不同的．由(B)我们可以在其中挑选一个，设为 $\bar{y}_2(x_1^1, x_2^1, x_3^1)$，它的足码比(1)中其它处的自由变元（即不是在最右的自由变元）的足码均大（即，它在数列 $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \cdots$ 中出现最迟），因而和这些变元都不同，不过也许和 $z_1$ 或 $z_2$ 相同．由 ∃ 消，再把约束变元改名（§ 33*74，注意，$y_2$ 是和其它被写出的变元是不同的），再用两次 ∀ 消（注意，$x_2$，$x_3$ 彼此不同，亦与被写出的其它变元不同），便得

$$\forall x_2 \forall x_3 \exists y_2 \forall x_4 B(z_1, z_2, \bar{x}_1^1, \bar{y}_1(x_1^1), x_2, x_3, y_2, x_4)$$

(2) $\qquad \forall x_4 B(z_1, z_2, \bar{x}_1^2, \bar{y}_1(x_1^2), \bar{x}_2^2, \bar{x}_3^2, \bar{y}_2(x_1^2, x_2^2, x_3^2), x_4)$

……

$$\forall x_4 B(z_1, z_2, \bar{x}_1^l, \bar{y}_1(x_1^l), \bar{x}_2^l, \bar{x}_3^l, \bar{y}_2(x_1^l, x_2^l, x_3^l), x_4) \vdash \boldsymbol{A}\&\neg\boldsymbol{A}.$$

没有任何变元是变化的，因为 ∃ 消的应用变元 $\bar{y}_2(x_1^1, x_2^1, x_3^1)$ 不出现于任何其它假定公式中（参见§ 24 引理 7b）．

再由(A)可知，最右面的自由变元 $\bar{y}_1(x_1^1)$，$\bar{y}_2(x_1^2, x_2^2, x_3^2), \cdots$，$\bar{y}_2(x_1^l, x_2^l, x_3^l)$ 是彼此不同的亦与 $z_1$，$z_2$ 不同．由(B)我们可在其中挑出一个，其足码比(2)中其它处的自由变元（$z_1$，$z_2$ 除外）所具的足码更大，因而它必与这些变元不同，这变元可为 $\bar{y}_1(x_1^1)$，亦可

为，比如说，$\bar{y}_2(x_1^2, x_2^2, x_3^2)$ 如果它是 $\bar{y}_1(x_1^1)$，则由∃消，*74 及∀消，我们可把第一个假定公式改为 $\forall x_1 \exists y_1 \forall x_2 \forall x_3 \exists y_2 \forall x_4 B(z_1, z_2, x_1, y_1, x_2, x_3, y_2, x_4)$ 即改为 F. 如果它是 $\bar{y}_2(x_1^2, x_2^2, x_3^2)$，则我们可把第二假定公式改为 $\forall x_2 \forall x_3 \exists y_2 \forall x_4 B(z_1, z_2, \bar{x}_1^2, \bar{x}_2^2, \bar{y}_1(x_1^2), x_2, x_3, y_2, x_4)$，如果这公式与前一公式相同（即如果 $x_1^1 = x_1^2$），我们可把它删去.

如此继续下去，每次用∃消（用到最右面的，并与所有其它被写出的变元都不同的 $\bar{y}$ 去）及*74 之后，我们都把∀消应用于在∃消之后不再被∃消所"盖"的那些 $\bar{x}$ 上去，如果得出相同的公式则删去重复，使得下一步骤中出现在最右面的那些 $\bar{y}$ 仍是彼此不同的. 最后我们便简单地得到

(3) $$F \vdash \boldsymbol{A} \& \neg \boldsymbol{A}.$$

由(3)及&消¬引可得

(4) $$\vdash \neg F,$$

这与引理的假设即F是不可驳的相矛盾.

**系 1°C** 每个谓词字母公式G只要它在自然数域内是有效的，它便在谓词演算内是可证的（因此由§37 定理 21，在每个非空域内是有效的）.（哥德尔完备性定理的另一说法，哥德尔[1930].）

**证明** {G 在自然数域内有效}→{¬G 在那域内不可满足}→{在谓词演算内¬G 是可驳的即¬¬G 是可证的}［由本定理，把¬G 作为 F 再换质位（参见§26*14）］→{在该演算内G是可证的}［由¬消］.

**系 2C** 如果一谓词字母公式F在某个（非空）域内被满足，则F在自然数域内亦可被满足.（累文汉定理，(Löwenheim)[1915]，又叫累文汉-斯科林定理.）

**证明** 由系 1 换质位而得；或如下：{F 在某(非空—译者)域内可满足}→{¬F 在该域内非有效}→{在谓词演算内¬F 不可证即F不可驳}［由定理 21 换质位］→{F 在自然数域内可满足}［由本定理］.

累文汉本人对这定理的证明以及斯科林的简化证明［1920］，都使用到集合论的选择公理(蔡梅罗(Zermelo)［1904］，参见§ 13)。现在所给哥德尔定理的证明过程可以说具有较少程度的非构造性。唯一的非直觉主义步骤（在现在的处理中）在于引理 22 的证明，在那里我们假设或者 $\mathbf{F}_i \vdash Q_i$ 或者 $\overline{\mathbf{F}_i \vdash Q_i}$。 希尔伯特-伯尔奈斯把哥德尔完备性定理的证明(其中含有非构造性步骤的)的一部分形式化了，从而得到元数学的关于谓词演算的完备性定理(希尔柏特-伯尔奈斯［1939］，第 252—253 页)，这我们将表述为定理 36。

**定理 35°C** 在定理 34 中，F 的满足谓词 $P_1, \cdots, P_s$ 可以这样选择使有 $P_j(a_1, \cdots, a_{n_j}) \equiv (Ex)(y)R_j(a_1, \cdots, a_{n_j}, x, y) \equiv (x)(Ey)S_j(a_1, \cdots, a_{n_j}, x, y)$，而 $R_j$ 与 $S_j$ 是原始递归的 $(j = 1, \cdots, s)$。

**证明** 在下文，"递归"一语系指一般递归(虽则实际上各叙述对原始递归亦是成立的)；然后根据§ 57 定理 IV 系，把结论中的 $R_j$ 及 $S_j$ 取为原始递归的。

今设我们用§52及§56的方法对具数字的谓词字母公式作一个哥德尔编号。那末，如果 $a$，$b$ 分别是 A 及 B 的哥德尔数，则有两递归函数 $\mu$ 及 $\nu$ 使得 $\mu(a, b)$为 A⊃B 的哥德尔数，$\nu(a)$为¬A 的哥德尔数，设 $H(a) \equiv \{a$ 是 $\mathbf{F}_0$ 中某一公式的哥德尔数$\}$；则H是递归的。如果对 $Q_0, Q_1, Q_2, \cdots$ 的枚举选择适当，则下列函数亦将是递归的： $\kappa(i) = \{Q_i$ 的哥德尔数$\}$，$\alpha_j(a_1, \cdots, a_{n_j}) = \{$使得 $P_j(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_{n_j})$为 $Q_i$ 的 $i\}$。

根据引理 22 的证明中所引入的满足谓词 $P_i$ 的定义，可知，如果 $P_j(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_{n_j})$ 为 $Q_i$，则 $P_j(a_1, \cdots, a_{n_j}) \equiv \{R_i$ 为 $Q_i\} \equiv \{\mathbf{F}_i \vdash Q_i\}$。 设 $F(i, a) \equiv \{a$ 是具下性质的一公式 A 的哥德尔数，$\mathbf{F}_i \vdash$ A$\}$。则有

(a) $P_j(a_1, \cdots, a_{n_j}) \equiv F(\alpha_j(a_1, \cdots, a_{n_j}), \kappa(\alpha_j(a_1, \cdots, a_{n_j})))$.

我们今探究谓词 $F(i, a)$。

要说，在命题演算中 $\mathbf{F}_0 \vdash$ A，等于说，把 $\mathbf{F}_0$ 作为公理加到命题

演算后，在所得的形式系统内A是可证的．设$F_0(a)\equiv\{a$ 是这系统内一个可证公式的哥德尔数$\}$．由§ 51，§ 52 的方法（参见 Dη 12)，由于$H$是递归的，可得 $F_0(a)\equiv(Ey)R(a,y)$，而$R$是(原始)递归的；即 $F_0(a)$ 可表成§ 57 定理V第二部分中的存在性 1 量词形式．

根据由 $\mathbf{F}_i$ 而作的 $\mathbf{F}_{i+1}$ 的定义，以及根据⊃规则可得，

$$\{\mathbf{F}_{i+1}\vdash \mathrm{A}\}\equiv\{\mathbf{F}_i,\mathrm{R}_i\vdash A\}\equiv\{\mathbf{F}_i\vdash \mathrm{R}_i\supset\mathrm{A}\}.$$

考虑到 $\mathrm{R}_i$ 的穷举定义，我们便得

$$\begin{cases}F(0,a)\equiv F_0(a)\\ F(i',a)\equiv[F(i,\kappa(i))\&F(i,\mu(\kappa(i),a))]\\ \qquad\qquad\vee[\bar{F}(i,\kappa(i))\&F(i,\mu(\nu(\kappa(i)),a))]\end{cases}$$

这证明了$F$是递归于 $F_0$ 的；因为，若用§ 45#D，并把谓词$F$及 $F_0$ 改为它们的代表函数$\varphi$及 $\varphi_0$，我们便得到一个“有套递归式”(§ 55)，

$$\begin{cases}\varphi(0,a)=\varphi_0(a)\\ \varphi(i',a)=\chi(\varphi(i,\kappa(i)),\varphi(i,\mu(\kappa(i),a)),\varphi(i,\mu(\nu(\kappa(i)),a))),\end{cases}$$

这里 $\chi$，$\kappa$，$\mu$ 与 $\nu$ 是(原始)递归的．(的确，根据§ 55 所引的培特 Péter[1934]的结果，$F$是原始递归于 $F_0$ 的．)

由 (a)，$P_j$ 递归于 $F$，$\alpha_j$，$\kappa$；既然 $\alpha_j$ 与 $\kappa$ 是递归的，故 $P_j$ 递归于 $F$，因而递归于 $F_0$，而后者是可表成存在性 1 量词形式的．故由坡斯特定理(§ 58 定理 XI)，$P_j$ 可以表成定理V中的两种 2 量词形式，如所欲证．

**定理 36°** 把一个不可证的谓词字母公式G作为公理模式而加到谓词演算的公设表去，将使得建基于谓词演算及公设群 B (§ 19)之上的数论系统变成$\omega$不相容的(§ 42)．(事实上，某个表示$(y)D(y)$形的真命题公式将变成可驳的，这里 $D(y)$ 是一个能行地可判定的谓词．)(希尔柏特-伯尔奈斯完备性定理，Hilbert-Bernays 希尔柏特-伯尔奈斯[1939]．)

注意它与命题演算中§ 29 定理 10 系 2 的部分类似性．

**证明的方法** 不丧失普遍性我们可把G取为闭的，因此$q=0$

(参见§ 32 末)．设F为¬G的前束形，由定理19及*30，*49得

(i)　在谓词演算中 $\vdash G \sim \neg F$.

由(i)，因G是不可证的故¬F亦然，即F是不可驳的．

故由引理23(它的证明是有穷性的)得

(ii)　$F_0$ 是相容于命题演算的．

$F_0$ 的相容性等价于下命题，$\overline{F_0 \vdash \boldsymbol{A} \& \neg \boldsymbol{A}}$．如果 $r$ 是 $\boldsymbol{A} \& \neg \boldsymbol{A}$ 的哥德尔数，并设 $R(a, y)$ 是证明定理35时所用的原始递归函数，则 $\overline{\mathrm{F}_0 \vdash \boldsymbol{A} \& \neg \boldsymbol{A}} \equiv \overline{(Ey)} R(r, y) \equiv (y)\bar{R}(r, y)$．命 $D(y) \equiv \bar{R}(r, y)$．则 $D(y)$ 是原始递归的，而(ii)等价于

(iia)　$(y)D(y)$.

由§ 49定理27系，可知在数论形式体系内 $D(y)$ 可被一公式 $\mathrm{D}(\mathrm{y})$ 所数字地表示．由(iia)可知在数论形式体系内有

(iii)　$(y)[\vdash D(\mathbf{y})]$

根据引理22，古典地有

(iv)　{$\mathrm{F}_0$ 相容于命题演算}→{F被某些谓词 $\mathrm{P}_1, \cdots, P_s$ 所满足}.

蕴函式(iv)的前提可以在数论系统的符号体系内用公式 $\forall \mathrm{y} \mathrm{D}(\mathrm{y})$ 加以表示．如果我们用定理35内作出的 $P_1, \cdots, P_s$ 的表达式的话，它的结论亦可以在数论符号体系内表示，设 $\mathrm{R}_j(\mathrm{a}_1, \cdots, \mathrm{a}_{n_j}, \mathrm{x}, \mathrm{y})$ 数字地表示 $R_j(a_1, \cdots, a_{n_j}, x, y)$．则在该符号体系内 $\exists \mathrm{x} \forall \mathrm{y} \mathrm{R}_j(\mathrm{a}_1, \cdots, \mathrm{a}_{n_j}, \mathrm{x}, \mathrm{y})$ 便表示 $P_j(a_1, \cdots, a_{n_j})$．因此，F被 $P_1, \cdots, P_s$ 所满足便可用公式 $\mathrm{F}^*$ 表示，$\mathrm{F}^*$ 乃在公式F中把谓词字母 $\mathrm{P}_j(\mathrm{a}_1, \cdots, \mathrm{a}_{n_j})$ $(j = 1, \cdots, s)$ 分别地代入以公式 $\exists \mathrm{x} \forall \mathrm{y} \mathrm{R}_j(\mathrm{a}_1, \cdots, \mathrm{a}_{n_j}, \mathrm{x}, \mathrm{y})$ 而得(假设约束变元已适当地选取)．故蕴涵式(iv)可以公式 $\forall \mathrm{y} \mathrm{D}(\mathrm{y}) \supset \mathrm{F}^*$ 来表示．

我们今建议，把(iv)的非形式的古典证明(demonstration)形式化于古典数论系统中，作为该公式的证明．因此，我们将得，在该系统内有

(v)　$\vdash \forall \mathrm{y} \mathrm{D}(\mathrm{y}) \supset \mathrm{F}^*$.

再换质位(§ 26，*12)得

(vi)　$\vdash \neg \mathrm{F}^* \supset \neg \forall \mathrm{y} \mathrm{D}(\mathrm{y})$.

由(i)作代入(§ 34 定理 15)得

(vii) $\vdash G^* \sim \neg F^*$.

根据(vii)及(vi)得

$$\vdash G^* \supset \neg \forall y D(y).$$

在 (iii) 及 (viii) 中,"$\vdash$"都是就未扩大的数论形式体系说的。如果把G作为一公理模式而加入这体系中，则 $G^*$ 便变成一公理(由新模式),因而(因为 (iii) 及 (viii) 仍然成立) $D(\mathbf{y})$ ($y = 0, 1, 2 \cdots$)及$\neg \forall y D(y)$ 同时是可证的,即扩大系统是$\omega$不相容的. (因此$\forall y D(y)$ 变成可驳的,尽管它表示真命题 $(y)D(y)$.)

这里我们不想把这里所用到的,由 (iv) 到 (v) 的非形式证明*(demonstration) 加以形式化,正和在§ 42 定理 30 的证明处,我们对由(I)到(II)的步骤也没有做一样.[1]

希尔柏特-伯尔奈斯 [1939] (第 205 页以后，尤其是第 243—252 页) 把他们的哥德尔完备性定理的证明的相应部分在另一个形式系统内形式化了,因此可以作结论说，定理 36 对我们的系统亦是成立的。(参见§ 74 例 9 前对该系统的附注.)

**定理 37°C** 给出可数无穷多个(或有限个谓词字母公式 $F_0$, $F_1$, $F_2$, $\cdots$, 如果它们间任何有限多个的合取在谓词演算中是不可反驳的,则在自然数域内它们是联立地可满足的,即有一满足指派把自然数 $z_0, z_1, z_2, \cdots$ 指派给这集公式中出现的不同的自由变元 $z_0, z_1, z_2, \cdots$,把谓词 $P_0, P_1, P_2, \cdots$ 指派给其中的不同的谓词字母 $P_0, P_1, P_2, \cdots$. 这里 $z_0, z_1, z_2, \cdots$ 及 $P_0, P_1, P_2, \cdots$ 可有穷可无穷. (对无穷多个公式的哥德尔完备性定理,哥德尔[1930].)

**证明** 例如，设对某个 $k$, $F_k$ 为 $\forall x_{k_1} \exists y_{k_1} \forall x_{k_2} \forall x_{k_3} \exists y_{k_2} \forall x_{k_4} B(z_{e_{k_1}}, z_{e_{k_2}}, x_{k_1}, y_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, y_{k_2}, x_{k_4})$. 我们便取 $z_{e_{k_1}}, z_{e_{k_2}}, y_{k_1}(x_{k_1})$, $y_{k_2}(x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3})$ 分别为 $2^0 \cdot 3^{e_{k_1}}$, $2^0 \cdot 3^{e_{k_2}}$, $2^1 \cdot 3^k \cdot 5^{x_{k_1}}$, $2^2 \cdot 3^k \cdot 5^{x_{k_1}}$. $7^{x_{k_2}} \cdot 11^{x_{k_3}}$. 照前面的方法作成各集 $\mathbf{F}_{00}$, $\mathbf{F}_{10}$, $\mathbf{F}_{20}$, $\cdots$ 再作其并集即为 $\mathbf{F}_0$.

---

1) 参见附录 III——俄泽注.

**系 1°C** 如果在自然数域中对公式 $G_0, G_1, G_2, \cdots$ 中的自由变元及谓词字母所作的每一指派，这些公式中总有一个取值 t，则可在它们之中选取有限个来作析取式使得该析取式在谓词演算中是可证的.

**系2°C**[1] 如果 $F_0, F_1, F_2, \cdots$ 在某个非空域内是联立可满足的(甚至于即使每一种有限个 $F_0, F_1, F_2, \cdots$ 的合取式在相应的非空域内是可满足的(哥德尔 [1930])), 则 $F_0, F_1, F_2, \cdots$ 在自然数域内是联立可满足的.(累文汉定理的推广，斯科林[1920].)

**系 2 的证明** {每一种有限个 $F_0, F_1, F_2, \cdots$ 的合取式在相应的非空域内是可满足的}→{这种合取式的否定在每个域内都不是有效的}→{每一种这样的合取式是不可反驳的}(由§ 37 定理 21)→{$F_0, F_1, F_2, \cdots$ 在自然数域内是联立可满足的}(由本定理).

**定理 38°C** 如果定理 37 中的公式的枚举 $F_0, F_1, F_2, \cdots$ 是能行的(当无穷个时)，则联立满足谓词 $P_0, P_1, P_2, \cdots$ 可这样地选取使得 $P_j(a_1, \cdots, a_{n_j}) \equiv (Ex)(y)R_j(a_1, \cdots, a_{n_j}, x, y) \equiv (x)(Ey) S_j(a_1, \cdots, a_{n_j}, x, y)$，而 $R_j$ 与 $S_j$ 为原始递归的($j = 0, 1, 2, \cdots$). 枚举 $F_0, F_1, F_2, \cdots$ 是能行的，这假设可如下地加以明确，在一个适当的哥德尔编号下，$F_k$ 的哥德尔数须为 $k$ 的一般递归函数(参见§ 61)，或者用§ 70 所暗示的方法而使用杜令机器

**证明** 集 $\hat{a}H(a)$(参见定理 35 的证明)是可递归枚举的(但未必是递归的). 若取 $F_0(a) \equiv (En)F_0(a, n)$，这里 $F_0(a, n) \equiv$ {把 $\mathbf{F}_0$ 中前 $n$ 个公式作为公理加到命题演算去得一形式系统，a 是其中一个可证公式的哥德尔数}，并用§ 57 (17)(或§ 53 末)，我们仍有 $F_0(a) \equiv (Ey)R(a, y)$，而 $R$ 为递归的.

哥德尔完备性定理以及累文汉定理(包括§ 73 中所给的说法)其意义将在§ 75 中讨论，该讨论可无需先熟悉标有星号的§ 74 而阅读，只要读者接受其中所引证的一些使人相信的§ 74 中的叙述便成了. 在§ 76 中比较多用到§ 74.

---

1) 原文为"系 2C"，今从俄译本改为"系 2°C"——译者注.

在一个具有代入规则假设的谓词演算中(§37末),如果F可由G推演出,则凡使G有效的域亦使F有效;故互相可推演的两公式必在同样的区域内有效. 当只有0元及一元谓词变元出现时逆定理亦成立, 用§76所引的理论便可证明;但一般说来,逆定理不成立,见哈森雅格[1950].

## §73. 具相等性的谓词演算

相等性可与谓词演算合并处理, 只须把下列的公理及公理模式加到公设去便成,这里x是一变元,A(x)是一公式, a与b为两变元对A(x)中的x是自由的:

22. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$　　　　23. $a = b \supset (A(a) \supset A(b))$.

对具相等性的纯谓词演算言,'项'将指变元,而'公式'将指具等式的谓词字母公式[1], 这只须在'谓词字母公式'的定义(§31)中加入一句便得: 如果s与t为项,则s = t为公式. 一个具等式的谓词字母公式,如果除不同的字母$P_1, \cdots, P_s$外, 不含其它谓词字母,便叫做由=, $P_1, \cdots, P_s$组成的字母公式.

(A) 公理22(亦即是§38*100)及$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \supset (\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} \supset \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c})$(§19公理16,现在则是根据公理模式23而得的公理)叫做开的关于=的相等性公理. 根据模式23而得的下列公理 $a = b \supset (P(a_1, \cdots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \cdots, a_n) \supset P(a_1, \cdots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \cdots, a_n))$ $(i = 1, \cdots, n)$ 叫做开的关于P的相等性公理,这里P是$n$元谓词,而$a_1, \cdots, a_{i-1}, a, b, a_{i+1}, \cdots, a_n$是$n + 1$个不同变元. 闭相等性公理则指相应的开相等性公理的闭包(它们是互相可以推演的 见§32末). 我们用"$Eq(=, P_1, \cdots, P_s)$"表示关于=, $P_1, \cdots, P_s$的闭相等性公理的合取式.

**例1** 如果$\boldsymbol{A}$有两个变目,则$E_q(=, \boldsymbol{A})$是下列公式

$$\forall a(a = a) \& \forall a \forall b \forall c[a = b \supset (a = c \supset b = c)] \&$$

1) 原文为 equality and predicate letter formula (等式及谓词字母公式), 今改从俄译本译名——译者注.

$$\forall a\forall b\forall c[a=b\supset(A(a,c)\supset A(b,c))]\&\forall a\forall b\forall c[a=b\supset(A(c,a)\supset A(c,b))].$$

(B) 由关于=的相等性公理(公理22及16),我们可以象§38那样在谓词演算中推演出相等关系的自反性(*100)对称性(*101)及可传性(*102)以及两个特殊的替换性(*108, *109). 由任何一个根据模式23的公理 $a=b\supset(A(a)\supset A(b))$,只要A(x)不含自由a及b(在特例,如 *108, *109 或关于谓词字母P的相等性公理),我们都可利用 *101 而推演出 $a=b\supset(A(a)\sim A(b))$ (当我们由*108, *109及 *101 而推出*115, *116 时便用这方法不过表述略为不同.)

这里以及在§75中,当我们处理一类具等式的谓词字母公式时,如其中只含有一些给定的谓词字母,我们都用"Q"来表示这些字母以外的某个特殊的2元谓词字母. 给出这类中一公式,设名之为"E"或"E(=)",我们便用"$E^Q$"或"E(Q)"来意指把该公式中凡是 $s=t$ 形的部分(s, t 为项)都同时替换以 Q(s, t) 后所得的谓词字母公式.

*k* 永真性,*k* 永等性 (§36) 以及在一个给定的非空域内的可满足性及有效性这些观念亦可以推广到具等式的谓词字母公式去,只须补入: $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 将取值t(取值f)当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 在该域内取同一(不同)客体为其值时;或者如果我们预先代入数字,则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 之取值t或f视 $a=b$ 或 $a\neq b$ 而定. 因此由=, $P_1,\cdots,P_s$ 组成的字母公式F将被 $z_1,\cdots,z_q,P_1,\cdots,P_s$ 所满足当且仅当 $F^Q$ 被 $z_1,\cdots,z_q,Q,P_1,\cdots,P_s$ 所满足时,而 $Q(a,b)\equiv a=b$.

哥德尔把他的完备性定理推广到具相等性的谓词演算(哥德尔[1930]),这时必须容许区域可为有穷这一可能,因为例如,$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}\&\forall\boldsymbol{c}(\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b})$ 在且仅在具两元素的域中被满足.

**定理 39**$^{(°C)}$ 定理20(§36),$21^C$(§37),$34^{°C}$(§72)及它们的系都继续成立,如果把"谓词字母公式""谓词演算""在自然数域内被满足(有效,每个指派)"分别读成"具等式的谓词字母公式""具相等性的谓词演算""在自然数域内或在一个(每一个)非空有限

域内被满足(有效,每个指派)"的话.[1](这样推广的定理在引用时我们加上星号;如果原定理有"°"或"$^{C}$"号的,在有星号的定理亦须相应地加上.)

**证明** 定理 34*. 设 F 为由 $=, P_1, \cdots, P_s$ 组成的字母公式,在具相等性的谓词演算内是不可驳的. 由 (A), $Eq(=, P_1, \cdots, P_s)$ 在具相等性谓词演算内是可证的. 故由§ 27*45, $F\&Eq(=, P_1, \cdots, P_s)$ 在具相等性谓词演算内是不可驳的,在谓词演算内(使用具等式的谓词字母公式)更如此. 故由§ 34 定理 15, $F^Q\&Eq(Q, P_1, \cdots, P_s)$在纯谓词演算内是不可驳的. 故依定理 34,$F^Q\&Eq(Q, P_1, \cdots, P_s)$ 在自然数域内被满足. 由下述引理的(a)部分,这证明便完毕了.

**引理 24$^C$** (a) 如果$F^Q\& Eq(Q, P_1, \cdots P_s)$在一给定的非空域D内可满足,则F在一个具同基数或较少基数的域 D* 内亦可满足.

(b) 如果 $F_k^Q\&Eq(Q, P_{k_1}, \cdots, P_{k_{s_k}})$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$在一非空域D内可联立满足,而 $P_{k_1}, \cdots, P_{k_{s_k}}$ 为 $F_k$ 中的谓词字母,那末 $F_0, F_1, F_2, \cdots$ 便将在一域 D* 内联立地可满足,并且

$$0 < \bar{\bar{D}}^* \leqslant \bar{\bar{D}}.$$

**证明** (a) 设对 $F^Q\&Eq(Q, P_1, \cdots, P_s)$ 给出一个满足指派 $z_1, \cdots, z_q, Q, P_1, \cdots, P_s$. 则 $Q, P_1, \cdots, P_s$ 必须适合下列公式: (i) $\forall a Q(a, a)$, (ii) $\forall a \forall b[Q(a, b) \supset Q(b, a)]$,(iii) $\forall a \forall b \forall c [Q(a, b)\&Q(b, c) \supset Q(a, c)]$, (iv)$\forall[Q(a, b) \supset P_j(a_1, \cdots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \cdots, a_{n_j}) \sim P_j(a_1, \cdots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \cdots, a_{n_j})]$ $(j = 1, \cdots, s, i = 1, \cdots n_j)$. 这可由仿 (B) 项里所给的证明论式的推理而作集合论式的推理而得到;或者,注意到在纯谓词演算中这些公式的合取被 $Eq(Q, P_1, \cdots, P_s)$ 所蕴涵(事实上两者等价),再用§ 37 定理 21 及 &, ⊃(或~)的表便得到. (在证明定理 34*时,这步骤可免,只须用这合取式以代替 $Eq(Q, P_1, \cdots, P_s)$ 便可.)

---

1) 例如对定理 37 系 1 必须认为,所说条件是指在自然数域或任一非空域的指派. 定理中所说的字句变换不能推广到 $k$ 永真 ($k$-identical, 与有效性不同)去——俄译注.

由 (i)-(iii) 的形状及 $\forall$, $\supset$, & 的赋值过程，可见，既然逻辑函数 $Q(a, b)$ 要满足它们，$Q$ 就必须具有自反性，对称性及可传性．(具有这三性质的关系 $Q(a, b)$ 叫做等价关系·) 故区域 $D$ 将因关系 $D$ 而分成等价类，即不可兼的非空类，使得 $D$ 内任意两元素 $a$, $b$ 属于同一类当且仅当 $Q(a, b)$ 成立时．然后又因 (iv) 被满足，故对任何 $j$ 言 ($j = 1, \cdots, s$)，把 $P_j(a_1, \cdots, a_{n_j})$ 中的变目换为在同一等价类中其它的元素时，$P_j(a_1, \cdots, a_{n_j})$ 的值也不会改变．

今设以等价类为元素作成新域 $D^*$ (故 $0 < \bar{\bar{D}}^* \leqslant \bar{\bar{D}}$[1])；并定义 $D^*$ 的新客体 $z^*_1, \cdots, z^*_q$ 以及在 $D^*$ 上的逻辑函数 $Q^*, P^*_1, \cdots, P^*_s$ 如下：$z^*_j$ 乃 $z_j$ 所属的等价类，即 $z^*_j = \hat{b}Q(z_j, b)$；$Q^*(a^*, b^*)$ 及 $P^*_j(a^*_1, \cdots, a^*_{n_j})$ 所取的值乃当 $a \in a^*$, $b \in b^*$, $a_1 \in a^*_1, \cdots, a_{n_j} \in a^*_{n_j}$ 时 $Q(a, b)$ 及 $P_j(a_1, \cdots, a_{n_j})$ 分别所取的值．这时，任一公式只要在 $D$ 内被 $z_1, \cdots, z_q, Q, P_1, \cdots, P_s$ 满足，那末它在 $D^*$ 内亦被 $z^*_1, \cdots, z^*_q, Q^*, P^*_1, \cdots, P^*_s$ 所满足；在特例，在 $D^*$ 内 $F^Q$ 被它们满足．但 $Q^*(a^*, b^*) \equiv a^* = b^*$. 故 $z^*_1, \cdots, z^*_q, P^*_1, \cdots, P^*_s$ 在 $D^*$ 内满足 F.

**定理 40**$^{\circ C}$ (＝定理 38*)　设在 $F_0, F_1, F_2, \cdots$ 中出现了谓词字母 $P_0, P_1, P_2, \cdots$，其中之一，设为 $P_0$，为二元谓词字母．如果 $F_0, F_1, F_2, \cdots$ 的枚举是能行的(当无穷时)，那末对定理 37* 言可找得区域 $D^*$ 及联立满足谓词 $P^*_0, P^*_1, P^*_2, \cdots$ 使具有下性质．设 $D^*$ 为无穷的，而当 $s_0, s_1, s_2, \cdots$ 为它的一个适当的枚举时有

$$P^*_0(s_a, s_b) \equiv a' = b,$$

则有

$$\begin{aligned} P^*_j(s_{a_1}, \cdots, s_{a_{n_j}}) &\equiv (Ex)(y)R^*_j(a_1, \cdots, a_{n_j}, x, y) \\ &\equiv (x)(Ey)S^*_j(a_1, \cdots, a_{n_j}, x, y), \end{aligned}$$

而 $R^*_j$ 与 $S^*_j$ 是原始递归的 ($j = 1, 2, 3, \cdots$).

**证明**　由定理 38 可知，公式 $F^Q_k$&$Eq(Q, P_{k_1}, \cdots, P_{k_{s_k}})$($k = 0$,

---

1) 依谢尔平斯基，这个结论须根据选择公理，见谢尔平斯基 (W. Sierpinski) [1928] (Les nombres transfinis)——译者注.

$1, 2, \cdots$)的联立满足谓词 $Q, P_0, P_j$ 可选得，使可表成§ 57 定理 V 中的两种 2 量词形式，因此依§ 58 定理 XI 它们是一般递归于 1 量词谓词的.

根据引理 24 证明中谓词 $P_j^*$ 的定义，我们有

(1) $P_j^*(s_{a_1}, \cdots, s_{a_{n_j}}) \equiv (Ec_1)\cdots(Ec_{n_j})[c_1 \in s_{a_1} \& \cdots \& c_{n_j} \in s_{a_{n_j}} \& P_j(c_1, \cdots, c_{n_j})] \equiv (c_1)\cdots(c_{n_j})[c_1 \in s_{a_1} \& \cdots \& c_{n_j} \in s_{a_{n_j}} \to P_j(c_1, \cdots, c_{n_j})]$.

设 $z$ 为 $s_0$（它是非空的）的一元素；则 $s_0 = \hat{c}Q(z, c)$. 根据 $P_0^*$ 的定义，可知 $P_0(d, c)$的成立当且仅当 $P_0^*(d^*, c^*)$成立时，这里 $d^*$, $c^*$ 是 $d$, $c$ 分别所属的等价类. 但由假设，$P_0^*(s_a, s_b) \equiv a' = b$. 故如果 $d \in s_a$ 则当且仅当 $P_0(d, c)$ 时有 $c \in s_{a'}$. 因为任何 $s_a$ 都非空的，故 $(a)(Ed)[d \in s_a]$. 故

$$
(2) \begin{cases} c \in s_0 \equiv Q(z, c) \\ c \in s_{a'} \equiv (Ed)[d \in s_a \& P_0(d, c)] \equiv (d)[d \in s_a \to P_0(d, c)]. \end{cases}
$$

应用§ 57 定理 VI* 或§ 58 定理 XI* 于第二行，这便表明谓词 $c \in s_a$ 是一般递归于 $Q$ 及 $P_0$ 的. 更详细些说：我们是把(2)的第二行看作是呈下形的公式：

$$H(c) \equiv (Ed)[K(d) \& P_0(d, c)] \equiv (d)[K(d) \to P_0(d, c)].$$

设 q, k, p, h, f 为分别表示 $Q, K, P_0, H, c \in s_a$ 的代表函数的谓词字母. 由定理 VI* 或定理 XI* 可知，$H(c)$是(一致地)一般递归于 $K(d)$, $P_0(d, c)$ 的，即有一方程系(含有 k, p, h 的)递归地由 $K(d)$, $P_0(d, c)$(的代表函数)而定义 $H(c)$(的代表函数). 根据§ 65 引理 VI，我们可引入一参数从而得到一方程系 E，它递归地由 $K(d, a)$, $P_0(d, c)$ 而定义 $H(c, a)$. E 再加上三个方程

$$\mathrm{f}(\mathrm{c}, 0) = \mathrm{q}(\mathrm{z}, c),\ \mathrm{k}(\mathrm{d}, \mathrm{a}) = \mathrm{f}(\mathrm{d}, \mathrm{a}),$$
$$\mathrm{f}(\mathrm{c}, \mathrm{a}') = \mathrm{h}(\mathrm{c}, \mathrm{a}),$$

便递归地由 $Q, P_0$ 而定义 $c \in s_a$，这可由就 $a$ 作归纳而看出.

又因 $Q, P_0$ 本身是一般递归于 1 量词谓词的，故 $c \in s_a$ 亦然；故由定理 XI，$c \in s_a$ 可表示两种 2 量词形式.

若对(1)的中间的表达式中的 $c \in s_a$ 及 $P_j(c_1, \cdots, c_{n_j})$ 采用

$(Ex)(y)$形式，再把量词移前（用§ 35*91 及*87 的非形式意义），缩短（§ 57(17)），我们便对 $P_j^*(s_{a_1},\cdots,s_{a_{n_j}})$ 而得到 $(Ex)(y)$ 形式了．同样地，如果(1)的右边表达式中的 $P_j(c_1,\cdots,c_{n_j})$ 用 $(x)(Ey)$形式（并用 *91，*96，*95*，*87，*98，*97(17)，(18))，我们对它便得到$(x)(Ey)$ 形式了．

我们现在再讨论具相等性的应用谓词演算，在其中关于项与公式的构成除使用谓词演算的逻辑符号体系外，还用到一些个体符号 $\mathrm{I}_1,\cdots,\mathrm{I}_q$，函数符号 $\mathrm{f}_1,\cdots,\mathrm{f}_r$ 及谓词符号＝，$\mathrm{P}_1,\cdots,\mathrm{P}_s$（但不用谓词字母）．项及公式的数论式定义（§ 17）便是一例（这时 $q=1$，$r=3$，$s=0$）． 虽则函数符号及谓词符号通常都是具有 $n\geqslant 1$ 个变目的，但我们亦可容许 $n\geqslant 0$ 使得个体符号可以包括于函数符号之内，而命题符号可以包括于谓词符号之内．当把项 $s$ 及 $t$ 放到二元函数符号 f 的变目处时，所作成的项我们写为“f(s，t)”，即使在所给的系统内，这种符号的结合可能有别种写法，例如“f”可为＋而“f(s，t)”可为 s ＋ t．

具相等性的谓词演算在希尔柏特-伯尔奈斯[1934]，第 164 页以后，有详细的处理．

我们将看见（定理 41(b)），在具相等性的应用谓词演算中，公理模式 23 可换以有限个特殊形公理而不致影响到可证性及可推演性这些观念．这个观点已经用来建立数论系统而无需提到公理模式 23；在这情形，用以代替模式 23 的那些特殊公理，除公理 16，17 外均不必作为公设，因为它们都可由其它数论公理推演出来的缘故．

(C) 就应用演算言，在(A)项中可把“谓词字母”改为“＝以外的谓词符号”． 关于 $n$ 元函数符号 f 的开相等性公理是指下列的 $n$ 个公式：$\mathrm{a}=\mathrm{b}\supset \mathrm{f}(\mathrm{a}_1,\cdots,\mathrm{a}_{i-1},\mathrm{a},\mathrm{a}_{i+1},\cdots,\mathrm{a}_n)=\mathrm{f}(\mathrm{a}_1,\cdots,\mathrm{a}_{i-1},\mathrm{b},\mathrm{a}_{i+1},\cdots \mathrm{a}_n)$ $(i=1,\cdots,n)$．在谓词演算中这些可由公理 22 及根据公理模式 23 的公理而推演出；例如（当 $n=2$ 时），

$$a=\mathrm{b}\supset \mathrm{f}(\mathrm{a},\mathrm{c})=\mathrm{f}(\mathrm{b},\mathrm{c})$$

可如下推演得，由公理模式 23 可得下公理 $\mathrm{a}=\mathrm{b}\supset(\mathrm{f}(\mathrm{a},\mathrm{c})=\mathrm{f}(\mathrm{a},$

$c) \supset f(a, c) = f(b, c))$. 由公理 22 作代入得 $f(a, c) = f(a, c)$，再由 *3 及⊃消便得 $a = b \supset f(a, c) = f(b, c)$ 了. 除却关于=的以外，关于其它符号的开相等性公理便是以前我们叫做特殊可替换性的(参见§38定理23). 我们用"$Eq(=, P_1, \cdots, P_s, f_1, \cdots, f_r)$"表示关于=，$P_1, \cdots, P_s, f_1, \cdots, f_r$ 的闭相等性公理的合取式.

(D) 给出关于=，$P_1, \cdots, P_s, f_1, \cdots, f_r$ 的相等性公理后，我们可用 (B) 的结果以及以前的证明方法来得出在下列情形之下的定理 24 及其系：除=，$P_1, \cdots, P_s, f_1, \cdots, f_r$ 外，被替换的部分 $r$ 不在任何谓词符号、谓词字母[1]或函数符号的辖域内.

(E) 在任何系统内，只要在刚才所述的限制下定理 24 成立，则根据公理模式 23 所得的公理只要它只含有谓词符号或字母[1] =，$P_1, \cdots, P_s$ 及函数符号 $f_1, \cdots, f_r$，则它便是可证的. 因为在对模式所作的条件下，若用定理 24 而把 a 在 A(a) 中的每次出现都换为 b、a 是由于 A(x) 中对 x 作代入而出现的)，这时我们便得 $a = b \vdash A(a) \sim A(b)$，而没有变元是变化的. 故由 *17a 及⊃引便得 $\vdash a = b \supset (A(a) \sim A(b))$.

**定理 41** (a) 在具相等性的应用谓词演算中，相等关系的自反性(*100)，对称性(*101)，可传性(*102)及可替换性(定理 24 及系)是成立的.

(b) 如果一个具相等性的应用谓词演算以=，$P_1, \cdots, P_s, f_1, \cdots, f_r$ 作为它的谓词符号及函数符号，则在其中我们有 $\Gamma \vdash E$ 当且仅当在谓词演算中我们有 $\Gamma, Eq(=, P_1, \cdots, P_s, f_1, \cdots, f_r) \vdash E$.

(c) 在具相等性的纯谓词演算中我们有 $\Gamma \vdash E$(这里 $\Gamma$, E 是由 =，$P_1, \cdots, P_s$ 组成的字母公式)当且仅当在谓词演算中我们有 $\Gamma, Eq(=, P_1, \cdots, P_s) \vdash E$.

**证明** (a) 由 (A)－(D).

---

1) 在具相等性的应用谓词演算中提到谓词字母似是疏忽——俄译注. (中译者按，此处未必指"应用谓词演算"，因为凡指应用谓词演算时，著者都处处标明"应用"字样的.)

(b) 由(A) − (E).

(c) 仿上，但须首先排除下列的可能性，即 $\Gamma \vdash E$ 这个推演所要求的根据公理模式 23 而得的公理，其中所含的谓词字母除 $P_1, \cdots, P_s$ 外还有 $P_{s+1}, \cdots, P_{s+t}$. 推演 $\Gamma \vdash E$ 可作为在谓词演算中由 $\Gamma, \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ 及根据公理模式 23 而得的公理出发，到 E 的推演. 根据§ 34 附注 1 的方法，我们可以得到一个由 $\Gamma, \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ 及根据公理模式 23 所得的公理出发，到 E 的推演，而最后一组公理内还只含有谓词字母 $P_1, \cdots, P_s$.

**例 2** 作为§ 60 论点 II 之逆的第五个例子，试设 $R(x, y)$ 为原始递归的(参见§ 60 例 1)，并命 $R$ 的代表函数为 $\varphi$ 而 $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ 为 $\varphi(=\varphi_k)$ 的一个原始递归描述. 设 $f_1, \cdots, f_k$ 为不同的函数符号(用以分别表示 $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$). 设 $S$ 的项及公式如下组成，用谓词演算的逻辑符号体系由个体符号 0，函数符号 $'$，$f_1, \cdots, f_k$ 及谓词符号 $=$ 而组成. 设 $S$ 的公设如下：谓词演算的公设，下列的方程作为特殊公理，即把描述 $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ 中的模式应用翻译而得的方程(例如，把§ 44 例 1 翻译便得§ 54 例3，这时 $l = 0$)，此外还有关于 $=$，$'$，$f_1, \cdots, f_k$ 的开相等性公理. 设 $A(\mathbf{x})$ 为公式 $\exists y\, f_k(\mathbf{x}, y) = 0$. 这时§ 54 的代入规则 R1 在 $S$ 中可以作为一导出规则而成立(由§ 23)，替换规则 R2 亦然(由定理 41(a) 及 (b)). 故如果有 $y$ 使 $R(x, y)$ 是真的，即使得 $\varphi_k(x, y) = 0$，则 $f_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ 在 $S$ 内必可证，由 $\exists$ 引，$A(\mathbf{x})$ 亦可证. 反之，$A(\mathbf{x})$ 在 $S$ 内可证只当 $(Ey)R(x, y)$ 成立时，这可由§ 79 定理 52 而知之.

## *§ 74. 摹状定义的可消除性

在数学理论的非形式发展的各阶段中，概念与记号经常有所增加. 如果对该发展加以形式化，则在相应的阶段中必须加入新形成规则及新公设，以扩张所给形式系统 $S_1$ 以得系统 $S_2$. 因此，$S_1$ 的公式(可证公式)集便是 $S_2$ 的子集. 新形成规则引入新的符号或记号，而新公设则供它们推理之用. 我们将以“$\vdash_1$”(“$\vdash_2$”)表

示在 $S_1(S_2)$ 内的可推演性关系.

在这情况之下,我们说,新记号或符号(及它们的公设)是可消除的(从 $S_2$ 消除于 $S_1$ 中),如果可找出一个能行过程使得任给 $S_2$ 中一公式E都可找出 $S_1$ 中一公式E′使得[1)]

(I) 如E为 $S_1$ 的公式则E′为E.

(II) $\vdash_2$ E~E′.

(III) 如果 $\Gamma\vdash_2$E 则 $\Gamma'\vdash_1$E′.

这里,当 $\Gamma$ 为 $D_1,\cdots,D_l$ 时 $\Gamma'$ 为 $D_1',\cdots,D_l'$. 我们把(I)—(III)叫做消除关系式.(在例13中,我们对"可消除性"的表述作了微小的修整.)

当消除关系式成立时,我们还有

(IV) $\Gamma\vdash_2$E 当且仅当 $\Gamma\vdash_1$E′.

(V) 如果 $\Gamma$,E为 $S_1$ 的公式,则 $\Gamma\vdash_2$E 当且仅当 $\Gamma\vdash_1$E.

**证明** (IV)中与(III)相逆的部分: 如果 $\Gamma'\vdash_1$E′ 当然更有 $\Gamma'\vdash_2$E′,故由(II)得 $\Gamma\vdash_2$E.

(V). 由(I)与(III)或(I)与(IV)而得.

因此,如对 $S_1$ 作一个可消除的扩张而得 $S_2$,那是无关重要的,因为由(V),原来公式中而为可证的那些公式集并没有增大,而由(II),在扩张系统中任何新公式都和原有公式之一相等价.

**例 1** 显式定义的可消除性. 在研究我们的形式系统时,我们把~,1,<,∃!x,$x^2$,等等简单地当作在元数学叙述中的一种缩写(参见§17). 但我们亦可以看作是把它们逐次地加到形式符号体系去的. 这时每次我们都应加入一个新形成规则(分别为: 如果A,B为公式,则A~B亦然; 1为一项; 如果s,t为项,则s<t为公式;如果x为一变元,A(x)为一公式,则∃!xA(x)为一公式; 如果s为项则 $s^2$ 为项),以及相应的定义公理或定义公理模式(分别为: {(A~B)⊃(A⊃B)&(B⊃A)}&{(A⊃B)&(B⊃A)⊃(A~B)}, $1=0'$, $a<b\sim\exists c(c'+a=b)$, ∃!xA(x)~∃x[A(x)

1) 这里的"′"与后继运算毫无关系——译者注.

$\&\forall y(A(y)\supset x=y)]$，$\alpha^2=\alpha\cdot\alpha$，这里，对 A，B，x，A(x)，y 须加适当的限制条件）．如果把以前的复原运算看作是 ↗ 运算（按，本节新定义的 ↗ 运算，并非后继运算——译者），则这些新增加的东西是可以消除的．一般地说，在下列情况下（我们简短地叙述）都是这样的．定义公理或模式是一个等价式（或一等式）．而 $S_1$ 是谓词演算（具相等性的谓词演算）可能补入一些特殊公理及公理模式．§33 定理 14（§38 定理 24(b)）可用以证明(II)．§33 末关于"永久缩写"的两个约定将被应用；当证明(III)时用第一个约定以处理规则 9 及 12 的情形，第二个约定则用以证明公理模式 10 及 11，还须补充一约定使得对每个 E 而言，可以固定 E′ 该用什么约束变元．对每个新加的公理模式，若根据它而能够得到 $S_2$ 内的公理 A，则 A′ 必须在 $S_1$ 内可证．

**例 2** 设 $S_2$ 为我们的古典谓词演算再加入§24 引理 11 的公理模式 9a，根据§35*95，可知在 $S_2$ 内它是冗余的．（一个或多个公理或公理模式叫做在一形式系统 $S$ 内是冗余的，如果把这些公理或公理模式删去不作为公设后，这些公理全部可证．）设在 $S_2$ 中把 &，∨，∃ 及它们的公设全部删除后余下的为 $S_1$．这样，当把根据§27*60，*61 及§35*83 中关于 &，∨，∃ 的等价式而作的替换看作是 ↗ 运算的，则消除关系式是成立的．（在证明(III)而要处理公理模式 6 的情形，可假设 $A\supset C$，$B\supset C$，$\neg A\supset B$ 及 $\neg C$，并借助于*12 而推出 B 及 ¬B．然后用¬引¬消及⊃引．）

**例 3** 在我们的数论系统中，$\vdash\neg A\sim A\supset 1=0$．这便使得 ¬ 可以消除，只要把（冗余的）公设 8′（或 8 I′）及 15′ 先加入便成，这里 8′ 是 $((A\supset 1=0)\supset 1=0)\supset A$，等等．（但 1b 包括了 7′．）

消除定理可以看作是在原来系统 $S_1$ 的研究中一种新的导出规则（§20）．当我们的目的是想证明一公式 E 在 $S_1$ 内的可证性时，它可使我们在一适当的系统 $S_2$ 内而证明 E，后者比之 $S_1$ 是具有更多的手段的．同时，根据消除定理，任何一个在 $S_2$ 内可证而本身不在 $S_1$ 内的公式 E 都可以看作是 $S_1$ 内一个可证公式 E′ 的缩写．

消除定理还有两条系理，即 $S_2$ 的简单相容性可由 $S_1$ 的推出（由（V），参见§ 28），而 $S_2$ 的判定问题亦可化归于 $S_1$ 的（由(IV)，参见§ 30，§ 61 末）。

**例 4** 的递归定义的不可消除性． 函数符号 · 及其递归方程（公理 20 及 21）在第四章的形式系统（叫做 $S_2$）内是不可消除的．因为根据普列斯堡格的结果（§ 42 开首处）可知，余下的系统 $S_1$ 是简单相容的并且它的判定问题是可解决的．如果 · 是可消除的，则对 $S_2$ 亦将如此，这与§ 61 定理 33 相矛盾．

摹状定义的可消除性． 摹状定义是指把一客体 $f$ 定义为使得 $F(w)$ 成立的 $w$（符号上便是 $\iota wF(w)$），这里 $F$ 是一谓词，并已知有唯一的 $w$ 使得 $F(w)$ 成立（符号上便是 $(E!w)F(w)$）．如果 $w$ 便是 $F$ 的唯一的自变元，则 $\iota wF(w)$）便是个体 $f$．如果 $F$ 还依赖于其它 $n$ 个个体变元，设写为“$F(x_1,\cdots,x_n,w)$”，则 $\iota wF(x_1,\cdots,x_n,w)$便是一函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$．我们将把个体看作 0 元函数因而把前者包括于后者之内（因此，在本节内，‘函数符号’包括有‘个体符号’）．

摹状定义的逻辑由怀特黑与罗素（Whitehead and Russell）[1910]（第二版 1925，第 30—32 页，第 66—71 页，第 173—186 页）而处理．

摹状定义的可消除性由希尔柏特-伯尔奈斯[1934]（第 422—457 页）所建立．另一证明由罗歇 [1939] 所指出．这些证明都指出了形式运算子 $\iota w$ 的可消除性，只要在形式体系内容许了这个运算子，那末摹状定义的一切可能性便立刻得到了．但在记号上说，引用函数符号却更方便．在发展一理论时，每当需要之处，数学家通常都依次引入新函数符号．因此，我们将建立这样引入的函数符号的可消除性．我们只须考虑每次引入一新函数符号便够了．

**定理 42** 设 $S_1$ 含有具相等性应用谓词演算的形成规则（§ 73），并设 $S_1$ 的公设除谓词演算的以外还有一些特殊公理及公理模式，使得关于 $S_1$ 的函数符号及谓词符号的相等性公理是可证的（或简单地令 $S_1$ 为具相等性的应用谓词演算，可能新增一些特

等公理及公理模式)。

设 $x_1, \cdots, x_n, w (n \geqslant 0)$ 为不同的变元，而 $F(x_1, \cdots, x_n, w)$ 为一公式，只含有自由 $x_1, \cdots, x_n, w$，并且 $x_1, \cdots, x_n$ 对 F 的 w 是自由的。假设

(i) $$\exists ! wF(x_1, \cdots, x_n, w)$$

在 $S_1$ 内是可证的。

设在 $S_1$ 内加入一新 $n$ 元函数符号 f 及一新公理

(ii) $$F(x_1, \cdots, x_n, f(x_1, \cdots, x_n)),$$

所得的系统为 $S_2$。

则新函数符号 f 及它的公理是可消除的，即有一个能行的对应 $\prime$ (在下证明中将加以明指)使得(I)—(III)(因而(IV)及(V))成立，只要每一个新增的公理模式都有下性质：如果根据该模式而在 $S_2$ 内得一公理 E，则 E′ 在 $S_1$ 内是可证的。

证明可由引理 25—31 而得。根据定理 41(b)，当我们知道关于函数符号与谓词符号的相等性公理是可证的时候，那末到底是讨论谓词演算抑讨论具相等性的谓词演算，便是无关重要的了。因为，由它，一开始便对 $S_1$ 是无关重要的，其次，等到我们知道(引理 27)关于新函数符号 f 的相等性公理在 $S_2$ 内是可证的以后，对 $S_2$ 也是无关重要的了。

**引理 25** 在具相等性的谓词演算中，如果 u, v, x 为不同的变元，F(v), C(v), C(u, v), A, B, A(v), B(v)及 A(u, v)为公式，u 对 F(v)及 C(u, v) 中的 v 是自由的，A 与 B 不含自由 v，F(v)不含自由 u 或 x[1]，则：

*181. $\exists ! vF(v) \vdash \exists v[F(v) \& C(v)] \sim \forall v[F(v) \supset C(v)]$.

*182. $\exists ! vF(v), C(v) \vdash^{v} \exists v[F(v) \& C(v)]$.

*183. $\exists ! vF(v) \vdash \exists u[F(u) \& C(u, u)] \sim \exists u[F(u) \& \exists v [F(v) \& C(u, v)]]$.

*184. $\exists ! vF(v) \vdash \exists v[F(v) \& (A \supset B(v))] \sim A \supset \exists v[F(v) \& B(v)]$.

---

1) 俄译本补入“F(u) 不含自由 v”以使得* 183 成立——译者注。

*185. $\exists! vF(v) \vdash \exists v[F(v)\&(A(v)\supset B)] \sim \exists v[F(v)\&A(v)]\supset B$.

*186. $\vdash \exists v[F(v)\&A\&B(v)] \sim A\&\exists v[F(v)\&B(v)]$.

*187. $\exists! vF(v) \vdash \exists v[F(v)\&(A \vee B(v))] \sim A \vee \exists v[F(v) \vee B(v)]$.

*188. $\exists! vF(v) \vdash \exists v[F(v)\&\neg A(v)] \sim \neg\exists v[F(v)\&A(v)]$.

*189. $\exists! vF(v) \vdash \exists v[F(v)\&\forall xA(x, v)] \sim \forall x\exists v[F(v)\&A(x, v)]$.

*190. $\perp \exists v[F(v)\&\exists xA(x, v)] \sim \exists x\exists v[F(v)\&A(x,v)]$.

(参见纳尔孙 [1947] 引理 23,第 347—348 页.)

**证明** *181. 设 $\exists! vF(v)$, $F(v)\&C(v)$ (为 ∃ 消起见)及 $F(t)$, 而 t 为一新变元 (为⊃引起见). 再用§ 41*172 有 $v = t$; 作替换得 $C(t)$. 由⊃引及 ∀ 引, 更改约束变元可得 $\forall v[F(v)\supset C(v)]$. ∀ 引的变元为 t, 故任何变元都保持固定,由 ∃ 消及⊃引得

$$\exists v[F(v)\&C(v)]\supset\forall v[F(v)\supset C(v)].$$

今再证其逆理, 假设 $\exists! vF(v)$ 及 $\forall v[F(v)\supset C(v)]$, 由 $\exists! vF(v)$可得 $\exists vF(v)$. 为 ∃ 消起见,假设 $F(v)$.

*183. $\exists u[F(u)\&C(u, u)] \vdash \exists u[F(u)\&F(u)\&C(u, u)]$ (§27*37)[1] $\vdash \exists u\exists v[F(u)\&F(v)\&C(u, v)]$ (§ 35*80) $\vdash \exists u[F(u)\&\exists v[F(v)\&C(u, v)]]$ (*91)[2]. 仿此,其逆理可根据*79,借助于 *181, § 26*4(及§ 32*69),等.

*184. $\exists! F(v) \vdash \exists v[F(v)\&(A\supset B(v))] \sim \forall v[F(v)\supset A\supset B(v))]$(*181) $\sim \forall v[A\supset(F(v)\supset B(v))]$(因由*3 有 $\vdash B\supset(A\supset C) \sim A\supset(B\supset C)$) $\sim A\supset\forall v[F(v)\supset B(v)]$ (*95) $\sim A\supset\exists v[F(v)\&B(v)]$ (*181).

*187. $\exists! vF(v) \vdash \exists vF(v) \vdash \exists v[F(v)\&(A \vee B(v))] \sim \exists v[(F(v)\&A) \vee (F(v)\&B(v))]$(*35) $\sim (A\&\exists vF(v)) \vee \exists v[F(v)\&B(v)]$ (*88, *91及*33) $\sim A \vee \exists v[F(v)\&B(v)]$(*45).

*188. 依次用 *181, *58b, *86.

**引理 26** 在下列的谓词演算: (在具相等性的谓词演算中更

---

1) 在 § 26 倒数第二段处本来规定把说明写人方括号去的,但为了避免过多的方括号起见,此处著者容许一些例外而改用圆括号——俄译注.

2) 依俄译本须加入"依条件 F(u) 不含自由v"——译者注.

如此）它只具有关于 $S_1$ 的函数符号及谓词符号的相等性公理且容许 f 于其符号体系中，我们有：(i) 与 (ii) 的合取式是与 (iii) 彼此互相推演出的

(iii) $$f(x_1, \cdots, x_n) = w \sim F(x_1, \cdots, x_n, w),$$

故 (iii) 在 $S_2$ 内是可证的.

**证明** 由 (ii) 及 $f(x_1, \cdots, x_n) = w$，相等关系的可替换性，便可推出 $F(x_1, \cdots, x_n, w)$，而由§ 73 (D)，该替换性可由谓词演算及关于＝的及关于 $F(x_1, \cdots, x_n, w)$ 的函数符号及谓词符号的相等性公理而推出. 又由 (i) (ii) 根据 *172 可由 $F(x_1, \cdots, x_n, w)$ 推演出 $f(x_1, \cdots, x_n) = w$. （这样由 (i) (ii) 合取式可推演出 (iii)——译者.）由 (iii) 借助于 *171 可推演出 (i)，若把 (iii) 中的 w 代入以 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 再由§ 73 公理 22 可推演出 (ii). （这样由 (iii) 可推演 (i) (ii) 的合取式——译者.）

在定理 42 的证明的其余部分里，我们使用"$F(x_1, \cdots, x_n, w)$"时，采用对永久缩写所作的约定（参考§ 33 末），即对任何项 $t_1, \cdots, t_n$, s 言，"$F(t_1, \cdots, t_n, s)$"将表示在 $F(x_1, \cdots, x_n, w)$ 中把 $x_1, \cdots, x_n$, w 分别代入以 $t_1, \cdots, t_n$, s 的结果，但对 $F(x_1, \cdots, x_n, w)$ 中的约束变元可作任何合法的更改以使得该代入是自由的.

**引理 27** 在引理 26 的系统内，关于 f 的相等性公理可由 (iii) 推出，故它们在 $S_2$ 内是可证的.

如果不是可证的，则只把 (ii) 加到 $S_1$ 的公理去后，f 在 $S_2$ 内的用处仍不大（参见定理 41(a) 及 (b)）.

**证明** 例如，设 $n = 2$（并把 $x_1, x_2$ 写成 a, c）. 我们可用下法证明 $a = b \supset f(a, c) = f(b, c)$. 设 $a = b$. 作替换得 $F(a, c, f(b, c)) \sim F(b, c, f(b, c))$，故由 (iii) 得 $f(a, c) = f(b, c) \sim f(b, c) = f(b, c)$；故得（公理 22 及 *18b）$f(a, c) = f(b, c)$.

**引理 28** 设 $t_1, \cdots, t_n$ 为项，v 为一变元不出现于 $t_1, \cdots, t_n$ 中，而 C(v) 为一公式使得 $f(t_1, \cdots, t_n)$ 对 C(v) 的 v 是自由的，则在具相等性的谓词演算中，$C(f(t_1, \cdots, t_n)) \sim \exists v[F(t_1, \cdots, t_n, v) \& C(v)]$ 可由 (iii) 推演出，因而在 $S_2$ 中可证.

**证明** 设有 $C(f(t_1,\cdots,t_n))$. 对 (ii) 作代入(参见引理 26) 得，$F(t_1,\cdots,t_n,f(t_1,\cdots,t_n))$. 再用 & 引，∃ 引及 ⊃ 引便得. 今再证其逆. 设(为 ∃ 消起见) $F(t_1,\cdots,t_n,v)\&C(v)$. 用 (iii) 可得 $f(t_1,\cdots,t_n)=v$. 在 $C(v)$ 中作代入得 $C(f(t_1,\cdots,t_n))$.

素公式是指不含逻辑符号的公式，在这里它便是一个谓词符号而以项作变目的. $S_1$ 中的项或公式，即不含 f 的公式，叫做缺 f 的. 如 $t_1,\cdots,t_n$ 为项，则呈 $f(t_1,\cdots,t_n)$ 形的项叫做 f 项；如果 $t_1,\cdots,t_n$ 为缺 f 的，它便叫做简单 f 项. 一项在一公式中的某个出现叫做约束的(自由的)，如果它在某一（不在任何）量词 ∀y 或 ∃y 的辖域之下，而 y 为该项的一变元.

**例 5** 设 P，Q 为谓词符号，g 为一函数符号而与 f 不同，x 与 y 为不同的变元. 在下列公式中，f 项的第二次出现是约束的，其余六次出现是自由的.

1. $\forall x\{P(f(y),f(g(x)))\&Q(x,x)\}\supset P(f(y),f(g(f(y))))$
$\&Q(f(y),f(y))$.

f 项 $f(y)$ 及 $f(g(x))$ 是简单的，而 $f(g(f(y)))$ 则否，因为其中套有 f 项 $f(y)$.

**引理 29** 对 $S_2$ 的每个公式 E 都可以能行地对应于 $S_1$ 的一公式 E′（叫做 E 的主要缺 f 变换式）使得 (I)(II) 成立，在变换中不引进或除去自由变元，并且保持谓词演算的运算，即有：$(A\supset B)'$ 为 $A'\supset B'$，$(A\&B)'$ 为 $A'\&B'$，$(A\vee B)'$ 为 $A'\vee B'$，$(\neg A)'$ 为 $\neg A'$，$(\forall xA(x))'$ 为 $\forall xA'(x)$（这里 $A'(x)$ 为 $(A(x))'$），又 $(\exists xA(x))'$ 为 $\exists xA'(x)$.

**证明** 由于须保持运算这个条件，我们可就 E 中逻辑符号出现的个数 $g$ 而作递归，从而递归地定义 E′，但还须把 E 为素公式时的定义给出作为奠基. 后者我们又可就 E 中 f 项的出现次数 $q$ 而作归纳. 其法如下.

如果 $g=q=0$，则 E′ 为 E.

如果 $g=0$ 而 $q>0$，选择 E 中首先出现的简单 f 项，设它为 $f(t_1,\cdots,t_n)$. 设 v 为一变元不出现于 E 中. 设把 E 中所考虑的

出现 $f(t_1,\cdots,t_n)$ 改为 v 后所得的公式写成 $C'(v)$. 则 $E'$ 便是 $\exists v[F(t_1,\cdots,t_n,v)\&C'(v)]$. (由 *181 我们亦可用 $\forall v[F(t_1,\cdots,t_n,v)\supset C'(v)]$.) 这里关于约束变元 v 的选择不是唯一的, 为了使得 $t_1,\cdots,t_n$, v 对 $x_1,\cdots,x_n$, w 的代入是自由的, 须对 $F(x_1,\cdots,x_n,w)$ 的约束变元有所更改, 其更改的方式亦不是唯一的. 但不同的合法的选择都得出相合的公式(§ 33). 我们可以假定, 补充了一些约定使得可以确定那一个是 $E'$. 在我们的例子中,用 $E'$ 的任一相合式都是可以的. 注意, $C(v)$ 是素的并且恰巧只含 $q-1$ 个 f 项的出现.

引理中所提到的 ↗ 的性质可由对 $g$ 作归纳 (对 (II) 用§ 33 定理 14) 而证得,而在奠基中再对 $q$ 作归纳 (用引理 28).

我们用一个很富于暗示性的缩写即 "$F_v^{t_1,\cdots,t_n}C(v)$" 以代

$$\exists v[F(t_1,\cdots,t_n,v)\&C(v)].$$

**例 5** (续) 公式 1 可以照下法化归成为它的一个主要缺 f 变换式.

2. $\forall x\{F_{v_2}^{y}P(v_2,f(g(x)))\&Q(x,x)\}\supset F_{v_2}^{y}P(v_2,f(g(f(y))))$
$\&F_{v_{12}}^{y}Q(v_{12},f(y))$.

3. $\forall x\{F_{v_2}^{y}F_{v_3}^{g(x)}P(v_2,v_3)\&Q(x,x)\}\supset F_{v_2}^{y}F_{v_{11}}^{y}P(v_2,f(g(v_{11})))$
$\&F_{v_{12}}^{y}F_{v_{13}}^{y}Q(v_{12},v_{13})$.

4. $\forall x\{F_{v_2}^{y}F_{v_3}^{g(x)}P(v_2,v_3)\&Q(x,x)\}\supset F_{v_2}^{y}F_{v_{11}}^{y}F_{v_3}^{g(v_{11})}P(v_2,v_3)$
$\&F_{v_{12}}^{y}F_{v_{13}}^{y}Q(v_{12},v_{13})$.

设把首标 $F_v^{t_1,\cdots,t_n}$ 叫做"F 量词". 由*184—*190 可知(因(i)已给出假定公式 $\exists!vF(v)$),在 $S_1$ 中 F 量词可与谓词演算的运算子交换亦可以彼此互换(必要时可更改约束变元),但须受下列限制,即 $F_v^{t_1,\cdots,t_n}$ 不能移到由 $t_1,\cdots,t_n$ 中任一变元所组成的普通量词或 F 量词之左(因为对*189 及*190 言, $F(v)$ 必须不含自由x). 关于两个 F 量词之间的限制是说: 消除相套的两 f 项以后所得的两个 F 量词必须保持原来的相对次序 (相应于里面的 f 项的量词须在左). 关于 F 量词与普通量词之间的限制是说, 消除约束出现的 f 项后所得的 F 量词只能在管辖该出现的最右的普通量词以右移

动.

又由 *183，相邻的类似的 F 量词如 $F_u^{t_1,\cdots,t_n}$ 及 $F_v^{t_1,\cdots,t_n}$ 可以缩短.

又 *182 可作为 F 量词的引入规则.

**例 5**（续完） 公式 1 是 $S_2$ 中根据公理模式 10 而得的一公理 $\forall x A(x) \supset A(t)$，但 t 代以 f(y)；在化归为公式 4 的过程中，在消除相应的 f 项 A(x) 及 A(t) 时，我们选用同样的约束变元. 根据 *186, *190, *186（及 *33），*184 及*183（更改约束变元），可把由于消除 f(y) 的三次出现（作为模式中的 t）而得的三个 F 量词 $F_{v_{11}}^y$, $F_{v_{12}}^y$, $F_{v_{13}}^y$ 移到最前，并缩短成一个 F 量词 $F_{v_1}^y$. 于是便得下列公式作为公式 4 在 $S_1$ 内的一个等价式，因而亦是公式 1 的主要缺 f 变换式的一个等价式.

5. $F_{v_1}^y[\forall x\{F_{v_2}^y F_{v_3}^{g(x)} P(v_2, v_3) \& Q(x, x)\} \supset F_{v_2}^y F_{v_3}^{g(v_1)} P(v_2, v_3)$
$\& Q(v_1, v_1)]$.

在 5 中 $F_{v_1}^y$ 的辖域是根据公理模式 10 而得的 $S_1$ 的一个公理，以 $v_1$ 为 t. 故由 F 引（*182）规则，公式 5 在 $S_1$ 中可证，故公式 1 的主要缺 f 变换式亦然.

**引理 30** 如果 E 是 $S_2$ 的公理，则 $\vdash_1 E'$.

**证明** 如果 E 是 $S_2$ 中根据命题演算的公理模式而得的公理，则 E′ 是 $S_1$ 中根据同一模式而得的公理，因 ′ 保持该演算的运算子之故（引理 29).

公理模式 10：E 为 $\forall x A(x) \supset A(t)$，而 t 对 A(x) 中的 x 是自由的.

情形 1：t 是缺 f 的. 则在对 A(x) 及 A(t) 作化归时在相应的步骤处采用同样的约束变元，我们便得到 E′ 的一个相合式它具 $\forall x B(x) \supset B(t)$ 形而 t 对 B(x) 中的 x 是自由的. 这是根据公理模式 10 而得的 $S_1$ 的公理，t 与前同. 故得$\vdash_1 E'$.

**例 6** 设 E 为

$\forall x\{P(f(y), f(g(x))) \& Q(x, x)\} \supset P(f(y), f(g(t))) \& Q(t, t)$,

而 t 是缺 f 的. 则

$$\forall x\{F^{y}_{v_1}F^{g(x)}_{v_2}P(v_1, v_2)\&Q(x, x)\}\supset F^{y}_{v_1}F^{g(t)}_{v_2}P(v_1, v_2)\&Q(t, t)$$

便相合于E′,并且是$S_1$中根据公理模式10而得的一公理.

情形2：一般情形,设A(x)含有f项的$k$次出现以及x的$l$次自由出现,t含有f项的$m$次出现.(在例5中,$k=2$, $l=3$, $m=1$.)则A(t)中含有：由A(x)而来的$k$次f项出现,因而相应于A(x)的f项,此外还有$lm$次f项的出现,那是因为A(x)中x的每次自由出现都变成t的自由出现(共$l$次),而每个t的自由出现又含有$m$次f项的出现的缘故．当把E化归到E′的相合式时,要消去A(x)及A(t)中的$k$对f项的自由出现,我们可用具有同样约束变元的F量词,而消除A(t)中在t内的$lm$个f项的出现时,我们须选用具有不同约束变元的F量词．例如,设在消除过程中,t的$l$次出现变为$t_1^*, \cdots, t_l^*$(在例子中便是$v_{11}, v_{12}, v_{13}$).在A(t)中凡由A(x)而来的f项的出现(共$k$个)绝不会套入因t代x后而引入的$lm$个f项之中,又因该代入是自由的,故因消除后者而引入的$lm$个F量词可以移到最前并依下次序,即同一f项但由于t有$l$个出现而得的$l$个F量词彼此相邻组成一组,因而每一组都可以缩短．这样我们便得到E′在$S_1$中的一个等价式,它是具下形的公式

(A) $$F^{s_{11},\cdots,s_{1n}}_{v_1}\cdots F^{s_{m1},\cdots,s_{mn}}_{v_m}[\forall xB(x)\supset B(t^*)],$$

这里$t^*$乃由每个$t_1^*, \cdots, t_l^*$把在缩短中的变元看作相同而得的结果,它对B(x)中的x是自由的．今$\forall xB(x)\supset B(t^*)$乃$S$中根据公理模式10而得的公理,故经$m$次应用F引(*182)规则后,(A)可证.

公理(ii)：E为$F(x_1, \cdots, x_n, f(x_1, \cdots, x_n))$．设在$F(x_1, \cdots, x_n, w)$中w自由出现$l$次．则E′含有$l$个F量词．这些F量词都可以移前并缩短而得出$F^{x_1,\cdots,x_n}_{v}F(x_1, \cdots, x_n, v)$,即

$$\exists v\{F(x_1, \cdots, x_n, v)\&F(x_1, \cdots, x_n, v)\},$$

由(i)这是可证的.

**引理 31** 如果在$S_2$中E是F(或F与G)的直接后承,则在$S_1$中E′是F′(或F′与G′)的直接后承.

对规则2，9及12都是由于$'$保持运算子且不引入自由变元(因此，规则9及12中的C不会变成一个含自由x的公式C′).

**附注 1** 如果f不是0或$'$(按指后继函数——译者)，则归纳模式是满足本定理中关于附加公理模式所作的保留条件的，用在公理模式10情形1处所作的推理可以知之.

**例 7** 设$S_1$为第四章的数论系统. 在$S_1$中加入新函数符号rm(表示剩余函数)及其公理(参见§41*179b,c)

$$\exists q(\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\cdot q+\mathrm{rm}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\&\mathrm{rm}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})<\boldsymbol{b})\vee(\boldsymbol{b}=0\&\mathrm{rm}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}).$$

设所得系统为$S_2$，则由定理(及附注1)，rm及它的公理是可消除的.——如再加入商记号$[\boldsymbol{a}/\boldsymbol{b}]$及其公理

$$\exists r[\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}[\boldsymbol{a}/\boldsymbol{b}]+r\&r<\boldsymbol{b})\vee\boldsymbol{b}=[\boldsymbol{a}/\boldsymbol{b}]=0$$

(参见*178b, c)，则经过依次应用本定理后，rm及$[\boldsymbol{a}/\boldsymbol{b}]$均可消除.

**例 8** 设$S_1$为数论形式系统，R(x, y)为一公式只含自由x及y，$R(x, y)$为在释义之下R(x, y)所表示的谓词. (a) 试考虑古典系统$S_1$，并设R满足(A)$\vdash_1\exists y\mathrm{R}(x, y)$. 则应用*149及*174b可引入一函数符号f及其公理 $\mathrm{R}(x, f(x))\&\forall z(z<f(x)\supset\neg\mathrm{R}(x, z))$，使得(至少)在(古典)释义之下，f(x) 表示函数 $\mu yR(x, y)$ (见§57开首处，并设在$S_1$中(A)蕴涵§57(1b)(当$n=1$时))，这函数符号及其公理是可以消除的，即对这样所得的系统$S_2$是成立消除关系的. 若不用*149而用*149a，且除(A)以外还假设

$$(\alpha)\vdash_1\mathrm{R}(x, y)\vee\neg\mathrm{R}(x, y),$$

则这关系即使对直觉主义系统$S_1$亦成立. (b) 试再考虑古典系统$S_1$而不假设(A). 设$\mathrm{R}^{\dagger}(x, w)$为$\mathrm{R}(x, w)\vee\{\neg\exists y\mathrm{R}(x, y)\&w=0\}$，而$\mathrm{R}^{\ddagger}(x,w)$为$\mathrm{R}^{\dagger}(x, w)\&\forall z(z<w\supset\neg\mathrm{R}^{\dagger}(x, z))$. 由*51有

$$\vdash_1\exists y\mathrm{R}(x, y)\vee\neg\exists y\mathrm{R}(x, y).$$

故用穷举法(∨消)可得$\vdash_1\exists w\mathrm{R}^{\dagger}(x, w)$；故由*149及*174b得：(1) $\vdash_1\exists!w\mathrm{R}^{\ddagger}(x, w)$. 因此，如果引一函数符号f及其公理$\mathrm{R}^{\ddagger}(x, f(x))$，它将永是古典地可消除的. 在(古典)释义之下，

f(x)表示 $\varepsilon y R(x, y)$ (见§ 62 首,参见§ 63(59)). 当R使得(α)成立以及(β)$\vdash_1 \exists y R(x, y) \vee \neg \exists y R(x, y)$时,这可消除对直觉主义的$S_1$也成立. 因由(β)可使我们能够不用 *51, 而由(α)、(β)、*158及§ 29 附注 1(b) 可得$\vdash_1 R^{\dagger}(x, w) \vee \neg R^{\dagger}(x, w)$,这样可使我们能够改用 *149a 而不用 *149. (c) 设 $\varphi(x)$ 为任一函数其代表谓词 $\varphi(x) = w$ 是算术的(§ 48). 设 R(x, w) 为表示 $\varphi(x) = w$ 的公式. 则 (b) 中的 f(x)便表示$\varepsilon w[\varphi(x) = w]$ 即 $\varphi(x)$. 因此,在古典数论系统中,就任一函数 $\varphi(x)$言,只要 $\varphi(x) = w$是算术的,都可找出一个只含自由 x, w的公式 F(x, w), 使得在释义之下, F(x, w)之为真恰巧只当 $w = \varphi(x)$时,而表示φ的一个新函数记号 f 及其公理 F(x, f(x)) 是可消除的. 在特例, 对任何一般递归函数$\varphi(x)$,这样的公式F(x,w)是可以找出的(由§57定理 VII(b)); 对好些函数 (在古典释义下),如 $\varepsilon y T_1(x, x, y)$ 等, 它们虽不是一般递归的亦可如此(参见(b)或§ 62 首, § 63 例1). (d)反之,如果形如 F(x, f(x)) 的公理把 f(x) 刻划成一个函数 $\varphi(x)$的表示 (即,对每个 x,在释义之下 F(x, w) 之为真恰巧当 $w = \varphi(x)$ 时),那末 $\varphi(x) = w$ 便是算术的. ——关于直觉主义系统的情形将在 § 82 (例 1 及 2) 中讨论.

在下列两例中, 我们假设§ 49 附注 1 的 (1)—(3) 已经证明了, 或者由于直接地形式化§ 48 而得, 或由希尔柏特-伯尔奈斯 [1934], 第 401—419 页借用而得[1]. 希尔柏特与伯尔奈斯是在另一形式系统中而处理的, 若不管显然的非本质的差异(例如,他们使用谓词变元等,参见§ 37 末), 他们这个系统是在我们的古典数论系统之上加入一运算子(以及适当的公设)而得, 该运算子应用于一公式 R(x, y) 时, 给出一个表示函数 $\varepsilon y R(x, y)$ 的项, 这里 $R(x, y)$ 是 R(x, y) 所表示的谓词. 由例 8(b), 该运算子的每一次使用都是可消除的. 把这过程用于 (希尔柏特-伯尔奈斯书上的——译者) 第 416 页上的第五个公式及第 419 页上的第七个公

1) 参见附录 II——俄译注.

式去，并就把其中的 a 及 $b(n, \rho(m, n' \cdot l+1))$ 作为变元 w，我们便得§ 49 附注 1 的($\alpha$)及($\beta$)．这个处理可以修整使适用于直觉主义系统．（希尔柏特-伯尔奈斯把该运算子写成 $\mu_x$；他们的 $\varepsilon_x$ 有另外的意义[1]，见[1939]，第 9 页以后，希尔柏特[1928]．）

**例 9** 已有关于+及·的递归定义后，其它原始递归定义的可消除性(参见例 4)．设 $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ 为一函数 $\varphi(=\varphi_k)$ 的原始递归描述．设 $S_1$ 为数论系统但加入了新函数符号 $f_1, \cdots, f_{k-1}$(分别表示 $\varphi_1, \cdots, \varphi_{k-1}$)，并把在 $\varphi_1, \cdots, \varphi_{k-1}$ 中的模式应用加以翻译(如在§ 54 中)，把所得的方程作为新公理．例如，设由 $\psi, \chi$($\psi$, $\chi$ 乃 $\varphi_1, \cdots \varphi_{k-1}$ 中某两个)使用§ 43 模式(Vb)($n=2$ 时)而得 $\varphi$．则应用§ 49 附注 1 可得：(1)$\vdash_1 P(0,x,w) \sim Q(x,w)$，(2)$\vdash_1 P(y', x, w) \sim \exists z[P(y, x, z) \& R(y, z, x, w)]$，(3)$\vdash_1 \exists ! w P(y, x, w)$．我们还假设(作为关于 $k$ 的归纳假设)：(4)$\vdash_1 g(x) = w \sim Q(x, w)$，(5)$\vdash_1 h(y, z, x) = w \sim R(y, z, x, w)$(这里 g，h 分别表示 $\psi$，$\chi$)．本定理(及(3))告诉我们说，若把 f 加入 $S_1$ 而以 $P(y, x, f(y, x))$ 作为新公理，它是可以消除的．但在 $S_1$ 中当增加 f 于符号体系中后，容易看见，$P(y, x, f(x, y))$ 和 $f(0, x) = g(x) \& f(y', x) = h(y, f(y, x), x)$ 是彼此可互相推演出的．(用(1)—(5)，就另一方向言，则就 y 作归纳得)．因此可不用 $P(y, x, f(y, x))$ 而用方程组 $f(0, x) = g(x)$，$f(y', x) = h(y, f(y, x), x)$ 作为新公理亦得同样的结果．（这一对方程希尔柏特-伯尔奈斯是用略为不同的方法得到的，见希尔柏特-伯尔奈斯[1934]，第 421 页．）

**例 10** 设 $S_1$ 为数论形式体系．根据§ 59 定理 32(a)的证明，有一公式 $P(z, x, w)$ 使得，如果 $e$ 是一般递归函数 $\varphi(x)$ 的一个哥德尔数，则 $P(\mathbf{e}, x, w)$ 数字地表示 $\varphi(x)$．因此对每个自然数 $x$，$\exists ! w P(\mathbf{e}, \mathbf{x}, w)$ 是可证的．但 $\exists ! w P(\mathbf{e}, x, w)$ 是否可证的呢？(对 $\varphi$ 及 $e$ 的某些选择当然是的，例如，根据§ 56 把§ 54 中的推理加以形式化．)由§ 52 定理 31，有原始递归的 $R$ 使得

1) 参见附录 V——俄译注．

$$\{\vdash_1 \exists! wP(z, x, w)\} \equiv (Ey)R(z, y).$$

设根据§ 60 定理 XIV(b) 由这个 $R$ 而得出 $\theta$。则 $\theta$ 是原始递归的，且当 $y = 0, 1, 2, \cdots$ 时，$\theta(y)$ 便是使得 $\exists! wP(z, x, w)$ 是可证的那些数 $z$ 的一个枚举。在释义之下，$\exists! wP(z, x, w)$ 之为真只当 $z$ 为一个一元一般递归函数的哥德尔数。设 $S_1$ 具相容性使得亦只有这时 $\exists! wP(z, x, w)$ 才是可证的。对每个 $y$，$\theta(y)$ 都是某个一般递归函数的哥德尔数，该一般递归函数可写为 $\Phi_1(\theta(y), x)$（§65 开首处），因此，$\Phi_1(\theta(x), x) + 1$ 是一个一般递归函数 $\varphi(x)$，就它的任何一个哥德尔数 $e$ 言，$\exists! wP(e, x, w)$ 都是在 $S_1$ 内不可证的。——对这个 $e$，设对 $S_1$ 加入新函数符号 f 及其公理 $P(e, x, f(x))$，所得的系统为 $S_2$，则 f（及其公理）是不可消除的。因为，若用 *174a 及对原始递归函数 $U$ 而用§ 49 附注 1 中的(3)（参见定理 32 的证明），可以容易看出 $P(e, x, t) \vdash_1 \exists! wP(e, x, w)$。故用新公理后 $\vdash_2 \exists! wP(e, x, w)$。如果 f 可以消除，则 $\exists! wP(e, x, w)$ 将在 $S_1$ 内是可证的，而事实不然。因此，在数论系统内，有一个只含自由 x 与 w 的公式使得，在相容性假设下：$P(x, w)$ 数字地表示一个一般递归函数 $\varphi$，但新函数符号 f（表示 $\varphi$ 的）及其公理 $P(x, f(x))$ 是不可消除的。

给定 F，f 及一些形成规则（这里是指 $S_2$ 中的）后，所谓一公式 E 的变换式是指任何公式 D 使得在具相等性的谓词演算内可由公式(iii)而推演出 $E \sim D$ 的。

**附注 2** (a) E 的变换式包括它的主要缺 f 变换式 E′（由引理 28 及引理 29 的证明）以及根据引理 25（引理 26）而处理 F 量词时所得出的各种公式。(b) $S_2$ 中一公式 E 的两个缺 f 变换式 $E^1$ 及 $E^2$，由于它们在 $S_2$ 中等价之故（根据引理 26 及 27），在 $S_1$ 中亦等价（由 (V)）。这对任何系统 $S_1$ 都成立，只须它具有定理 42 中的形成规则（但无需具有其中对新公理模式所作的保留条件，因为在 $S_2$ 中证明 $E^1 \sim E^2$ 时，只用到根据 $S_1$ 的公理模式而得的公理）。在特例，当 $S_1$ 为具相等性的谓词演算且把 (i) 作为公理时，它是成立的。

**无定义函数可替换以谓词**　**定理 43**(a)设 $S_2$ 为具相等性的应用谓词演算，含有一个 $n$ 元函数（$n \geq 0$）符号 f；再设从 $S_2$ 中删去 f 而改用 $n+1$ 元谓词的符号 F 以及公理 $\exists! w F(x_1, \cdots, x_n, w)$ 后，所得系统叫 $S_1$（或者，$S_2$ 的公设可以是谓词演算的以及关于 $S_2$ 中的函数符号及谓词符号的相等性公理，这时在 $S_1$ 中仍删去关于 f 的 $n$ 个相等性公理而代以关于 F 的 $n+1$ 个相等性公理）.

对 $S_2$ 中任一公式 E 言，设 E′ 为 E 的任何一个特殊的缺 f 变换式（缺 f 是就现在的 f 及 F 言，又这时是使用容许两者符号的形成规则的）．对 $S_1$ 中任一公式 E，设把其中呈 $F(t_1, \cdots, t_n, s)$ 形的部分同时换为 $f(t_1, \cdots, t_n) = s$，所得的 $S_2$ 中的公式叫做 $E^\circ$，这里 $t_1, \cdots, t_n, s$ 为项．则有：

(VIa) $\vdash_1 E \sim E^{\circ\prime}$.　　　　(VIb) $\vdash_2 E \sim E^{\prime\circ}$.

(VIIa) $\{\Gamma \vdash_2 E\} \to \{\Gamma' \vdash_1 E'\}$.

(VIIb) $\{\Gamma \vdash_1 E\} \to \{\Gamma^\circ \vdash_2 E^\circ\}$.

(b) 当 $S_2$ 有新特殊公理 $B_1, \cdots, B_k$ 及公理模式 $\mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_l$，而 $S_1$ 具有新特殊公理 $B_1', \cdots, B_k'$ 及新公理模式 $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_l$ 使得，如果在 $S_2$ 中根据 $\mathfrak{B}_i$（在 $S_1$ 中根据 $\mathfrak{A}_i$）而得一公理 E 时，必有 $\vdash_1 E'$（$\vdash_2 E^\circ$），在这情形之下，亦有上述结果．（参见希尔柏特-伯尔奈斯 Hilbert-Bernays [1934]，第 460 页以后.）

由(VIa)—(VIIb)可推得

$$\text{(VIIIa)}\ \{\Gamma \vdash_2 E\} \equiv \{\Gamma' \vdash_1 E'\}.$$

$$\text{(VIIIb)}\ \{\Gamma \vdash_1 E\} \equiv \{\Gamma^\circ \vdash_2 E^\circ\}.$$

证明(VIIIa)与(VIIa)相逆的部分：如果 $\Gamma' \vdash_1 E'$，则由(VIIb)，$\Gamma'^\circ \vdash_2 E'^\circ$，故由 (VIb)，$\Gamma \vdash_2 E$.

**定理 43 的证明**　(a) 我们从下列说法开始，所谈的逻辑是具相等性的谓词演算．设在 $S_2$ 中加入符号 F，并以

$$f(x_1, \cdots, x_n) = w \sim F(x_1, \cdots, x_n, w)$$

作公理时所得的系统叫做 $S_{3a}$．若把这公理当作 F 的显式定义，则由例 1 这加添是可消除的．而 ∘ 便是其对应关系．但由引理 26，在 $S_{3a}$ 中公理 $f(x_1, \cdots, x_n) = w \sim F(x_1, \cdots, x_n, w)$ 可替换以公理

组 $\exists!wF(x_1,\cdots,x_n,w)$及$F(x_1,\cdots,x_n,f(x_1,\cdots,x_n))$而不致于更改其可推演性关系．所得的系统设为 $S_3$，则对 $S_3$ 亦成立消除关系，即：

(Ib) 如果 E 为 $S_2$ 的公式，则 $E°$ 为 E．

(IIb) $\vdash_3 E\sim E°$．(IIIb) $\{\Gamma\vdash_3 E\}\to\{\Gamma°\vdash_2 E°\}$．

但定理 42 亦可应用于 $S_3$（作为定理中的 $S_2$），由 $S_3$ 消除 f 的结果便是 $S_1$．故若用附注 2(b)，当 ′ 为主要缺 f 变换以外的某个变换时，便得

(Ia) 如 E 为 $S_1$ 的公式，则 $\vdash E'\sim E$．

(IIa) $\vdash_3 E\sim E'$．(IIIa) $\{\Gamma\vdash_3 E\}\to\{\Gamma'\vdash_1 E'\}$．

这样便可推得 (VIa)—(VIIb)，例如

(VIa)：由 (IIb) 及 (IIa)，$\vdash_3 E\sim E°\sim E°'$．但 $E\sim E°'$ 是 $S_1$ 的一公式，故由 (Va) 得 $\vdash_1 E\sim E°'$．

(VIIa)：$\{\Gamma\vdash_2 E\}\to\{\Gamma\vdash_3 E\}$（当然）$\to\{\Gamma'\vdash_1 E'\}$（由 (IIIa)）．就具相等性公理的说法言，可由定理 41(b) 而得，或可直接如下地处理．关于 F 的相等性公理在 $S_{3a}$ 内是可证的，要过渡到 $S_3$，我们首先把它们作为公理而加入，其次把(iii)换为(i)及(ii)，最后删去关于 f 的相等性公理（用引理 27）．

**附注 3** 根据这证明可知，E 的任何两个缺 f 变换式 $E^1$ 与 $E^2$ 在 $S_1$ 中都是等价的．因为这个等价性已经在本定理(a)中的 $S_1$ 内建立了，故可对该变换式作适当的选择以满足条件(b)便够了．

**附注 4** 对具相等性公理的说法以及对 F 为谓词符号的情形言：如果对于 $i$ 的某些值而 $t_i$ 含有 f 时，我们不容许组成项 $f(t_1,\cdots,t_n)$ 及公式 $F(t_1,\cdots,t_n,w)$，并就 $i$ 的这些值而删去关于 f 及 F 的相等性公理，那末从定理 42 开始的全部讨论，包括‘变换式’的定义，都继续成立．

**附注 5** 如果具相等性公理，有时定理 43(b) 中的新公设可使得 $S_2$ 中关于 f 的 $n$ 个相等性公理中有些是冗余的． 在 $S_1$ 中相应的关于 F 的相等性公理是否冗余的？今设有些 $i$ 使得 f 的第 $i$ 个相等性公理可由 $S_2$ 的其余公设而证明，在其证明中所出现的 f

项 $f(t_1,\cdots,t_n)$，其中的 $t_i$（对这些 $i$）均不再含有 f. 这时 $S_1$ 中相应的关于F的相等性公理（即第 $i$ 个）亦是冗余的，只要当 ′ 指主要缺 f 变换或者附注 4 中所说的其它意义的任何缺 f 变换时，(b) 被满足便成. 因为附注4，再由 (VII) 可知关于 f 的相等性公理的主要缺 f 变换，在更改过的 $S_1$ 中是可证的，因此相应的关于F的相等性公理亦然.

**例 11** (a)设 $S_2$ 为完全数论系统或罗宾孙系统(§49 引理 18 b). 由本定理 (b) 我们可把函数符号 · 改为一个谓词符号，方法如下，设新谓词符号为·，具三个变目. 我们加入新公理

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\supset(\cdot(\boldsymbol{c},\boldsymbol{d},\boldsymbol{a})\supset\cdot(\boldsymbol{c},\boldsymbol{d},\boldsymbol{b})),\ \exists!\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c});$$

如果我们用主要缺 · 变换，可把公理 20 及 21 分别改为

$$\exists\boldsymbol{b}[\cdot(\boldsymbol{a},0,\boldsymbol{b})\&\boldsymbol{b}=0]$$

$$\exists\boldsymbol{c}[\cdot(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}',\boldsymbol{c})\&\exists\boldsymbol{d}[\cdot(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d})\&\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d}+\boldsymbol{a}]],$$

但这些可简化为

$$\cdot(\boldsymbol{a},0,0),\qquad\exists\boldsymbol{d}[\cdot(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}',\boldsymbol{d}+\boldsymbol{a})\&\cdot(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d})].$$

对 · 作为谓词符号言，其余两个相等性公理

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\supset(\cdot(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})\supset\cdot(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}))$$

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\supset(\cdot(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{d})\supset\cdot(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}))$$

是无需加入的，如果 $S_2$ 是完全数论系统的话，因为事实上，在所描述的系统内它们是可证的（由附注 5 以及§38 中把 · 当作函数符号时相等性公理的证明）；但如果 $S_2$ 是罗宾孙系统，它们便须加入作为公理同时可删除公式 *106 及 *107. 如果再一次应用本定理我们还可换出＋. 这时如果公理 18 改为它的主要缺＋变换式，即 $+(\boldsymbol{a},0,\boldsymbol{a})$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$ 仍是可证的（即使依下列 (b) 项换 0，亦仍然如此）. 第三次应用本定理可换出 ′. 这时，例如，归纳模式便改为 $A(0)\&\forall x[A(x)\supset\exists y('(x,y)\&A(y))]\supset A(x)$. 这样，我们便得到一系统 $S_1$，不具有通常意义的函数符号(即 $n>0$ 元的)，它与 $S_2$ 之间具有 (VIa)—(VIIIb) 的关系，这里 ′ 及∘表示对几个符号的依次消除. (b) 如果我们还愿意使该系统缺乏个体符号，我们还可以换出 0，只须就 $n=0$ 而应用本定理便成，或者我们在换出 ′

以前先消除 0（见次例）.

**例 12** 若用*137 及公理 15，可知$0=b\sim\forall a(a'\neq b)$（这具(iii)形）是可证的．我们可用这事实经过一些初步变换根据定理 42 而消除 0.

**例 13** 具有可定义种类的变元的可消除性．设 $S_1$ 为一谓词演算（具有使用个体符号，函数符号及谓词符号的形成规则的）；并添入一些特殊新公理及新公理模式．设有一个只含自由W的公式 M(w)使得公式 $\exists wM(w)$ 在 $S_1$ 内是可证的．设 $S_2$ 由 $S_1$ 经过下列的增加而得：加入新种变元 $\bar{a},\bar{b},\bar{c},\cdots$，容许它们可以作成项及公式并可以用于规则 9 及 12，但公理模式 10 及 11 中的 x 却限于原有的变元，此外再加入下列三个公理模式，其中 $\bar{x}$ 是新种变元，$A(\bar{x})$ 是一公式，t 为一项对 $A(\bar{x})$中的 x 是自由的，对M(w)中的 w 亦是自由的：$\bar{0}$. $M(\bar{x})$. $\overline{10}$. $M(t)\supset(\forall\bar{x}A(\bar{x})\supset A(t))$. $\overline{11}$. $M(t)\supset(A(t)\supset\exists\bar{x}A(\bar{x}))$．任给 $S_2$ 中一公式 E，若把 E 中每个形如 $\forall\bar{x}A(\bar{x})$ 的部分换为形如 $\forall x[M(x)\supset A(x)]$ 的部分，把 $\exists\bar{x}A(\bar{x})$ 换为 $\exists x[M(x)\& A(x)]$，这里 x 是原有的变元不出现于 $A(\bar{x})$ 及 M(w)中的，所得的结果叫做 $E^\dagger$；在 $E^\dagger$ 之前再加 $M(\bar{y}_1)\&\cdots\& M(\bar{y}_n)\supset$，所得的结果叫做 $E^\dagger$，这里 $\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_m$ 是在 E（因而 $E^\dagger$）中出现的自由的不同新种变元的全体；在 $E^\dagger$ 中再把 $\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_n$ 代以不同的不在 $E^\dagger$ 中（因而不在 E 中）出现的原有变元 $y_1,\cdots,y_m$，所得结果叫做 $E'$．如果根据 $S_1$ 中新公理模式而得的任一的 $S_2$ 中公理 A，其相应的 $A'$ 都是在 $S_1$ 内可证的，则 (I)—(III) 成立，但须作下列的修整．当 $m>0$ 时，(II) 变成 $E^{y_1,\cdots,y_m}{}_2\dashv\vdash_2\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_mE'$．就(III)言，如果想使相应的变元对相应的假定公式而保持固定，则（对于每个 $\bar{y}$ 言）须对 E 中的 $\bar{y}$ 以及 $\bar{y}$ 保持固定的那些 $\Gamma$ 中的 $\bar{y}$ 都须换以同一的 y（因此，在这情形，运算 ′ 不能就每个公式本身而定义的）．在处理(II)以前，定理 1，2 及 14 可以适当地推广至于 $S_2$．应用§ 24 引理 8a 可把 (III) 化归到 $\Gamma$ 为空的情形来．要处理后面这情形，可把 $E^\dagger$ 写为 “$E^\dagger(\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_m)$”．我们可就归纳而证明：如果 $\vdash_2 E$，则 $M(y_1),\cdots,M(y_m)\vdash_1 E^\dagger(y_1,\cdots,y_m)$，而 $y_1,\cdots,y_m$ 保持固定。

(就规则 2 言,设 $A^\dagger$ 只含一个新变元 $\bar{y}$,写为“$A^\dagger(\bar{y})$”,并设 $B^\dagger$ 不含新变元. 由归纳假设, $M(y)\vdash_1 A^\dagger(y)$ 及 $M(y)\vdash_1 A^\dagger(y)\supset B^\dagger$. 由规则 2, $M(y)\vdash_1 B^\dagger$. 由 ∃ 消及 *74, $\exists wM(w)\vdash_1 B^\dagger$. 但 $\vdash_1\exists wM(w)$,故 $\vdash_1 B^\dagger$. )——仿此可依次引入几种变元.

## §75. 公理系统,斯科林奇论,自然数列

今设我们处理一公理系统(§8),其原始的或无定义的观念为个体域 $D$, $D$ 中某些个体 $z_1,\cdots,z_q$, 定义于 $D$ 上的谓词 $P_1,\cdots,P_s$. 该系统的一公理如果可由谓词演算(即狭义的或一级的谓词演算,参见§37)的符号体系内的公式加以表示,这公理便叫做初等的,但这时可加入个体符号 $e_1,\cdots,e_q$ 以表示 $z_1,\cdots,z_q$,加入谓词符号 $Pr_1,\cdots,Pr_s$ 以表示 $P_1,\cdots,P_s$. 如果每个公理都是初等的,公理个数又是有限的,该系统便叫做初等的或一级的.

我们经常可以选用闭公式以表示初等公理,因为在全称性释义下,任何公式都和它的闭包同义(参见§32末). 又因初等系统内公理是有限个的,所以可以作出表示公理的那些闭公式的合取式 $F(e_1,\cdots,e_q,Pr_1,\cdots,Pr_s)$. 最后,可把个体符号 $e_1,\cdots,e_q$ 分别改为不出现于 $F(e_1,\cdots,e_q,Pr_1,\cdots,Pr_s)$ 中的不同的变元 $z_1,\cdots,z_q$,把谓词符号 $Pr_1,\cdots,Pr_s$ 改为不同的谓词字母 $P_1,\cdots,P_s$, 我们便得一个谓词字母公式 $F(z_1,\cdots,z_q,P_1,\cdots,P_s)$, 简写为 F. 简单的例子 ($q=0$, $s=1$ 时)已见于§37.

把公理系统这样地用谓词字母公式表示,有助于强调形式公理化的观点(§8),在这观点下,公理理论中的集 $D$,个体 $z_1,\cdots,z_q$ 及谓词 $P_1,\cdots,P_s$ 都是未确定的,除却由公理所刻划的以外. 每个谓词字母公式都可以看作表示一个公理系统,其中自由变元及谓词字母可以看作是表示无定义的个体及谓词.

当我们把逻辑符号作古典的释义,并把谓词“外延地”对待,简单地作为逻辑函数,这时集论式谓词逻辑(§37)的观念便可以应用到公理系统的讨论去. 我们说,一些公理被非空客体体系(在直

说意义上§ 8）所满足（依§ 8，我们亦说这些公理是非空的），便意指，公式F被某非空域所满足(在集论意义上)．可满足而不是有效的那些谓词字母公式，作为公理系统来说，便是很有兴趣的公式．有效的谓词字母公式对于它的自由变元及谓词字母所表示的那些客体及谓词并没有作出任何刻划；它倒是表示一个逻辑法则，对任何非空域中任何个体及谓词都可适用．

在形式公理学中，我们并没有进一步把逻辑推理过程形式化从而变成形式体系（§ 15），这时定理便是根据逻辑符号的意义而从公理推出来的．在这基础上，说一命题是一定理意指什么呢？这可用集论式的谓词逻辑表示如下，试考虑公理理论中任一命题，它可表成由 $P_1, \cdots, P_s$ 组成的谓词字母公式．我们经常可把公式选得除去 $z_1, \cdots, z_q$ 以外没有别的自由变元，而 $z_1, \cdots, z_q$ 等又只是作为自由变元而出现．任何一个这样的公式 $B(z_1, \cdots, z_q, P_1, \cdots, P_s)$，或简写为B，它之表示该公理理论中一个真命题或定理，当且仅当，由任一个非空集 $D$ 任意指派 $z_1, \cdots, z_q$ 给 $z_1, \cdots, z_q$，又指派 $D$ 上谓词 $P_1, \cdots, P_s$ 给 $P_1, \cdots, P_s$，只要它满足F它便满足B．根据§ 28 中⊃的赋值表，这便等价于说，公式 $F \supset B$ 在任何非空域内都是有效的．

今假设把这个公理理论形式化（§ 15），采取谓词演算的导出规则作为它推演定理的工具，但要求 $z_1, \cdots, z_q$ 保持固定；这样我们便可以证明论地说，B之表示一定理当在谓词演算中有 $F \vdash B$ 而 $z_1, \cdots, z_q$ 保持固定时．（由§ 37 附注 1 及 2(a)，我们经常可以找到一个由F到B的推演，其中除 $P_1, \cdots, P_s$ 外没有其它谓词字母出现而 $z_1, \cdots, z_q$ 只自由地出现．）

既然除 $z_1, \cdots, z_q$ 外F没有其它自由变元，故任何变元都不变化，由⊃规则这便等价于说，在谓词演算中有 $\vdash F \supset B$．

现在我们可以证明，要用谓词演算来对初等公理理论来形式化，是既正确(或相容)的又适当(或完备)的．即，在谓词演算中凡能由F推演出的那些公式恰巧就是它们所表示的命题在满足这些公理的任何体系中都是真的．因为，由§ 37 定理 21 及§ 72 定理

34 系 1 可得，$\{\vdash F \supset B\} = \{F \supset B$ 在每个非空域内是有效的$\}$.

定理是否与公理相容这个问题(上面已经肯定地解答了)当然与公理本身是否相容这个问题是两回事. 在希尔柏特的证明论即元数学以前，要证明一公理体系或公理理论的相容性都是借助于对该理论作一模型的(§ 14). 这时所能直接证明的相容性便是F在某非空域内的可满足性.

在§ 14 中，我们给出一个由利的 (heuristic) 论证，说这性质蕴涵了下述意义的相容性，在从公理推演而出的理论中不会出现矛盾(一定理否定别定理). 但其逆定理，即任何不被满足的公理体系必然可由有限次逻辑步骤而出现矛盾，这却绝不是明显的.

只是由于近代形式主义者所采取的把推演加以形式化的步骤，才使得作为不能推出矛盾这种相容性受到精确的处理. 现在，作为相容性的是，没有一公式A使得当 $z_1, \cdots, z_q$ 保持固定时，既有 $F \vdash A$ 又有 $F \vdash \neg A$.

由§ 23 的$\neg$规则 (因F只含自由 $z_1, \cdots, z_q$)，这性质便等价于"非$\vdash \neg F$"，即等价于"F是不可驳的". 形式主义者对相容性问题所作的变换可以描述为(就初等公理体系言)，把可满足性问题变换为不可驳性问题.

由定理 21 (现在它代替了§ 14 所作的推理) 及哥德尔完备性定理(定理 34)，可满足性与不可驳性是等价的.

我们所以把可推演性及相容性这些观念作形式主义的变换，其目的在于得到一些有穷性的观念. 把不可数无穷化归到可数无穷这一点已经做到了，因为有效性与可满足性是就逻辑函数全体而言的，它是不可数无穷的，反之，证明论上与它等价的可证性及不可驳性只就形式证明立论，那是可数无穷的. 在元数学上，对这些观念的推理亦是有穷性的. 虽则这个等价性的证明，即哥德尔完备性定理的证明，不能再属于元数学，但对元数学来说，它仍有其意义，当我们在非有穷性的水平 (而集论的观念本身便在这个水平内)作推理时，集论的观念却的确与证明论的观念相等价.

我们可以看见，在纯谓词演算内可证性的判定问题便已包括

了任何一个具初等公理系统的公理理论的可证性判定问题（只要判定谓词字母公式 $F \supset B$ 的可证性便成了），以及任何初等公理系统是否相容这个判定问题（只要判定 $\neg F$ 是否不可证）。

数学所用的公理体系中，=经常起寻常项或逻辑项的作用，它必须预先理解而不是作为由公理刻划的无定义谓词．如果我们首先补入一些关于相等性的公理，形式化为 $E_q(=, Pr_1, \cdots, Pr_s)$ 或 $Eq(Q, P_1, \cdots, P_s)$，那末仍可应用上述的附注；或者，我们亦可把这些公理本身形式化为具等式的谓词字母公式，把由公理而作的推演形式化为具相等性的谓词演算，然后再使用推广的哥德尔完备性定理．根据§ 73 引理 24(a) 及定理 41(c)，这两方法给出互相等价的结果，虽则集论上说来，前者并没有对能够满足公理的释义限制其中的 Q 必须是相等性而可以是任何一个等价关系．

**例 1**　关于线性次序的公理系统 L1—L3(§8 末) 可用下列的具等式的谓词字母公式（可叫做“$F(=, \boldsymbol{A})$”）表示，这里 $\boldsymbol{A}$ 表示 <：

$$\begin{aligned}
&\forall a\forall b\forall c[\boldsymbol{A}(a, b)\&\boldsymbol{A}(b, c)\supset\boldsymbol{A}(a, c)]\\
&\quad\&\forall a\forall b[\neg(\boldsymbol{A}(a, b)\&a = b)\\
&\&\neg(\boldsymbol{A}(a, b)\&\boldsymbol{A}(b, a))\&\neg(a = b\&\boldsymbol{A}(b, a))]\\
&\quad\&\forall a\forall b[\boldsymbol{A}(a, b)\\
&\vee a = b\vee\boldsymbol{A}(b, a)].
\end{aligned}$$

这个公理系统亦可用谓词字母公式 $Eq(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A})\&F(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A})$ 表示，这里 $\boldsymbol{B}$ 表示=（参见§ 73 例 1）．

我们的附注亦可以间接地应用于下列公理系统，在它的原始观念内含有函数 $f_1, \cdots, f_r$ 的，因为借助于=，这些函数可换以它们的代表谓词，这已在§ 74 定理 43 处用证明论的观点加以讨论了．

在数学中初等公理体系经常出现，如果我们把‘初等的’适当放宽使包括下列系统，即它们能够用熟知的技巧变成本章开首处所说的初等体系的．例如，群的公理以及删去连续性公理后的希尔柏特的几何公理，都是广义的初等公理体系．（对第一个说，群的运算可借助于=而换为它的代表谓词；对两者说，都须补入关于

≡的公理．希尔柏特-伯尔奈斯[1934]，第3—8页及第380—381页曾给出一个例子．）

上述的关于初等公理体系的讨论，亦可仿效而行于具可数无穷多个初等公理的情形．设$F_0$，$F_1$，$F_2$，···为谓词字母公式分别表示各公理并且只含自由变元$z_0$，$z_1$，$z_2$，···，后者是代表该公理理论中无定义的个体的．我们有，{B是一"定理"集论地}≡{每一个指派，只要满足所有的$F_0$，$F_1$，$F_2$···都满足B}≡{对每一个指派言，B，$\neg F_0$，$\neg F_1$，$\neg F_2$，···中至少有一为t}≡{由有限个B，$\neg F_0$，$\neg F_1$，$\neg F_2$，···所成的析取式是可证的}（由定理21及定理37系1）≡{$\vdash F \supset B$，这里F是由$F_0$，$F_1$，$F_2$，···中有限个所作的合取式}（由*62，*59）≡{$F_0$，$F_1$，$F_2$···$\vdash$B而$z_0$，$z_1$，$z_2$，···保持固定}≡{B是一"定理"，证明论地}．同样地，{这些公理是"相容的"，集论地}≡{$F_0$，$F_1$，$F_2$，···可联立满足}≡{由$F_0$，$F_1$，$F_2$，···中有限个所作成的每一个合取式都是不可驳的}（由定理21及37）≡{对每个A不会既有$F_0$，$F_1$，$F_2$，···$\vdash$A又有$F_0$，$F_1$，$F_2$，···$\vdash \neg$A，而$z_0$，$z_1$，$z_2$，···保持固定}≡{这些公理是"相容的"，证明论地}．因此，同前，集论的观念与相应的证明论的观念是等价的．但关于由公理而作的可推演性及公理的相容性的判定问题却不能适用以前的方法化归到谓词演算的可证性的判定问题去，因为现在出现了量词，即提到关于$F_0$，$F_1$，$F_2$，···的有限合取的量词（但可参见§76附注3）．

若用带星号的定理21及37（参见§73定理39），可把这些结果推广到下列情形：把＝作为逻辑观念，而公理则用具等式的谓词字母公式表示．

公理集合论．　冯纽曼（Von Neumann）[1925]的，伯尔奈斯的[1937—48]，哥德尔[1940*]的集合论公理系统是初等的（广义）[1]．

1）各种不同的集合论公理系统的综览可见于王浩及麦克诺敦（Mac Naughton）1953．耶仙宁-伏尔平（*А*. Есенин-Вольпин）[1954°]曾作了详细的俄文提要——俄译注．

就哥德尔的公理言，共有三个原始观念 cls(为一类)，$\mathfrak{M}$(为一集)，ε (属于)，此外＝用作逻辑观念．一切集均为类，此外更不考虑其它客体；故类便组成一(客体)域．这公理系统可用具等式的谓词字母公式 F( ＝ ，***A***，***B***)表示，这里 ***A***(*a*) 与 ***B***(*a*，*b*) 分别表示 $\mathfrak{M}(a)$及 $a \in b$，也可用谓词字母公式 Eq (***C***，***A***，***B***)&F(***C***，***A***，***B***)表示，这里 ***C***(*a*，*b*) 表示 $a = b$．

这公理系统是极端有力的．加入适当的定义后由它可以推演出通常的古典分析及大部分的一般集合论．特别地，无穷集的存在是假设的(由无穷公理)，对于任一集，假设另有一集包含该集的所有子集；因此借助于康托定理(§5 定理 C)，有不可数无穷多个集(或译为：由诸集可组成一个不可数无穷集)．

但根据累文汉定理(定理 34* 系 2，参见定理 39)，如果表示这些公理的公式 F( ＝ ，***A***，***B***) 能够被满足(由它的集合论释义，看来是这样的)，它便在有穷域或可数无穷域内被满足．(对公理作检查可知不会在有穷域内被满足．) 因此，我们可对原始观念作这样的释义使得只有可数多个集而公理仍然全部为真 (即公理集合论有一个可数模型，而＝仍是通常的意义)，但在这理论内却有一定理说，有不可数多个集存在． 这便是斯科林“奇论” (斯科林 [1922—3])．

斯科林曾把累文汉定理推广到可数无穷多个公式 $F_0$，$F_1$，$F_2$，· · ·联立满足的情形去(定理 37* 系 2)，因此这“奇论”亦可以应用到下列的集合论公理化去，即用无穷多个公理的，例如弗兰克尔 (Fraenkel) [1922] 的及斯科林 [1922—3] 的．

有两个注意可对这“奇论”射出一些曙光． 在一公理理论中，一集的某些特殊子集只在下列情况之下才是可定义的，即或者可由理论中能使用的运算而构造，或可由理论中能使用的特性(即谓词)而由该集分出．公理所能供给的用以构造集合的基本运算(或构造谓词的基本过程) 只有有限个或至多可数无穷多个．重复使用它们只能定义一集的可数多个子集．这便说明了，为什么我们能够在一个可数域内释义该公理系统，亦即在一个可数域内使表

示这些公理的公式得到满足.

另一方面，要把一集加以枚举，便是在这集与一个特殊的可数集（例如自然数集）之间建立一个一一对应（§ 1）. 一一对应可以看作是对应偶[1]的集.

因此，下列情形便很可能了. 在理论之内可以定义一个无穷集，它的子集本来在理论之外是可数的，但在理论之内却不可数，由于在理论内可定义的集中，并没有由对应偶所组成的枚举集之故. 要作出由对应偶所组成的枚举集必须把公理系统的结构作的整体而考虑才成，而这不能在理论之内作出，即不能只借公理所供给的运算而作出.

这种情况和哥德尔的不完备定理或不可判定定理（§ 42 定理 28）很为相似，在那里，如果我们假设数论形式体系是相容的，我们便可以看出，当注意该整个体系的结构时，$A_p(\mathbf{p})$ 是真的，但若只使用形式化于体系内的推论原则，我们却不能看出 $A_p(\mathbf{p})$ 的真确性，即我们没有 $\vdash A_p(\mathbf{p})$.

虽则可以这样"说明"，但由于"奇论"之故，我们只能作下列的选择. 或则我们必须坚持；一集的任一子集这概念，以及不可数集这概念是一些先验（a priori）的概念，无法用有限个或可数无穷多个初等公理加以刻划的；或者（如果我们固执于只限于初等公理所能明显地刻划的东西，由于集论的诗论之故，我们很愿意如此，§ 11）我们必须把集论式的概念，在特例，不可数性，作为是相对的，在某一公理化内一集可以是不可数的，在另一个公理化内则是可数的，没有绝对不可数性存在. 集论的这种相对化乃由斯科林（[1922—3]，[1929]，[1929—30]）所提出.

因为由累文汉定理可以引到斯科林"奇论"，所以它可看作是近代不完备性定理的第一个. 其余的讨论见斯科林[1938].

公理算术. 我们的形式数论系统的公设群 B 便是自然数理论的具下列性质的公理系统的一例子，即具有能行地可数无穷多个

---

1）即彼此对应的元素所作成的对偶——俄译注.

初等公理的，即表示公理的公式是能行地可数的（参见§72定理38）．其中函数当然可换以它们的代表谓词．吕尔-拿捷夫斯基(Ryll-Nardzwski) [1952*] 指出，这些公理的任何有限子集都不足以推演出同样的定理集来．

另一问题是，这些公理是否完全刻划了自然数数列．哥德尔关于谓词演算的完备性理论可使我们证明下列定理，它原是斯科林用另一方法所得到的([1933]，[1934]；参见[1938])．

我们试讨论关于自然数数列的公理（设命自然数集为N)，原始观念是个体0及谓词 $a' = b$，若用 $\lambda$ 记号(§10)便是 $\lambda ab a' = b$，或许还有别的原始观念．公理将表成具等式的谓词字母公式，并以 $z$ 表示0，以 $P_0(a, b)$ 表示 $a' = b$.

在讨论对任一公式的自由变元及谓词字母作指派时，我们用"$D$"指个体域，用"$z$"指指派给 z 的那个个体，用"$P_0(a, b)$"指指派给 $P_0(a, b)$ 的谓词．这时 $(D, z, P_0(a, b))$ 便是§8意义下的数学系统，它由一集或一域，该集的一元素以及定义于该集上的一个谓词而组成．

**定理 44^C** 任何有限个或能行地可数无穷多个具等式的谓词字母公式，如果取 $(D, z, P_0(a, b))$ 为 $(N, 0, a' = b)$ 时它被联立地满足，那末亦可，这样地取 $(D, z, P_0(a, b))$ 来联立地满足它，使得 $0 < \bar{\bar{D}} \leqslant \aleph_0$ 并且 $(D, z, P_0(a, b))$ 与 $(N, 0, a' = b)$ 不同构．

**证明** 由假设，可对这些公式作一个联立满足的指派使得域 $D$ 便是N，$z$ 取值0而 $P_0(a, b)$ 取值 $a' = b$.

设 $P_1, P_2, P_3$ 为别的不同的谓词字母，它们或者不出现于这些公式中，或者出现于这些公式中，但在该指派内其值分别为 $a + b = c$，$a \cdot b = c$ 及 $(x)(Ey)T_2(a, a, x, y)$．我们将在所给的公式集内加入七个公式（如果原来没有的话)，因为把所给的指派加以扩张（如果必要的话）使得 $P_1, P_2, P_3$ 分别取上述的值时，这些公式是被满足的．

我们加入四个闭公式如下，

$\forall aP_1(a, z, a)$

$\forall a\forall b\exists c\exists d\exists e[P_0(b, c)\&P_1(a, c, d)\&P_1(a, b, e)\&P_0(e, d)]$,

(a)

$\forall aP_2(a, z, z)$

$\forall a\forall b\exists c\exists d\exists e[P_0(b, c)\&P_2(a, c, d)\&P_2(a, b, e)\&P_1(e, a, d)]$

(参见§ 74 例 11(a)),在所说的指派下,它们表示 $a+b$ 及 $a \cdot b$ 的递归方程,不过用代表谓词 $a+b=c$ 及 $a \cdot b=c$ 来译出罢了,再加入下两公式

(b) $\forall a\forall b\exists ! cP_1(a, b, c)$, $\forall a\forall b\exists ! cP_2(a, b, c)$,

它们说,$a+b=c$ 与 $a \cdot b=c$ 是代表谓词. 因为 $T_2(a, b, x, y)$是原始递归的,故由§ 49 定理 1 系,它是算术的(§ 48),因此(若换 $'$,+及 · 为它们的代表谓词)可找到一个由=, $P_0$, $P_1$, $P_2$ 所组成的字母公式 $T_2(a, b, x, y)$表示它(在所说的指派下). 然后我们再加入下公式

(c) $$\forall a(P_3(a)\sim\forall x\exists yT_2(a, a, x, y)).$$

设结果所得的(扩大)集中的公式为 $F_0, F_1, F_2, \cdots$. 正如累文汉定理(定理 37*系 2)的证明中所说那样,定理 37*的假设是满足的;我们可利用定理 37* 及 40 来得到另外一个关于 $F_0, F_1, F_2, \cdots$ 的满足指派. 设在该指派中,其域及 z, $P_0$, $P_1$, $P_2$, $P_3$ 的值分别为 $D^*, z^*, P_0^*, P_1^*, P_2^*, P_3^*$:

假设(为反证法起见)$(D^*, z^*, P_0^*(a^*, b^*))$与$(N, 0, a'=b)$同构(§ 8),即 $D^*$是无穷的并可枚举为 $s_0, s_1, s_2, \cdots$ 使得 $z^*=s_0$ 而 $P_0^*(s_a, s_b)\equiv a'=b$.

则由定理 40 有一个原始递归 $R_3$ 使得

(i) $$P_3^*(s_a)\equiv(Ex)(y)R_3^*(a, x, y).$$

在§ 43 处我们曾推论说,当变元以自然数为变域而 0 及 $'$ 具有通常的意义时,则对+及 · 的递归方程将以通常的+函数及 · 函数为其唯一的解答. 因为公式(a)(b)是满足的,我们可应用该推理(作少许的调整,因为现在用代表谓词而不用函数)而推出 $P_*^1(s_a, s_b, s_c)\equiv a+b=c$ 及 $P_2^*(s_a, s_b, s_c)\equiv a \cdot b=c$. 同样,我

们关于§ 49 定理 I 的证明又指出了，公式 $T_2(a, b, x, y)$ 表示一谓词 $T_2^*(a^*, b^*, x^*, y^*)$ 而 $T_2^*(a^*, b^*, x^*, y^*) \equiv T_2(a, b, x, y)$. 故 $\forall x \exists_y T_2(a, a, x, y)$ 便表示一谓词 $T^*(a^*)$ 而

(ii) $$T^*(s_a) \equiv (x)(Ey)T_2(a, a, x, y).$$

因(c)满足，故由～及 ∀ 的赋值规则(§ 28 例 1)得

(iii) $$P_3^*(a^*) \equiv T^*(a^*).$$

合并(i)—(iii)可得，

$$(Ex)(y)R_3^*(a, x, y) \equiv (x)(Ey)T_2(a, a, x, y).$$

但由§ 57 定理 V(16) 可知谓词 $(x)(Ey)T_2(a, a, x, y)$ 是不能表成别的 2 量词形式的；必有某个数 $g$ 使得

$$(Ex)(y)R_3^*(g, x, y) \not\equiv (x)(Ey)T_2(g, g, x, y).$$

由反证法，$(D^*, z^*, P_0^*(a^*, b^*))$ 与 $(N, 0, a' = b)$ 不同构。

讨论． 由本定理可知，任何有限个或能行地可数多个初等公理都不足以刻划自然数数列 $0, 1, 2, \cdots, a, a', \cdots$. 任何这类公式只要对自然数数列为真的必对别种释义亦真．我们叙述这定理时，是把自然数数列当作 $(N, 0, a' = b)$ 形的系统的，但既然 $a'$ 可换为 $a' = b$，故把自然数当作 $(N, 0, ')$ 形的系统时本定理亦成立．在特例，就我们的数论形式体系的公设群 B(§ 19) 言，除我们所想要的释义以外，还容许别的释义(其中逻辑符号及＝仍用通常意义.)

作为自然数数列的刻划来说，公设群 B 是不完备的，如果我们比较皮亚诺的第五公理(数学归纳原则§ 7)和我们的公理模式 13，这一事便不难明白了．皮亚诺的第五公理断言说，下陈述

(I) $$A(0) \& (x)(A(x) \rightarrow A(x')) \rightarrow (x)A(x)$$

对一切数论谓词 $A(x)$ 均成立，这些谓词组成了一个不可数的总集，但由公理模式 13 所给出的一堆公理只说 (I) 对可用系统内的公式 $A(x)$ 而表示的谓词成立，换句话说，只对可数多个谓词成立．皮亚诺的第五公理不是初等的．我们可把它在二级谓词演算(§ 37)的符号体系内表示，只须使用关于谓词变元 $\boldsymbol{A}$ 的全称量词便成：

$$\forall A[A(0)\&\forall x(A(x)\supset A(x'))\supset\forall xA(x)].$$

这种意念与哥德尔的形式不可判定命题的定理(§ 42 定理 28 或 29)有关.

我们可把 $A_p(\mathbf{p})$ 或 $A_q(\mathbf{q})$(如果数论系统是简单相容的，则它们是真的但不可证的）设想为表示一个能够由皮亚诺公理加以"证明"的命题，但在归纳证明时所用的归纳谓词 $A(x)$，在所想作的释义下，却不能在该系统内表出.（这个暗示将来可得到证实；参见§ 79 末，又见§ 42 (II))

由斯科林结果（定理 44)，$A_p(\mathbf{p})$ 的不可证性亦是可理解的，因为就自然数说，$A_p(\mathbf{p})$ 虽是真的，但对别的一个亦满足该公理的释义来说，它却是假的. 因此在数论形式体系内 $A_p(\mathbf{p})$ 的不可证性便和下事实同一类型：从几何的其余公理既不能证明欧氏平行公设亦不能证明其否定. 所给的公理缺乏范畴性(完备性).

反之，如上所说(应用定理37*系1)，如果凡使公理为真的一切释义均使该公式为真，则它是可证的.因此由已知的 $A_p(\mathbf{p})$的不可证性便可推知，$A_p(\mathbf{p})$ 不会在使得公理为真的一切释义下都是真的. 因此，当定理 44 的公式集便是我们的形式体系的公设群 B 时(重新用具等式的谓词字母公式叙述)，由哥德尔定理 28 及 37*可对定理 44 得到另一证明. 但是(如上所说，并用定理 21*)，如果可数多个具等式的谓词字母公式是联立可满足的，则把它们作为公理加到具相等性的谓词演算去后，所得的形式系统是简单相容的. 因此，任给定理 44 所说的公式集，我们若加入公设群 B，并就结果所得的系统而作出定理 28 的证明(或用§ 60 定理 XIII 第三部分)，我们便得一般形式的定理 44 了.

莫斯托夫斯基 [1949] 给出一个有趣的例子(由斯科林"奇论"所暗示的)，举出公理集合论中一命题，在一个释义下它是真的，在另一个释义下它是假的，因此便证明了它是不可判定的. 克累斯尔(Kreisel) [1950] 亦处理类似的问题.

我们前面所给的定理 44 的证明，以及根据定理 28 (或定理 XIII) 的证明，都是就初等公理系统或具能行地可数无穷多个初等

公理的系统而作的．斯科林的证明却并不限于：公理的枚举是能行的．但这样所增加的一般性却是无关重要的，如果我们把这定理看作是形式公理体系的不完备性定理，而公理化的目的又在于使该理论的假设可以明显作出的话．

**附注 1** 可以把我们关于定理 44 的(原来)证明加以修整，使具有更多的一般性．试假设定理 44 的公式集仅仅是算术的，即根据§ 52 与§ 53 的方法而作出哥德尔编号时，谓词 '$x$ 为该集中某一公式的哥德尔数'，记为"$C(x)$"，是算术的． 则由§ 57 定理 VII (d)，$C(x)$ 可表成定理 V 的各形式之一，设为 $q$ 量词形式． 假设该集增加有限个公式后(如上面，我们增加了 (a)—(c) 七个公式) 相应的谓词为 $B(x)$；则不管所增加的公式为何，$B(x)$ 仍可表为 $q$ 量词形式．由§ 60 定理 XIV(b)（取 $R(x, y) \equiv B(x)$)，有一个原始递归于 $q$ 量词谓词的函数 $\theta(k)$（如果 $q$ 量词形式是由存在量词开始的，则它甚至原始递归于 $q-1$ 量词谓词）使得集 $\hat{x}B(x)$ 可由 $\theta(k)$ 而枚举． 但若在定理 38 及 40 的假设中把 $F_0, F_1, F_2, \cdots$ 的枚举是能行的这点删去，在结论中把"原始递归"改为"原始递归于 $\theta$"，这里 $\theta(k)$ 是 $F_k$ 的哥德尔数；则这两定理的证明仍然有效；因此 (用§ 58 定理 XI 及§ 57(17)(18))，当 $\theta$ 递归于 $q$ 量词谓词时，如把结论中的 2 量词形式改为 $q+2$ 量词形式，则证明亦仍有效．故若不用定理 V 中的 2 量词形式的情形而用 $q+2$ 量词形式的情形，则定理 44 的证明便全部成立了．——我们还可把定理 44 中的 $C(x)$ 推广为：算术于谓词$M$(§ 57 定理 VIII 中的)，而在增加公式中增入三个表示 $M$ 的定义的公式，并用定理 I*，V*，VII*，XI*(以$M$作 $\Psi$)以代 I，V，VII，XI．(定理 44 的第二个证明亦可推广到更一般的前提，这时须把定理 28 或 XIII 推广到"非构造逻辑"去．)[1]

1) 罗歇 [1937] 把定理 28 及 30 推广到下列情形， 即在推演规则中加入卡纳普规则：如果 $(y)\vdash F(\mathbf{y})$，则 $\vdash \forall y F(y)$，他并且对这种证明按归纳而定义了秩的概念(使每一证明均有一秩——译者)，即把比对公式 $F(\mathbf{n})(n=0, 1, 2, \cdots)$ 的各证明的秩都大的最小序数作为该证明的秩． 罗歇考虑了，当所有的秩都 $<\omega^2$时这种类型的理论．不久以前这个结果由法列维茨 (Б.Я.Фалевич) 推广到

哥德尔的不可判定性定理并不限于初等公理(§ 60 定理 XIII)的情形. 但我们可以用皮亚诺公理(其中第五公理不是初等的)来完全刻划自然数数列,只要容许在该域之上的一切谓词这个观念. 假设我们有一个相容的形式系统, 包含了关于自然数的范畴性的(完备的)公理. 我们既是处理形式体系,依照这个概念,一个形式系统只能具有可数无穷多个形式客体,因此,在这系统内对于皮亚诺第五公理中的谓词变元 **A** 只能代以可数无穷多个公式. 故在这系统内, 就推演目的言,正如上面一样, (I) 只能供可数无穷多个谓词使用. 的确,根据哥德尔定理(定理 XIII),这些公理在释义之下可有一后承,而它是不可证的,即不能由公理根据形式化于系统之内的逻辑来推演的. 因此当我们有非初等的公理时, 在一切释义(这些释义满足公理)之下都为真的那些公式未必全是可证的(在我们的例子里, 基本上只有一个这样的释义). 如果我们想使用非初等公理来避免不完备性, 则具初等公理的公理系统中所出现的不完备性便转移到推演工具的不完备性方面去了.

正如斯科林([1934],第 160 页)所说,"···如果我们把'集'或'命题函数'看作预先给定的, 与任何生成原则或公理都没有关系的、有绝对意义的东西,那末[自然数]数列便可以由(比如说)皮亚诺公理完全刻划了. 但如果我们要使公理化到底, 使得关于集与命题函数的推理也公理化,那末正如我们所看见的,要把[自然数]数列唯一地或完备地刻划,那是不可能的."

这种情况曾由汉金[1950]所讨论,但当著者写出本节时(初稿在 1947 年)已被作者注意到. 别的论文可见莫斯托夫斯基 [1947a](参见凯梅尼 (Kemeny) 的摘要 [1948]),罗歇与王浩[1950](参见斯科林摘要[1951]).

---

其秩为可构造的超穷(序)数的情形去. 关于算术方面可参见莫斯托夫斯基[1947*]——俄译注.

## §76. 判定问题

**定理 54**[1] 纯谓词演算(具相等性的纯谓词演算)是不可能解决的,即没有判定过程来判定,一个谓词字母公式(具等式的谓词字母公式)在演算内可证与否.(邱吉[1936a],杜令[1936—7].)

**证明** 就谓词演算言,由§75我们看见,任何一个具初等公理的公理理论,其可证性的判定问题是可化归于纯谓词演算的可证性问题去的.因此要证明本定理只须找出一个初等公理理论,而它是不可能具有判定过程的(按照邱吉的论点§60言).

根据§61定理33,由§49引理18b所描述的罗宾逊形式系统,如果它是简单相容的话,可以作为这样一种公理理论的例子.它的简单相容性的证明将在§79(定理53(a))给出.(本定理的编号便在该定理之后.)

我们把推理重新详细叙说一次(已经在§75中大略说过).设$S_2$为引理18b的系统,具有十三个特殊公理.

(A) 应用定理43(见§74例11(a)),我们可找出另一系统$S_1$,其中函数符号′,+,·换为相应的谓词符号,公理个数增加到19.根据(VIIIa),$S_2$中公式E在$S_2$内为可证的当且仅当$S_1$中的公式E′在$S_1$内为可证.

(B) 我们可把公理换为它们的闭包不致于影响可证性观念(§32末).

(C) 因公理个数是有限的,由&规则,它们可换以一个公理即它们的合取式.

(D) 我们还可更改记号,把个体符号0换为不在公理中出现的变元z,并把可证性理解为在谓词演算中当z保持固定时由公理而作的可推演性. 设把$S_1$中不含z的公式D作这样的更改结果得C,则由§34附注2(b),C可证当且仅当D可证.(这里把0

1) 本定理所以编号"54",因为逻辑上应在§79定理53之后——译者注.

与函数符号分别讨论，如果在(A)项中改用§ 74 例 11 (b)，则本项可免.)

(E) 我们还可更改记号，不用谓词记号而用谓词字母. 作这样的记号更改后，如果C变成B，则由§ 34 定理 15 及 16，B可证当且仅当C可证.（由§ 75 中，我们令B除 z 外不含自由变元，但那只是为的可正常地使用集论的观念之故，在这里并不必要.)

(F) 最后，根据⊃规则，在最后所描述的系统内B可证，即在谓词演算中有 F⊢B，z 保持固定而F为表示公理的公式(只含 z 自由)，当且仅当在谓词演算内 F ⊃ B 是可证的.

因此，任给 $S_2$ 中一公式E，我们都可找到一个谓词字母公式F⊃B，使得{在 $S_2$ 内⊢E} ≡ {在谓词演算内⊢F⊃B}，而整个过程是能行的.（通过哥德尔编号，这过程可被一个一般递归函数所代表，如§ 61 讨论那样，它亦可由杜令机器所作出，如§ 70 末那样.）因此如果对于纯谓词演算的可证性有一个判定过程，则对于 $S_2$ 便将有一判定过程，因为任给 $S_2$ 的一公式E，都可找出相应的谓词字母公式F⊃B，再对后者应用谓词演算的判定过程. 但由定理 33，如果 $S_2$ 是简单相容的，则对 $S_2$ 的可证性没有判定过程.

这论证亦可应用于具相等性的谓词演算，因为由定理 41(b)，引理 18b 的系统内的可证性等价于一个含有七个特殊公理的具相等性谓词演算系统的可证性.

**附注 1** 化归步骤(A)—(F)的实行次序是无关重要的，只要(B)(C)在(F)之前，(A)在(B) (C) (E)之前便成，又如果(D)在(B)之前，则(B)的闭包运算应不包括变元 z.（或(C)可省，而对每个公理实行(F)，参见§ 26*4 及 *5.)

**附注 2** 定理 54 的证明亦可不根据定理 33 而根据§ 60 定理 XII，如下. 依照§ 60 例 2 而把引理 18b 的系统作上述的化归(A)—(F)，或者把§ 73 例 2 的系统而作化归，并用在§ 79（定理 53(b) 或定理 52)处所证明的相容性，使得：对任何一个固定的原始(或一般)递归函数 $R(x, y)$，都有一个能行过程使得，任给一数 $x$ 都可找出一谓词字母公式 $K_x$ 使得

(1) $(Ey)R(x, y) \equiv$ {在谓词演算内$\vdash K_x$}.

若取$R(x, y) \equiv T_1(x, x, y)$,便可由定理 XII 而得定理54了. 这个根据§73例2及定理 XII 的证明基本上便是邱吉的原来证明;至于使用定理 33 而作的证明基本上是莫斯托夫斯基及塔斯基(Tarski)的([1949]摘要).

**附注 3** 我们关于形式系统$S$的概念蕴涵着$S$的公式必须是可能行地枚举的，或必须容许一个哥德尔编号使得任给一公式A我们可能行地指出其哥德尔数$x$，反之，任给一数$x$我们可能行地判定它是否一公式的哥德尔数,如是，则找出该公式$A_x$. 因此(参见§60附注1(a))：有一个一般递归谓词$R$使得

(2) {在$S$内$\vdash A_x$} $\equiv (Ey)R(x, y)$.

故任一系统$S$内可证性的判定问题等价于$(Ey)R(x, y)$形的谓词的判定问题. 由附注2或由定理54的(第一个)证明及§61例3的最后部分可知，谓词演算的判定问题便具有就这形式的谓词而言最高度的不可解决性(参见§61例3). 因此(合并(1)与(2))任何形式系统内的可证性的判定问题都可化归到谓词演算的(或古典的或直觉主义的)判定问题去. 这便推广了我们的附注(§75)，它说具初等公理的任何公理理论的判定问题可化归于它;但当然,这化归走出了系统之外,通过(2)而达到哥德尔编号,再通过(1)而进入谓词演算,这是非常间接的.

由§37,§72,§73,§75，具相等性的谓词演算内的可证性，等价于在每一个非空域的有效性；因此对于具等式的谓词字母公式的有效性亦没有一个判定过程. 特拉屯勃洛(Trahténbrot)[1950]对每一个非空有限域的有效性亦获得类似的结果.

**化归及特例** 因为有很多的特殊问题(如费玛的"最后定理"§13)及判定问题都化归到谓词演算的判定问题去,所以在这方面曾做了很多工作,结果获得了两类正面的成果：($\alpha$)一般问题的化归，($\beta$)一些特例的解决. 这些结果经常写成它的对偶的集论形式，即写成：需判定的是一谓词字母公式在某非空域上的可满足性问题(§72，§75),而不是它的可证性问题.

($\alpha$) 的很早的例子是斯科林范式(斯科林[1920],希尔柏特-伯尔奈斯[1934],第158页以后). 斯科林的可证性(可满足性)式的范式是一个前束公式(§35 定理19),其中所有存在(全称)量词都在前.任给一个谓词字母公式G,都可能行地找出这种形式的谓词字母公式M(N)使得,在谓词演算内M是可证的(在一给定的域内N是可满足的)当且仅当G亦这样时. 因此,一般的谓词字母公式的可证性(可满足性)的判定问题便化归到斯科林范式的同一问题去了(参见§61后面部分). 范式M(N)一般地不等价于G,但在具有代入规则假设(§37)的谓词演算内,M(¬N)与G(¬G)却可以彼此互相推演出. 斯科林用他的满足性范式来简化累文汉定理的证明并推广它,希尔柏特-伯尔奈斯[1939]应用它以证明哥德尔完备性定理使得在§72 定理36的证明[1]内所提到的形式体系相当简单.

($\beta$) 的一个例子是累文汉[1915](斯科林[1919]加以简化)及贝曼(Behmann)[1922]独立地对下列判定问题的解决,即当谓词字母公式只含有0元或1元的谓词字母时. 等价地,由§34 附注1,对一元谓词演算,即只具0元及1元谓词字母的演算,其判定问题是解决了的(参见§72末,希尔柏特-伯尔奈斯[1934],第179—209页.)

自从邱吉证明没有一般解答(定理54)后,判定问题的化归及特例的解决仍是探索活动的区域. 文献太多无法引于此处,读者可参见邱吉的文献及符号逻辑杂志内的文摘部分(参见本书文献处开首所说). 好些结果见于希尔柏特-伯尔奈斯[1934]及[1939]. 邱吉[1951]则讨论一些特例[2].

公理理论. 我们现在用塔斯基(Tarski[1949]摘要)的方法以探究公理理论的判定问题. 我们将考虑形式化于逻辑演算之上的理论,该逻辑演算可为谓词演算亦可为具相等性的谓词演算. (塔斯基用后者.)为与以前的用语一致起见,我们将说"形式体系$S$",

1) 这个方法实质上是希尔柏特-阿克曼的证明的简单对偶——俄译注.

2) 最近出版了阿克曼[1954]——俄译注.

塔斯基则说"理论 $\mathfrak{T}$"以强调其数学应用.

当逻辑演算为谓词演算时，所谓逻辑常项指下列六个逻辑符号⊃，&，∨，¬，∀，∃；如为具相等性的谓词演算时则兼指=. 构作该系统的项及公式时，除用逻辑常项外，还用到有限多个个体，函数符号及谓词符号（但不用谓词字母)，叫做非逻辑常项. 除却逻辑演算的公设以外，可有有限多个或无穷多个非逻辑公理.

依照塔斯基，一系统M叫做可有限公理化的，如果其非逻辑公理只有有限个或除却有限个以外，其它的都是冗余的(§74 例2). 在这样的系统之中，$S_2$ 叫做 $S_1$ 的扩张(或 $S_1$ 是 $S_2$ 的子系统)，如果凡在$S_1$内可证的公式都在 $S_2$ 内可证；这样，$S_2$ 必须具有 $S_1$ 的一切非逻辑常项，但有时可还有其它. $S_1$ 的一个扩张 $S_2$ 叫做有限扩张，如果 $S_2$ 内的公理除有限个外都在 $S_1$ 内可证. $S_1$ 叫做不可判定的如果 $S_1$ 内可证性的判定问题是不可解决的.

依照塔斯基，$S$ 叫做本性不可判定的，如果 $S$ 是（简单）相容的，而 $S$ 的每一个(简单)相容的扩张都是不可判定的.

罗歇 [1936] 证明，象第四章我们的数论系统(如果它是相容的)便具有这个特性(参见§61定理33). 因而公理集合论的形式体系，冯纽曼[1925]，伯尔奈斯[1937—48]，哥德尔的[1940](如果相容的话) 便都是本性不可判定的（因为它们包含了通常的数论)及可有限公理化的. 莫斯托夫斯基及塔斯基([1949]摘要)首先注意到，有一体系 $S$ 既是本性不可判定的，可有限公理化的，又是足够简单，使得容易在别的理论内作出释义(这话的意义将在下面加以定义). 这样便使得定理 45(b)(c) 所给的塔斯基方法便于应用. 更简单的例子，既是本性不可判定的，又可有限公理化的系统，是 R. 罗宾逊的([1950]摘要)，它除谓词演算外，只有 13 个非逻辑公理，如§49 引理 18b 所述，或者除具相等性的谓词演算外，只有七个非逻辑公理(公理 14,15,18—21 及*137 或*136 的公式)如罗宾逊自己所述. 罗宾孙说，这七个公理任删其一，都会牺牲本性不可判定性.

塔斯基说，两系统 $S_1$ 与 $S_2$ 是相协的 (Compatible)，如果它们

有同样的非逻辑常项而且有一个公共的(简单)相容的扩张. 今再讨论两系统 $S_1$ 与 $S_2$，一般地它们没有相同的非逻辑常项. 我们先就具相等性的谓词演算立论. $S_2$ 叫做可相容地释义于 $S_1$ 内，如果 $S_1$ 与 $S_2$ 有公共的相容扩张 $S_3$，在 $S_3$ 中，对每个为 $S_2$ 所有而为 $S_1$ 所缺的 $n$ 元谓词符号 P(函数符号 f)，下形的 P 的显式定义的公式都是可证的: $P(x_1,\cdots,x_n) \sim F(x_1,\cdots,x_n)$ ($f(x_1,\cdots,x_n) = w \sim F(x_1,\cdots,x_n,w)$，即§ 74 引理 26 的(iii))，这里写出的变元都是不同的，而 $F(x_1,\cdots,x_n)$ ($F(x_1,\cdots,x_n,w)$)只含这些变元自由，至于 F 所含的非逻辑常项，则只是 $S_1$ 中的非逻辑常项，此外或许还有一些新的个体符号. 如果所根据的逻辑演算只是谓词演算，而 $S_2$ 又具有 $S_1$ 所缺的函数符号，则 $S_1$ 还须以＝为其常项，而在 $S_3$ 中还须可以证明关于 $S_1$ 中的谓词符号及函数符号的相等性公理. 这情形可用§ 74 定理 43 的证明中的 $S_1$，$S_2$ 及 $S_3$ 为例 (颇为平凡的例)(但不管(a)或(b)我们都假定相容性).

**定理 45** (a) 如果 $S$ 是不可判定的，并且除个体符号外，$S_1$ 不缺乏 $S$ 的任何常项，又 $S$ 为 $S_1$ 的有限扩张，则 $S_1$ 亦是不可判定的.

(b) 如果 $S$ 是本性不可判定且可有限公理化的，$S_1$ 不缺乏 $S$ 的任何常项，个体符号除外，$S_1$ 与 $S$ 又有公共的相容扩张 $S_3$(在特例，当 $S_1$ 与 $S$ 相协时)，则 $S_1$ 亦是不可判定的.

(c) 如果 $S$ 是本性不可判定且可有限公理化的，而 $S_1$ 可相容地释义于 $S$ 内，则 $S_1$ 是不可判定的. (塔斯基 (Tarski) [1949] 摘要.)

**证明** (a) 根据化归(B)，(C)，(D)，(F)，而(D)只用于 $S_1$ 所缺的 $S$ 中的个体符号. (塔斯基把公理算作一开始便是闭的，并设 $S_1$ 与 $S$ 有相同的常项；这时 (B) (D) 便不需要了.)

(b) 设 $S_2$ 为一系统含有 $S_1$ 及 $S$ 的公理(及常项). 则 $S_2$ 为 $S_3$ 的子系统；因 $S_3$ 为相容的，故 $S_2$ 亦然. $S_2$ 又是 $S$ 的一扩张，因 $S$ 是本性不可判定的，$S_2$ 又是相容的，故 $S_2$ 不可判定. 但 $S_2$ 为 $S_1$ 的有限扩张. 故可应用(a)而把 $S_2$ 作为(a)中的 $S$.

(c) 我们将详细讨论下情形，$S$ 有函数符号 f，而这是 $S$ 的常项中唯一的（可能个体符号除外）被 $S_1$ 所缺的，并以谓词演算作为其逻辑． 如果 $S$ 有多个这样的函数符号我们只须重复使用定理 42 及其引理便成；如果 $S$ 有这样的谓词符号，我们可用§ 74 例 1．这结果对具相等性的谓词演算亦有效，因为（由定理 41(b)）把逻辑作这样的扩张，不过等于作下列的假设：有关各函数符号及谓词符号的相等性公理在各系统中都是有的．（而这不过使得论证更容易些．）

设 $S_3$ 为 $S_1$ 与 $S$ 的公共扩张，如在可相容释义性的定义中所述的（这里的 $S$ 为那里的 $S_2$）．

设 $S_{4a}$ 为 $S_3$ 的子系统，它的常项是 $S_1$ 的常项，f，$S$ 的新增个体符号（如果有的话）以及出现于 $F(x_1, \cdots, x_n, w)$ 中的新增个体符号（如果有的话），它的非逻辑公理是 $S_1$ 的，$S$ 的以及有关 $S_1$ 的谓词符号及函数符号的相等性公理，以及 (iii)．

因为 $S_{4a}$ 是 $S_3$ 的子系统，$S_3$ 是相容的，故 $S_{4a}$ 是相容的．因为 $S_{4a}$ 是 $S$ 的扩张，$S$ 是本性不可判定的，故 $S_{4a}$ 是不可判定的．

根据引理 26，27 及§ 74 附注 2(a)，在 $S_{4a}$ 的非逻辑公理表中，我们可把 $S$ 的每一个非逻辑公理 A 换为它的主要缺 f 变换式 A′，换(iii) 为 (i) 及 (ii)，这绝不影响可证公式集；结果所得的不可判定系统叫做 $S_4$．

由§ 74 定理 42，函数符号及其公理(ii)可在 $S_4$ 中消除，得到一系统 $S_5$，它亦是（由§ 74(Ⅳ)）不可判定的．

但 $S_5$ 的常项只是 $S_1$ 的，可能还有一些个体符号，$S_5$ 又是 $S_1$ 的有限扩张．故由 (a)（以 $S_5$ 为它的 $S$），$S_1$ 是不可判定的．

附注4．在可相容释义性的定义中，关于 $S_3$ 的条件可把(iii)换为，在 $S_3$ 中可以证明一个 f 的显定义公式，形如

$$f(x_1, \cdots, x_n) = t(x_1, \cdots, x_n),$$

这里 $t(x_1, \cdots, x_n)$ 为一项，所含（自由）变元只是写出的变元，其非逻辑常项只是 $S_1$ 的函数符号，可能还有一些个体符号．因为这时

$$t(x_1, \cdots, x_n) = w$$

便可作为 $F(x_1, \cdots, x_n, w)$.

**例 1** 因为罗宾逊系统(叫做 $S$)是本性不可判定的及可有限公理化的,故由(b),每一个以$=$,$\nearrow$,$+$,$\cdot$ 为常项(也许还有别的,如 0)的形式系统 $S_1$,只要其可证公式是表示关于自然数的真命题的,都是不可判定的,如果我们承认:由于真确性可以保证有一个公共扩张 $S_3$(例如,设为具有 $S_1$ 及 $S$ 的公理及常项的一个)是相容的. 要把这个系统 $S_1$ 的不可判定性写成元数学的结果,我们只须作出 $S_3$ 的相容性的元数学证明便够了——由(c)及附注 4,既然以 1 作为个体符号时,由 1 及$+$可显式地定义$\nearrow$,故(至少)对具常项$=$,$+$,$\cdot$ 的系统亦有同样的结果.

由莫斯托夫斯基及塔斯基的各种系统例子,可有限公理化的且本性不可判定的,人们很快便在整数算术,有理数算术,环论,群论,体论,格论及射影几何中获得了一大批的不可判定的数学理论,见莫斯托夫斯基([1949] 摘要),塔斯基([1949a],[1949b] 摘要),J. 罗宾逊([1949] 摘要,[1949]),R. 罗宾逊([1949]摘要).

# 第十五章　相容性,古典系统及直觉主义系统

## §77. 坚钦的形式系统

在§73例2中我们找出一个可以叫做推演A(**x**)的直接方法，使得当$(Ey)R(x, y)$时，在谓词演算中可由$S$的公理而推演A(**x**). 只当$(Ey)R(x, y)$时,这个方法才由公理而引到A(**x**).要证明相容性,即只当$(Ey)R(x, y)$时才可推演出A(**x**)，我们所必须做的是证明：凡用直接方法不能由公理得到A(**x**)时，则在谓词演算中用任何迂迴的方法也不能由公理得到A(**x**). 在递归函数的形式体系中,相应的相容性问题是显然的(§54，§60例3),因为除直接方法外，根据系统的规则没有任何其它方法可由假定公式出发而进行. 这便使得我们询问，关于谓词演算有没有一条定理说,如果一公式是可证的(或可由别的公式推演出的),则它可由某种直接方法证出(或推演出)；换句话说,有没有一条定理,关于证明或推演的范式的定理，而所谓具有范式的证明或推演在某种意义说来是直接的.

这一种定理由坚钦[1934-5*]所获得. 我们将把这定理放在§78中,在§79处则应用它以获得关于§60例2及§73例2的相容性(也用于§76中)，以及关于具有受限制的归纳规则(§42开首处所提到的)的数论系统的相容性. 这些相容性的证明可用别的方法得到，例如阿克曼[1924-5]，冯纽曼[1927]及厄尔勃朗[1930]，[1931-2]它们都是相当长的.坚钦的则是最容易的，因为他的"主要定理"或范式定理(这是该证明的主要部分)可分成一系列的个别情形，每个情形都很容易处理. 这定理的另一应用将见于§80中. 除一些个别地方外，§81与§82和§77—§80无关.

在讨论坚钦的关于谓词演算的证明的范式时，须对推演步骤

作一个不同的分类，即须和第四章谓词演算形式体系所给的公设(§19)有所不同．蕴涵符号⊃的作用须分为二，一是作为间接推论，一是作为被证公式的一个成分的符号．对于前一作用它将被换为一个新形式符号 →(读为“推出”)，它的性质将和在我们的导出规则中非形式符号“$\vdash$”的性质相似．

为了把坚钦关于推演运算的分类弄得明显，可对谓词演算建立一个新形式体系．以前所研究的(第四章以后)关于命题演算及谓词演算的形式体系可叫做希尔柏特型体系，并记之为 $H$．明确些说，$H$ 可指多个体系中的一个，可指命题演算的或谓词演算的，古典说法的或直觉主义说法的(§23)，其中的‘项’及‘公式’亦可指不同的意义(§17，§25，§31，§37，§72—§76)．同样，对现在引入的坚钦型系统 $G1$ 和以后引入的 $G2$，$G3$ 及 $G3a$ 亦可作这样的各种选择．

被 $G1$ 的变形规则或推演规则所施行的客体并非系统 $H$ 的公式，而是由系统 $H$ 的公式依照新形成规则所组成的新客体，可叫做‘叙列’．(坚钦用“Sequenz”，今译“叙列”或“矢列”，至于“序列”则指任何系列，德文叫做 “Folge”.)一叙列是指下形的形式表达式 $A_1, \cdots, A_l \to B_1, \cdots, B_m$，这里 $l, m \geq 0$，而 $A_1, \cdots, A_l, B_1, \cdots B_m$ 为公式，在叙列 $A_1, \cdots, A_l \to B_1, \cdots, B_m$ 中，$A_1, \cdots, A_l$ 这部分叫做它的前件，而 $B_1, \cdots, B_m$ 这部分叫做它的后件．

当 $l, m \geq 1$ 时，$G1$ 中叙列 $A_1, \cdots, A_l \to B_1, \cdots, B_m$ 便和 $H$ 中公式 $A_1 \& \cdots \& A_l \supset B_1 \vee \cdots \vee B_m$ 具有相同的释义． 可以推广至于 $l = 0$ 或 $m = 0$ 的情形，只须当 $l = 0$ 时把 $A_1 \& \cdots \& A_l$(“空合取式”)看作真，而当 $m = 0$ 时把 $B_1 \vee \cdots \vee B_m$(“空析取式”)看作假便成．

一公式叫做出现于(或属于)叙列 $A_1, \cdots, A_l \to B_1, \cdots, B_m$，如果它是 $l + m$ 个公式 $A_1, \cdots, A_l, B_1, \cdots, B_m$ 的出现之一；同样可说一公式出现于前件或后件． 例如，在叙列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} \& \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}$ 中，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A} \& \boldsymbol{B}$ 出现于前件，而 $\boldsymbol{B}$ 则否．一变元(符号，量词等)出现于一叙列(前件、后件)中，如果它出现于某公式中，而该公式出现于叙列(前件、后件)中．

和第五章一样，我们用大写希腊字母“$\Gamma$”，“$\Delta$”，“$\Theta$”，“$\Lambda$”等表示零个或多个公式的有限序列，但现在还用作前件(后件)，或前件(后件)的一部分(包括专作分开之用的形式逗号在内).

**形式系统 G1 的公设**

约定条件：A，B，C，D 为公式；$\Gamma$，$\Delta$，$\Theta$，$\Lambda$ 为 0 个或多个公式的有限序列；x 为一变元；A(x)为一公式；t 为一项对 A(x)的 x 是自由的；b 是一变元对 A(x) 的 x 是自由的并且(除非 b 为 x)不自由出现于 A(x) 中.

关于变元的限制(对两个公设而作的，见表上所列)：公设的应用变元 b 不得自由出现于结论[1]中. (当 A(x) 不含自由的 x 时，则不管 b 为何，A(b) 都是 A(x)；在这情况下，我们约定，在作分析时我们选用一个不自由出现于结论中的 b，使得这限制可以满足.)

*G*1 的直觉主义系统与古典系统之间的差异在于有两个公设受到了直觉主义的限制.

公理模式

$$C \to C.$$

命题演算中逻辑的推论规则.

| 引入 | 于后件. | 于前件. |
|---|---|---|
| $\supset$ | $\dfrac{A, \Gamma \to \Theta, B}{\Gamma \to \Theta, A \supset B.}$ | $\dfrac{\Delta \to \Lambda, A \qquad B, \Gamma \to \Theta}{A \supset B, \Delta, \Gamma \to \Lambda, \Theta.}$ |
| & | $\dfrac{\Gamma \to \Theta, \quad A, \Gamma \to \Theta, B}{\Gamma \to \Theta, A \& B.}$ | $\dfrac{A, \Gamma \to \Theta}{A \& B \quad \Gamma \to \Theta.}$ $\quad \dfrac{B, \Gamma \to \Theta}{A \& B, \Gamma \to \Theta.}$ |
| $\vee$ | $\dfrac{\Gamma \to \Theta, A}{\Gamma \to \Theta, A \vee B.}$ $\quad \dfrac{\Gamma \to \Theta, B}{\Gamma \to \Theta, A \vee B.}$ | $\dfrac{A, \Gamma \to \Theta \qquad B, \Gamma \to \Theta}{A \vee B, \Gamma \to \Theta.}$ |
| $\neg$ | $\dfrac{A, \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \neg A,}$ | $\dfrac{\Gamma \to \Theta, A}{\neg A, \Gamma \to \Theta.}$ |

对直觉主义系统 $\Theta$ 须为空.

---

1) 应该补入下列的定义：在各规则(逻辑的或结构的)中，在横线上的叙列叫做该规则的前提，在横线下的叙列叫做该规则的结论——译者注.

谓词演算中补充的逻辑的推论规则。

引入 于后件。 于前件。

∀ $\dfrac{\Gamma \to \Theta, A(b)}{\Gamma \to \Theta, \forall x A(x),}$ $\dfrac{A(t), \Gamma \to \Theta}{\forall x A(x), \Gamma \to \Theta.}$

须受关于变元的限制。

∃ $\dfrac{\Gamma \to \Theta, A(t)}{\Gamma \to \Theta, \exists x A(x).}$ $\dfrac{A(b), \Gamma \to \Theta}{\exists x A(x), \Gamma \to \Theta,}$

须受关于变元的限制。

结构的推论规则。

在后件中 在前件中

细弱: $\dfrac{\Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, C,}$ $\dfrac{\Gamma \to \Theta}{C, \Gamma \to \Theta.}$

对直觉主义系统，$\Theta$ 须空。

缩短。 $\dfrac{\Gamma \to \Theta, C, C}{\Gamma \to \Theta, C.}$ $\dfrac{C, C, \Gamma \to \Theta}{C, \Gamma \to \Theta.}$

互换。 $\dfrac{\Gamma \to \Lambda, C, D, \Theta}{\Gamma \to \Lambda, D, C, \Theta.}$ $\dfrac{\Delta, D, C, \Gamma \to \Theta}{\Delta, C, D, \Gamma \to \Theta.}$

分割。 $\dfrac{\Delta \to \Lambda, C \qquad C, \Gamma \to \Theta}{\Delta, \Gamma \to \Lambda, \Theta.}$

就古典系统 $G1$ 言，除却两个 ⊃ 规则，其余各公设都是对偶地对称的。& 规则与 ∨ 规则互为对偶，若把 & 与 ∨ 互换，→ 与 ← 互换，它们便彼此互换了。同样，∀ 规则与 ∃ 规则是对偶的。公理模式，¬ 规则及四种结构规则都是自己对偶的。

左边一行的规则叫做后件规则；简单地分别记为“→⊃”，“→&”，“→∨”，“→¬”，“→∀”，“→∃”，“→弱”，“→短”，“→换”。右边一行的规则叫做前件规则，并记为“⊃→”“&→”等等。

逻辑规则用以引入逻辑符号，有时引入后件(左行)有时引入前件(右行)，用以引入逻辑符号的那个公式叫做主要公式；在前提中明白写出的一个或两个公式叫做旁边公式。

**例 1** 上面右行第一个规则叫做“⊃引前件”或“⊃前”规则或

简称“⊃→”。主要公式是 $A\supset B$，第一前提以 A 为旁边公式，第二前提以 B 为旁边公式。

$G1$ 的逻辑规则在形式上多少和 § 23 定理 2 的各个导出规则相类似，不过以无定义的形式符号 → 代替有定义的元数学符号“⊢”。在后件的引入相应于定理 2 中的引入规则，而在前件的引入则相应于定理 2 的消去规则。公理模式及结构规则相应于 § 20 引理 5 中所列的⊢的一般性质。

在 $G1$ 内作出证明时采用树形（§ 24 末）。并用“⊢S”，S 为一叙列，来表示叙列 S 是可证的。

在作出证明（或其一部分）时，如果要把某一前提的结构规则（按，即弱短换三规则——译者）的应用都一一写出，那将是非常麻烦的。我们约定，用双线（写或不写别的规则）代表 0 个或多个细弱（“弱”）缩短（“短”）及互换（“换”）的应用。（如兼写有其它的规则，则指先施行其它规则）。

**例 2** 对任何公式 A,B,C 言，(a) 与 (b) 都是在 $G1$ 内的直觉主义的证明，而 (c) 只是古典的证明。

(a)

$$B\to B \quad C\to C$$
———————— ⊃→
$$A\to A \quad B\supset C,\ B\to C$$
════════ ⊃→
$$A\to A \quad B,\ A\supset(B\supset C),\ A\to C$$
════════ ⊃→
$$A,\ A\supset(B\supset C),\ A\supset B\to C$$
———————— →⊃
$$A\supset(B\supset C),\ A\supset B\to A\supset C$$
———————— →⊃
$$A\supset B\to(A\supset(B\supset C))\supset(A\supset C)$$
———————— →⊃
$$\to(A\supset B)\supset((A\supset(B\supset C))\supset(A\supset C)).$$

(b)

$$A\to A$$
════════ ¬→
$$A,\ \neg A\to B$$
———————— →⊃
$$\neg A\to A\supset B$$
———————— →⊃
$$\to\neg A\supset(A\supset B).$$

(c)

$$A\to A$$
———————— →¬
$$\to A,\ \neg A$$
———————— ¬→
$$\neg\neg A\to A$$
———————— →⊃
$$\to\neg\neg A\supset A.$$

由 $G1$ 的公设表，我们可由归纳而核验：

**引理 32a** 如果在直觉主义系统 $G1$ 内有 $\vdash \Gamma \to B_1, \cdots, B_m$ 则 $m = 0$ 或 $m = 1$。

**引理 32b** 如果在直觉主义系统 $G1$ 内不用规则 $\neg \to$ 而有 $\vdash \Gamma \to B_1, \cdots, B_m$ 则 $m = 1$[1]。

引理 32a 表示直觉主义系统 $G1$ 与古典系统 $G1$ 之间的整个区别；但注意，为了要保证这个区别，我们只在直觉主义系统 $G1$ 内对两个公设加上限制便够了。

我们的第一个目的是证明（如坚钦那样）系统 $G1$ 等价于我们以前的系统 $H$，其意指，对任何公式 E，在 $G1$ 内有 $\vdash \to E$ 当且仅当在 $H$ 内有 $\vdash E$。这结果将为下列两定理的特例，作为 $\Gamma$ 为空时的特例。

**定理 46** 如果在 $H$ 内有 $\Gamma \vdash E$ 而一切变元都保持固定，则在 $G1$ 内有 $\vdash \Gamma \to E$。如果在所给的 $H$ 内的推演只用到关于 $\supset$，&，$\vee$，$\neg$，$\forall$，$\exists$ 中某些符号的公设时，在 $G1$ 内的相应证明也只用到关于 $\supset$[2]的以及关于同样符号的逻辑规则。

**证明** 就 $H$ 内所给由 $\Gamma$ 到 E 的推演的长度而作串值归纳．按照对 E 的所给推演的分析而分成 16 个情形如下．

情形 0：E 是公式 $\Gamma$ 中之一．则下面便是在 $G1$ 内 $\Gamma \to E$ 的证明．

$$\frac{E \to E}{\Gamma \to E}.$$

其余的情形则按 $H$ 的公设而编号为 1a，1b，2，3，4a，4b，5a，5b，6，7，8 或 8′，9—12。

---

1）由这些引理可见，如果系统是直觉主义的而 $\neg \to$ 不被应用，则 $\to \neg$ 亦不能应用（因此，如果 $\to \neg$ 被应用了，则 $\neg \to$ 亦必被应用.）——俄译注（按，若 $\neg \to$ 不应用，$\to$ 弱亦不能应用——译者）.

2）在古典系统 $H$ 内对含有 & 及 $\neg$（或 $\vee$ 及 $\neg$）但没有 $\supset$ 的推演言，在 G1 内可以避免使用 $\to \supset$ 规则；例如（对 & 言），如果把 $\supset$ 依 *59 表以 $\neg$ 及 &，则规则 $\to \supset$ 可改用下列的推演，先用 $\neg \to$，再把 $\neg B, A, \Gamma \to \Theta$ 变成 $A \& \neg B, \Gamma \to \Theta$（这需要两次 &→，换→，短→）再用 $\to \neg$．代替规则 $\supset \to$ 的，除互换外还要求下列的推演 $\to \neg$，弱→，→弱，→&，$\neg \to$——俄译注.

情形 1b：E 是根据公理模式 1b 而得的公理，即有公式 A，B，C 使 E 为 $(A\supset B)\supset((A\supset(B\supset C))\supset(A\supset C))$．在例 2(a) 中尾叙列[1]的 → 之前写入 $\Gamma$，并把其上的线双重之(表示细弱)，这样便使该树形成为在 $G1$ 内 $\Gamma\rightarrow E$ 的证明．

情形 2：E 是由前面两个公式根据规则 2 而得的直接后承，即，有两个公式 A，B 使得 E 为 B，而前面两个公式为 A 及 $A\supset B$．根据归纳假设，在 $G1$ 内有 $\Gamma\rightarrow A$ 及 $\Gamma\rightarrow A\supset B$ 的证明．把这两证明接到下列的树形上，我们便获得 $\Gamma\rightarrow B$ 的证明了．

$$\dfrac{\Gamma\rightarrow A\qquad \dfrac{\Gamma\rightarrow A\supset B\qquad \dfrac{A\rightarrow A\quad B\rightarrow B}{A\supset B,\ A\rightarrow B}\ \supset\rightarrow}{A,\ \Gamma\rightarrow B}\ \text{割}}{\Gamma\rightarrow B.}\ \text{割}$$

情形 8 或 8ᴵ：分别见例 2(c) 或 (b)．

情形 9：E 是前一公式根据规则 9 而得的直接后承．故 E 为 $C\supset\forall xA(x)$，而前一公式为 $C\supset A(x)$，这里 C 不含自由的 x．设在由 $\Gamma$ 到 E 的所给推演中前一公式 $C\supset A(x)$ 所依赖的假定公式组成一子序列 $\Gamma_1$ ($\Gamma$ 的子序列)．若在所给的推演中删去在公式 $C\supset A(x)$ 以后的全部公式，以及虽在公式 $C\supset A(x)$ 以前但却依赖于 $\Gamma_1$ 以外的假定公式，这样我们便得到一个由 $\Gamma_1$ 到 $C\supset A(x)$ 的推演．对这个推演而应用归纳假设，可知在 $G1$ 内有 $\Gamma_1\rightarrow C\supset A(x)$ 的证明．因为在所给的由 $\Gamma$ 到 $C\supset\forall xA(x)$ 的推演中，所有变元都是保持固定的，所以在 $\Gamma_1$ 的公式中没有一个是自由地含有规则 9 的应用变元 x 的．由于这点再加以 C 不含自由的 x，便可以核验在下面的 $\rightarrow\forall$ 中，关于变元的限制是满足的．

$$\dfrac{\Gamma_1\rightarrow C\supset A(x)\qquad \dfrac{C\rightarrow C\quad A(x)\rightarrow A(x)}{C\supset A(x),\ C\rightarrow A(x)}\ \supset\rightarrow}{}\ \text{割}$$

1) 尾叙列可仿以前一证明或推演的尾公式而定义——译者注．

$$\cfrac{\cfrac{C,\ \Gamma_1 \to A(x)}{C,\ \Gamma_1 \to \forall x A(x)} \to \forall}{\Gamma_1 \to C \supset \forall x A(x).} \to \supset$$

情形 12：E 是前一公式根据规则 12 而得的直接后承．与情形 9 对偶．

现在我们引入将用于定理47中的记号．设 F 为一个特殊的闭公式．又设 $\Theta$ 为 $B_1, \cdots, B_m$ $(m \geqslant 0)$．则命 $\Theta'$ 为 $B_1, \cdots, B_{m-1}$（如 $m \leqslant 1$ 则为空），命 $\Theta''$ 为 $B_m$（如果 $m \geqslant 1$）或 $\neg(F \supset F)$（如果 $m = 0$），命 $\neg\Theta$ 为 $\neg B_1, \cdots, \neg B_m$，而 $\neg\Theta'$ 为 $\neg B_1, \cdots, \neg B_{m-1}$（如果 $m \leqslant 1$ 则为空）．

**系 1** 如果在 $H$ 内 $\Gamma, \neg\Theta' \vdash \Theta''$ 而一切变元保持固定，对直觉主义系统言并设 $m \leqslant 1$，则在 $G1$ 内有 $\vdash \Gamma \to \Theta$．

就 $m = 1, m = 0$ 或 $m > 1$ 而穷举．

**系 2** 对古典（直觉主义）系统言，当 $l, m \geqslant 1$ $(l \geqslant 1, m = 1)$ 时：如果在 $H$ 内 $\vdash A_1 \& \cdots \& A_l \supset B_1 \vee \cdots \vee B_m$，则在 $G1$ 内 $\vdash A_1, \cdots, A_l \to B_1, \cdots, B_m$．

**定理 47** 如果在 $G1$ 内有 $\vdash \Gamma \to \Theta$，则在 $H$ 内 $\Gamma, \neg\Theta' \vdash \Theta''$，而一切变元保持固定．（在特例；如果在 $G1$ 内 $\vdash \Gamma \to E$，则在 $H$ 内 $\Gamma \vdash E$ 而一切变元保持固定．）

更进一步，对直觉主义（古典）系统言，当所给的 $G1$ 内的证明只用到关于符号 $\supset, \&, \vee, \neg, \forall, \exists$ 中的某些逻辑规则时，在 $H$ 内的相应推演可只用 $\supset$ 公设[1]（$\supset$ 及 $\neg$ 公设）以及对同样符号的公设，但当所用到的符号有 $\forall$ 而无 $\&$ 时，则 $\forall$ 公设须包含 §24 引理 11 中的公理模式 9a．

**证明** 要证明本定理的第一句，我们就 $G1$ 中所给的关于 $\Gamma \to \Theta$ 的证明的高度（即层数）而作串值归纳，根据在这证明中最

1）对古典系统 $G1$ 言，仍适用前面一个脚注——俄译注．（译者按，如果对古典 $H$ 系统的 $\supset$ 公设加强使包含 $((A \supset B) \supset A) \supset A$，则对古典 $H$ 系统说也不必兼用到 $\neg$ 公设，只兼用 $\supset$ 公设便够了．此外如对 $\forall$ 公设略作更改，则最后一句也不必要．见上 §24 引理 11 处的脚注．）

后所使用的 $G1$ 的公设而穷举.

当我们讨论了各情形后，本定理第二部分所增加的内容便可以得到核验了. 在各情形及子情形中，除却标有一个或两个星号的以外，要证明* (demonstration) 相应的推演的存在，可由下法而几乎立刻得到结果：用 $\vdash$ 的一般性质并且当 $G1$ 中用到一逻辑规则时便应用 § 23 定理 2 中相应的导出规则(以及¬规则)，当 $G1$ 中用到 $\to\forall$ 或 $\exists\to$ 时，便应用 § 20 引理 10 中的相应的强规则. 对于标有一个星号的情形，我们还须用到直觉主义的¬规则(§23，¬引及弱¬消)，有时偶尔用到 § 26*1. 对于标有两个星号的情形，我们还须用到古典的(强)¬消规则 (定理 2). 下面所没有讨论到的九个情形，都无需任何子情形亦无须标星号.

情形 1：公理模式. 由$\vdash$的一般性质可知在 $H$ 内有 $C\vdash C$.

情形 2：$\to\supset$. 根据归纳假设可知，在 $H$ 中 $A, \Gamma, \neg\Theta\vdash B$ 而一切变元保持固定，这时我们必须推出 $\Gamma, \neg\Theta\vdash A\supset B$. 这可由$\supset$引而得.

情形 3：$\supset\to$. 子情形 1：$\Lambda$ 为空或 $\Theta$ 非空. 则 $(\Lambda, \Theta)''$ 为 $\Theta''$. 由归纳假设，$\Delta, \neg\Lambda\vdash A$ 及 $B, \Gamma, \neg\Theta\vdash\Theta''$. 故用$\supset$消可得 $A\supset B, \Delta, \Gamma, \neg\Lambda, \neg\Theta'\vdash\Theta'$. 子情形 2**：$\Lambda$ 不空而 $\Theta$ 空. 由归纳假设，$\Delta, \neg\Lambda\vdash A$ 及 $B, \Gamma\vdash\neg(F\supset F)$. 由$\supset$消得 $A\supset B, \Delta, \Gamma, \neg\Lambda\vdash\neg(F\supset F)$. 用 *1 得 $A\supset B, \Delta, \Gamma, \neg\Lambda\vdash F\supset F$. 故由¬引及¬消得 $A\supset B, \Delta, \Gamma, \neg\Lambda'\vdash\neg\neg\Lambda''\vdash\Lambda''$.

情形 10*：$\to\neg$. 子情形 1：$\Theta$ 空. 由 $A, \Gamma\vdash\neg(F\supset F)$. 根据 *1 及¬引可推得 $\Gamma\vdash\neg A$. 子情形 2：$\Theta$ 不空. 由 $A, \Gamma, \neg\Theta'\vdash\Theta''$ 根据¬引可推得 $\Gamma, \neg\Theta', \neg\Theta''\vdash\neg A$.

情形 11：$\neg\to$. 子情形 1*. $\Theta$ 空，用弱¬消. 子情形 2**：$\Theta$ 不空. 用¬引及¬消.

情形 12：$\to\forall$. 由归纳假设，$\Gamma, \neg\Theta\vdash A(b)$ 而一切变元保持固定. 由强 $\forall$ 引，$A(b)\vdash^{b}\forall xA(x)$. 故 $\Gamma, \neg\Theta\vdash\forall xA(x)$，而一切变元(b 在内)均保持固定，因为由对 $\to\forall$ 作所的关于变元的限制 $\Gamma$ 与 $\Theta$ 是不含自由的 b 的.

情形 16： 任何一个具一前提的结构规则. 设前提为 $\Gamma \to \Theta$ 而结构为 $\Gamma^\dagger \to \Theta^\dagger$. 则 $\Gamma^\dagger(\Theta^\dagger)$ 乃由 $\Gamma(\Theta)$ 经过互换公式，删去重复公式或引入新公式而得. 子情形 1： $\Theta^\dagger$ 为 $\Theta$. 由 $\Gamma, \neg\Theta' \vdash \Theta''$ 根据 $\vdash$ 的一般性质可推得 $\Gamma^\dagger, \neg\Theta' \vdash \Theta''$. 子情形 2： $\Theta^\dagger$ 非 $\Theta$ 但 $\Theta$ 为空. 由归纳假设，$\Gamma \vdash \neg(F \supset F)$，故由 $\vdash$ 的一般性质，$\Gamma^\dagger, \neg\Theta^{\dagger\prime} \vdash \neg(F \supset F)$. 故由 *1 及弱$\neg$消，$\Gamma^\dagger, \neg\Theta^{\dagger\prime} \vdash \Theta^{\dagger\prime\prime}$. 子情形 3**： $\Theta^\dagger$ 非 $\Theta$ 而 $\Theta$ 又非空. 这时 $\Theta^\dagger$ 亦非空，并且 $\Theta$ 与 $\Theta^\dagger$ 中至少有一个包含多过一个公式的[1]. 由归纳假设，$\Gamma, \neg\Theta' \vdash \Theta''$. 由弱$\neg$消，$\Gamma, \neg\Theta', \neg\Theta'' \vdash \neg(F \supset F)$，即 $\Gamma, \neg\Theta \vdash \neg(F \supset F)$. 故由$\vdash$的一般性质，$\Gamma^\dagger, \neg\Theta^\dagger \vdash \neg(F \supset F)$，即 $\Gamma^\dagger, \neg\Theta^{\dagger\prime}, \neg\Theta^{\dagger\prime\prime} \vdash \neg(F \supset F)$. 故由 *1，$\neg$引及$\neg$消可得 $\Gamma^\dagger, \neg\Theta^{\dagger\prime} \vdash \Theta^{\dagger\prime\prime}$.

情形 17： 分割. 和情形 3 同法处理，不过不用$\supset$消. 子情形 1： $\Lambda$ 空或 $\Theta$ 非空. 子情形 2**： $\Lambda$ 非空而 $\Theta$ 空.

要检验本定理的第二部分，先设 $G1$ 内所给的 $\Gamma \to \Theta$ 的证明是直觉主义的并且不用到$\neg$规则，这里 $\Theta$ 为 $B_1, \cdots, B_m$. 用引理 32b，可见有一星号或两星号的情形或子情形绝不会出现. 根据 § 24 引理 11，并注意我们处理无星号的情形的方式，便推得结果了.

如果该证明虽用到$\neg$规则但该证明仍是直觉主义的，由于本定理容许在$H$的相应推演中可以使用直觉主义的$\neg$公设，因此我们只须用引理 32a 核验：标有双星号的情形或子情形无一出现便成了.

**系** 当 $l, m \geq 1$ 时（故对直觉主义系统言则是 $m = 1$ 时）：如果在 $G1$ 内 $\vdash A_1, \cdots, A_l \to B_1, \cdots, B_m$ 则在 $H$ 内 $\vdash A_1 \& \cdots \& A_l \supset B_1 \vee \cdots \vee B_m$.

## § 78. 坚钦的范式定理

**例 1** 在证明 (a) 中使用了分割，而 (b) 则是同一叙列的证明

1) 依照引理 32a，在 $G1$ 内 $\Gamma^\dagger \vdash \Theta^\dagger$ 的证明是古典的——俄译注.

但不用分割.

(a)

$$\dfrac{\dfrac{A(b)\to A(b)}{A(b)\to\exists xA(x)}\ \to\exists \qquad \dfrac{\exists xA(x)\to\exists xA(x)}{\exists xA(x),\ \neg\exists xA(x)\to}\ \neg\to}{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A(b),\ \neg\exists xA(x)\to}{\neg\exists xA(x)\to\neg A(b)}\ \to\neg}{\neg\exists xA(x)\to\forall x\neg A(x)}\ \to\forall}{\to\neg\exists xA(x)\supset\forall x\neg A(x).}\ \to\supset}\ \text{割}$$

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A(b)\to A(b)}{A(b)\to\exists xA(x)}\ \to\exists}{A(b),\neg\exists xA(x)\to}\ \neg\to}{\neg\exists xA(x)\to\neg A(b)}\ \to\neg}{\neg\exists xA(x)\to\forall x\neg A(x)}\ \to\forall}{\to\neg\exists xA(x)\supset\forall x\neg A(x).}\ \to\supset$$

第一个证明中右分支的前件处用到一个不必要的复杂公式 $\exists xA(x)$，这个混杂由于分割而解除. 第二个证明直接进行，不引入以后需要解除的复杂公式.

不用分割的证明在某种意义上说可说是具有范式的证明，其重要性可由子公式的性质（下文的引理 33a）而得到进一步的强调.

对一公式我们定义其'子公式'如下.

1. 如果 A 是一公式，则 A 是 A 的子公式. 2—4. 如果 A 与 B 为公式，则 A 的子公式及 B 的子公式都是 A⊃B, A&B, A∨B 的子公式. 5. 如果 A 是一公式，则 A 的子公式是 ¬A 的子公式. 6—7, 如果 x 为一变元, A(x) 为公式, 而 t 为一项对 A(x) 中的 x 是自由的，则 A(t) 的子公式都是 ∀xA(x) 及 ∃xA(x) 的子公式. 8. 只有由 1—7 所给的才是一公式的子公式.

**例 2** $A\supset(\neg A\supset B)$ 的子公式为下列五个公式:

$$A\supset(\neg A\supset B),\ A,\ \neg A\supset B,\ \neg A,\ B.$$

**例 3** (a) $\forall b\forall c(B(c)\&A(b))$ 的子公式为下列各公式：$\forall b\forall c(B(c)\&A(b))$，$\forall c(B(c)\&A(\mathrm{t}))$，$B(\mathrm{u})\&A(\mathrm{t})$，$B(\mathrm{u})$，$A(\mathrm{t})$，这里 t 为任何不含自由的 $c$ 的项而 u 为任何项. (b) $A(c)$ 的唯一子公式为 $A(c)$.

由 $G1$ 的公设表我们可以用归纳而核验以下事实：

**引理 33a** 设有 $G1$ 的任何不用分割的证明，则在其任何叙列中所出现的公式都是出现于尾叙列的某个公式的子公式. (子公式性质).

**引理 33b** $G1$ 的一个证明，如果不用分割，不用$\supset$规则或$\neg$规则，则其中任何叙列的前件(后件)所出现的每个公式都是出现于尾叙列的前件(后件)的某公式的子公式.

坚钦的"主要定理"或范式定理(下文的定理48)说，任何叙列，只要其中没有变元是既自由出现又约束出现的，则恒可从其证明中消去分割.

对尾叙列作出不准有变元既自由出现又约束出现的限制，并没有减低本定理的用处. 因为，设有一些叙列，其中的确有些变元既自由出现又约束出现，则把这些公式换为它们的相合式以后，我们得到满足本限制的叙列，且新叙列可证当且仅当原叙列可证(由定理 47，§33 引理 15b，§26* 18a 及 *18b，定理 46 系 1). 这限制是必要的，如下例所示.

**例 4** 试考虑下证明：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A(b)\to A(b)}{B(c)\&A(b)\to A(b)}\,\&\to}{\forall c(B(c)\&A(b))\to A(b)}\,\forall\to}{\forall b\forall c(B(c)\&A(b))\to A(b)}\,\forall\to}{\forall b\forall c(B(c)\&A(b))\to\forall bA(b)}\,\to\forall \qquad \dfrac{A(c)\to A(c)}{\forall bA(b)\to A(c)}\,\forall\to}{\forall b\forall c(B(c)\&A(b))\to A(c).}\,割$$

这里的分割是不能消除的. 因为根据引理 33a，在 $\forall b\forall c(B(c)\&A(b))\to A(c)$ 的任一证明中，如果不用分割，则该证明中任一叙列不可能含有符号$\supset$及$\neg$；故$\supset$规则及$\neg$规则不能使用. 故可

再应用引理 33b. 但例 3 中的两组子公式之中并没有公共的公式,所以没有一条公理可以满足引理 33b 的要求.(这例子所用的方法在 § 80 将有进一步的发展.)

在证明范式定理时,我们把形式系统 $G1$ 中两个公设更改如下,从而得到另一形式系统 $G2$.

分割改为下述的规则叫做"混合"(以下在征引时省称"混"——译者). 这里M是一公式(混合公式); $\Pi, \Phi, \Sigma, \Omega$ 为 0 个或多个公式组而 $\Phi$ 及 $\Sigma$ 均含有 M; 从 $\Phi$ 及 $\Sigma$ 中删去M的一切出现后所得的公式组分别记为 $\Phi_M$ 及 $\Sigma_M$.

$$\frac{\Pi \to \Phi \quad \Sigma \to \Omega}{\Pi, \Sigma_M \to \Phi_M, \Omega.} \text{混}$$

**例 5** 下面便是一混合.

$$\frac{A \to B \quad B \vee C, B, D, B \to}{A, B \vee C, D \to} \text{混}$$

$G1$ 的规则 $\supset \to$ (为分别起见叫做 $\supset \to_1$) 将被换为一个新的 $\supset$ 规则($\supset \to_2$),就古典系统言,这是由凯托年 (Ketonen) [1944] 提出的. 这里的 A, B, $\Gamma$, $\Theta$ 同上;对古典系统言 $\Theta^\circ$ 为 $\Theta$,对直觉主义系统言 $\Theta^\circ$ 为空.

$$\frac{\Gamma \to \Theta^\circ, A \quad B, \Gamma \to \Theta}{A \supset B, \Gamma \to \Theta.} \supset \to_2$$

利用弱短换步骤,任何分割可改用混合(见下左),反之亦然(见下右).

$$\cfrac{\cfrac{\Delta \to \Lambda, C \quad C, \Gamma \to \Theta}{\Delta, \Gamma_C \to \Lambda_C, \Theta} \text{混}}{\Delta, \Gamma \to \Lambda, \Theta.} \qquad \cfrac{\cfrac{\Pi \to \Phi}{\Pi \to \Phi_M, M} \quad \cfrac{\Sigma \to \Omega}{M, \Sigma_M \to \Omega}}{\Pi, \Sigma_M \to \Phi_M, \Omega.} \text{割}$$

仿此,任何 $\supset \to_1$ 都可改用 $\supset \to_2$ (见下),注意由引理 33a 可知,就直觉主义情形言 $\Lambda$ 是空的; 反之 $\supset \to_2$ 可改用 $\supset \to_1$ (读者自证).

$$\cfrac{\cfrac{\Delta \to \Lambda, A}{\Delta, \Gamma \to \Lambda, \Theta^\circ, A} \quad \cfrac{B, \Gamma \to \Theta}{B, \Delta, \Gamma \to \Lambda, \Theta}}{A \supset B, \Delta, \Gamma \to \Lambda, \Theta.} \supset \to_2$$

这便证明了这两个更改并不影响可证叙列集，我们将在引理 34 叙述得更详细些.

$G1$ 或 $G2$ 中一证明叫做具有纯洁变元性质或为一个纯洁变元证明，如果在该证明中没有任何变元既自由出现又约束出现，并且每当使用 $\to\forall$ 或 $\exists\to$ 时，其应用变元 b 只在该应用的结论以前的叙列中出现（如果 A(x) 不含自由的 x，则在作分析时我们便选用满足这条件的变元 b).

**引理 34** 如果在 $G1$ 内 $\vdash\!\!-\Gamma\to\Theta$，则在 $G2$ 内 $\vdash\!\!-\Gamma\to\Theta$；反之亦然. $G2$ 的证明中含有混合只当 $G1$ 的证明中含有分割时；反之亦然. 两个证明中使用完全同名的逻辑规则. 任一证明如果具有纯洁变元性质则另一证明亦然. 引理 32a—33b（上面是就 $G1$ 及分割而叙述的）对 $G2$ 及混合亦同样有效.

**引理 35** 在 $G1$ 或 $G2$ 中，当应用一公设时，如果在应用叙列中（对公理模式言这是指公理，对推理规则言这是指其前提及结论）把一变元在它的各次自由出现处（或在它的各次约束出现处）改为具下性质的另一变元：在所考虑的各叙列中既不自由出现也不约束出现，则结果仍是对同一公设的应用.

就 $\to\forall$ 及 $\exists\to$ 的应用言，引理 35 所以成立由于 b 及 x 不必是同一变元之故（在系统 $H$ 的相应规则 9 及 12 中，它们必须相同.）

**引理 36** 在 $G1$ 或 $G2$ 中，当应用一公设时，如果在应用叙列中把一变元(的自由出现)代以一项，结果仍是对同一公设的应用，不过就 $\to\forall$ 及 $\exists\to$ 的情形言，须(i)该项并不含有该应用变元 b，(ii) 所代的变元并不是应用变元 b，而就任何情形言均须(iii)对叙列各公式的变元言该项须是自由的.

条件(i)保证了 $\to\forall$ 的及 $\exists\to$ 的关于变元的限制仍然满足.

**引理 37** 给出 $G1$ 或 $G2$ 内一叙列的证明，如果该叙列内没有变元是既自由出现又约束出现的，则可把证明中各叙列的变元的自由出现及约束出现更改（而各公设的应用仍变成同一公设的应用），使得我们仍得到原来叙列的证明，在这证明中没有变元是

既自由出现又约束出现的.

**证明** 设$x_1,\cdots,x_n$为不同的变元,它们自由出现于尾叙列而约束出现于证明(的别处)中,而$a_1,\cdots,a_p$为别的变元,同时自由出现及约束出现于证明中. 设$y_1,\cdots,y_n,b_1,\cdots,b_p$为不同的变元,不出现于证明之中. 今只把$x_1,\cdots,x_n$的约束出现分别改为$y_1,\cdots,y_n$,只把$a_1,\cdots,a_p$的自由出现分别改为$b_1,\cdots,b_p$. 由引理35,所得的图式仍是一证明;根据假设,在尾叙列中没有变元是既自由又约束的,故尾叙列不改变.

**引理 38** 给出$G1$或$G2$的一证明其中没有变元是既自由出现又约束出现的,则只须把其中自由出现的变元加以更改(每个公设的应用仍变成同一公设的应用),我们可得到同一叙列的纯洁变元的证明.

**证明** 设在所给的$G1$或$G2$的证明内恰巧有$q$次应用了规则$\rightarrow\forall$及$\exists\rightarrow$,相应地以变元$c_1,\cdots,c_q$(不必相异)为应用变元b. 选取任何$q$个不出现于所给证明之内的不同变元$d_1,\cdots,d_q$. 先考虑最高的一个应用(即没有其它应用在它之上),设其应用变元b为$c_1$. 在该应用的结论(按即在这一次应用时该规则的结论——译者)以前的所有叙列中把$c_1$换为$d_1$,但它处则保留. 由于$\rightarrow\forall$及$\exists\rightarrow$的关于变元的限制,可知$c_1$不能自由出现于这应用的结论中,故由引理35,一切公设的应用仍然有效. 重复这过程,每次都对尚未处理过的最高一个关于$\rightarrow\forall$或$\exists\rightarrow$的应用而进行,直到所有$q$次应用中的应用变元b全都由c换为d才止. 因为每次替换都只更改$\rightarrow\forall$或$\exists\rightarrow$的各次应用结论以前的叙列,故尾叙列并没有更改.

**定理 48** 给出一个在$G1$内(在$G2$内)某叙列的证明,该叙列内没有变元是既自由出现又约束出现的,这时对该叙列必可找出另外一个在$G1$($G2$)内的证明,其中不用到分割(混合). 这个证明是纯洁变元的证明,在它里面所使用的逻辑规则是原先证明中所使用过的.(坚钦的主要定理或范式定理,坚钦[1934-5])

**证明** 把本定理化归于一引理而证之. 根据引理34,37及

38，可就 $G2$ 而证本定理且可假设所给的证明已具有纯洁变元的性质．我们就这个‘所给的证明’内混合的个数 $m$ 作归纳而证明．如果 $m>0$，必然出现一个混合，在它之上不再有别的混合．今考虑所给证明内在该混合的结论，$\Pi, \Sigma_M \to \Phi_M, \Omega$ 以前的部分；叫做‘所给部分’．假设我们能够把这所给部分变换，得出在 $G2$ 内的另一个关于 $\Pi, \Sigma_M \to \Phi_M, \Omega$ 的不用混合的证明；可叫它做‘结果部分’．这样在所给的证明内把所给部分换为结果部分，可得出在 $G2$ 内一个关于同一叙列的新证明而只有 $m-1$ 个混合．更假设结果部分能够这样地作出，使得就它自身言具有纯洁变元性质并且不含有所给部分中原所未有的自由变元（约束变元，$\to\forall$ 或 $\exists\to$ 的应用变元 b）．这样整个新证明亦具有纯洁变元性质．因此我们便可应用归纳假设而作结论说，有一个没有混合的纯洁变元的证明．因此，要证本定理只须证明下述引理便够了．

**例 1**（续）（a）的所给部分（改用混合重述而不用分割）如下．

$$\dfrac{\dfrac{A(b)\to A(b)}{A(b)\to \exists x A(x)}\to\exists \qquad \dfrac{\exists x A(x)\to \exists x A(x)}{\neg\exists x A(x), \exists x A(x)\to}\neg\to}{A(b), \neg\exists x A(x)\to .}\text{混}$$

**引理 39** 给出在 $G2$ 内一个关于 $\Pi, \Sigma_M \to \Phi_M, \Omega$ 的证明，以混合为最后步骤，此外没有其它混合，并且具有纯洁变元性质，则可在 $G2$ 内找出一个关于 $\Pi, \Sigma_M \to \Phi_M, \Omega$ 的证明，没有混合，具有纯洁变元性质，并且不含有原来证明中原所未有的自由变元（约束变元，$\to\forall$ 或 $\exists\to$ 的应用变元 b）．在结果证明中所使用的逻辑规则都是所给证明中已经使用过的．（主要引理．）

**主要引理的证明** 一混合的左秩 $a$ 定义为：终止于该混合的左前提的各分支中，含有混合公式M于其后件并依次相继的那些叙列的个数的最大者．右秩 $b$ 同法定义．秩 $r$ 定义为 $r=a+b$．（秩最小为 2）．一混合的次数[1] $g$ 定义为混合公式M中逻辑符

1）原文作 grade，但 § 27 中级（grade）另有定义，反之，“逻辑符号出现的个数”在 § 28 又叫做次数（degree）．又按在 § 17 中秩（rank）亦另有定义——译者注．

号 ($\supset$, &, $\vee$, $\neg$, $\forall$, $\exists$) 的出现的个数 ($\geqslant 0$).

**例 1** (续完) 左秩为 1,右秩为 2,秩为 3 而次数为 1.

本引理可就混合的次数 $g$ 作串值归纳而证明. 在这归纳的奠基及归纳推步两步骤中, 再就秩 $r$ 而作串值归纳. 我们作穷举处理,因此引用各情形的结果后,归纳证明中奠基及归纳推步两步骤都可以作出了.

我们把想消去的混合写成下式

$$\frac{\Pi \to \Phi \quad \Sigma \to \Omega}{\Pi, \Sigma_M \to \Phi_M, \Omega} \text{ 或简写为 } \frac{S_1 \quad S_2}{S_3},$$

这里 $M \in \Phi$ 及 $M \in \Sigma$.

字母 "A","B", "C", "D", "$\Gamma$", "$\Theta$", "x", "A(x)", "t", "b" 等参照所讨论的每一公设的叙述.

A. 预备情形.

**情形 1a.** M在 $S_1$ 的前提中, 即 $M \in \Pi$. 这时混合所得的结论 $\Pi, \Sigma_M \to \Phi_M, \Omega$ 乃由它的第二前提 $\Sigma \to \Omega$ 根据弱短换而来, 故可不用混合而证出. 对 $\to$ 弱所作的直觉主义限制可被满足, 因为弱短换步骤是终止于原来的尾叙列的,而由引理 32a, 直觉主义地它最多有一公式在其后件.

**情形 2a.** 左秩为 1 而 $S_1$ 是根据结构规则而得的. 因为 $M \in \Phi$, 但推出 $S_1$ 时其前提的后件处却不出现 M, 故这推理只能根据 $\to$ 弱,并以M作为 C. 因此这证明的底部将如左下方所列, 并且 $M \notin \Theta$. 我们把它换成右边的图式, 得出原来叙列的一个不用混合的证明.

$$\frac{\dfrac{\Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, M}\to\text{弱} \quad \Sigma \to \Omega}{\Gamma, \Sigma_M \to \Theta, \Omega}\text{混} \qquad \frac{\Gamma \to \Theta}{\Gamma, \Sigma_M \to \Theta, \Omega.}$$

**情形 1b, 2b.** 仿前, 把 "$S_1$" "前件" "$\Pi$" "左" 分别改为 "$S_2$" "后件" "$\Omega$" "右" 而得. 仿情形 1a, 2a 处理.

B. 其它情形. 对下列每一种情形, 在其穷举假设中我们都假设前述四种预备情形已不再适用了.

B1：秩为2．因为情形 1a，1b 已除外，故 $S_1$，$S_2$ 必须都是推论的结论．因为秩为 2 而情形 2a，2b 已除外，故两个推论都是逻辑的．更进一步，因为秩为 2，故在两个推论中M都是主要公式，因此M至少含有一逻辑符号，而该混合的次数 $\geqslant 1$．因此这情形只当对 $g$ 作归纳时在归纳推步中出现，而处理它们时，关于次数的归纳假设便可以使用．用以推出 $S_1$ 的规则只能是M的最外一个逻辑符号的引入后件规则，推出 $S_2$ 的则是M的最外一个逻辑符号的引入前件规则．因此在 B1 之下我们只有下列六个情形．

情形 3：$S_1$ 由 $\rightarrow\supset$ 而得，$S_2$ 由 $\supset\rightarrow$ 而得，而M为主要公式 $A\supset B$．这时所给证明的最底层便如下，其中 $A\supset B \not\in \Theta$、$\Gamma$，因为其秩只是 2 之故．

$$\dfrac{\dfrac{A,\ \Pi\rightarrow\Theta,\ B}{\Pi\rightarrow\Theta,\ A\supset B}\ \rightarrow\supset \qquad \dfrac{\Gamma\rightarrow\Omega^{\circ},A \qquad B,\ \Gamma\rightarrow\Omega}{A\supset B,\ \Gamma\rightarrow\Omega}\ \supset\rightarrow}{\Pi,\ \Gamma\rightarrow\Theta,\ \Omega.}\ 混$$

我们更改如下：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma\rightarrow\Omega^{\circ},\ A \quad A,\ \Pi\rightarrow\Theta,\ B}{\Gamma,\ \Pi_A\rightarrow\Omega^{\circ}_A,\ \Theta,\ B}\ 混 \qquad B,\ \Gamma\rightarrow\Omega}{\Gamma,\ \Pi_A,\ \Gamma_B\rightarrow\Omega^{\circ}_{AB},\ \Theta_B,\ \Omega}\ 混}{\Pi,\ \Gamma\rightarrow\Theta,\ \Omega.}$$

上面的混合其次数比原有的小，依归纳假设它可消去，即对它的结论可以找出一个不用混合的证明．这样，下面的混合便将没有混合在其上，亦同样可以消去．这样对原来的尾叙列 $\Pi,\Gamma\rightarrow\Theta,\Omega$ 我们便得到一个不用混合的证明．

情形 4：$S_1$ 由 $\rightarrow\&$ 而得，$S_2$ 由 $\&\rightarrow$ 而得，M为主要公式 $A\&B$．

情形 5：$S_1$ 由 $\rightarrow\vee$ 而得，$S_2$ 由 $\vee\rightarrow$ 而得，M为主要公式 $A\vee B$．其处理与情形 4 相对偶．

情形 6：$S_1$ 由 $\rightarrow\neg$ 而得，$S_2$ 由 $\neg\rightarrow$ 而得，M为主要公式 $\neg A$．

情形 7：$S_1$ 由 $\rightarrow\forall$ 而得，$S_2$ 由 $\forall\rightarrow$ 而得，M为主要公式 $\forall x A(x)$．所给的图式如下，其中 $\forall xA(x) \not\in \Theta,\ \Gamma$．

$$\cfrac{\cfrac{\Pi \to \Theta, A(b)}{\Pi \to \Theta, \forall x A(x)} \to\forall \quad \cfrac{A(t), \Gamma \to \Omega}{\forall x A(x), \Gamma \to \Omega} \forall\to}{\Pi, \Gamma \to \Theta, \Omega.} \text{混}$$

在作出新图式时，我们需要关于 $\Pi \to \Theta, A(t)$ 的证明. 如果 A(x) 不含自由的 x [或如果 t 同于 b][1]，则 A(b) 与 A(t) 为同一公式，我们已得到该证明了. 今设 A(x) 含有自由的 x [且 t 异于 b]. 这时 A(t) 含有 t，又因 t 对 A(x) 的 x 是自由的，故 t 中 [自由] 变元自由出现于 A(t) 中. 由于所给的关于 $\Pi, \Gamma \to \Theta, \Omega$ 的证明具有纯洁变元性质，我们可以作出结论说，(i) 我们图式左支 $\Pi \to \Theta$, A(b) 的证明中所应用的 $\to\forall$ 或 $\exists\to$，其应用变元 b 绝不会是 t 中任何变元，(ii) 那些 $\to\forall$ 或 $\exists\to$ 的应用变元 b 亦不是我们的 b，(iii) t 对这证明中一切公式中的 b 都是自由的（因为纯洁变元性质不容许任何变元既自由出现又约束出现）. 更进一步，由于应用 $\to\forall$ 时所受的关于变元的限制，还可得 (iv) b 不出现于 $\Pi, \Theta$. 故若用引理 36，在关于 $\Pi \to \Theta$, A(b) 的证明中，把 b 全部换为 t，我们便得到一个关于 $\Pi \to \Theta$, A(t) 的证明. 当把该证明用到下列的新图式时，所得的关于 $\Pi, \Gamma \to \Theta, \Omega$ 的新证明便将具有纯洁变元性质，而且不含有以前所未出现的自由变元（约束变元；以及 $\to\forall$ 或 $\exists\to$ 的应用变元 b）.

$$\cfrac{\cfrac{\Pi \to \Theta, A(t) \quad A(t), \Gamma \to \Omega}{\Pi, \Gamma_{A(t)} \to \Theta_{A(t)}, \Omega} \text{混}}{\Pi, \Gamma \to \Theta, \Omega}$$

**情形 8:** $S_1$ 由 $\to\exists$ 而得，$S_2$ 由 $\exists\to$ 而得，M 是主要公式 $\exists x A(x)$. 与情形 7 对偶.

B2: 秩 $> 2$. 这些情形只能出现于就秩作归纳时归纳推步这一步骤中（而就秩作归纳可出现于就次数作归纳时的奠基中或归纳推步中）. 因此处理它们时关于秩的归纳假设是可以使用的.

B2.1: 左秩 $\geq 2$. 在推出 $S_1$ 时至少有一前提的后件出现 M.

---

1) 本段中方括号内的字是译者加入的——译者注.

情形 9a：$S_1$ 是根据后件结构规则 $S$ 而得，而M既非C又非D，或者 $S_1$ 是根据前件结构规则 $S$ 而得．设所给图式如左边所示．我们把它改为右边的图式(说明见后)．

$$\dfrac{\dfrac{\Pi_1 \to \Phi_1}{\Pi \to \Phi}\,S \qquad \Sigma \to \Omega}{\Pi,\ \Sigma_M \to \Phi_M,\ \Omega.}\ 混 \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi_1 \to \Phi_1 \quad \Sigma \to \Omega}{\Pi_1,\ \Sigma_M \to \Phi_{1M},\ \Omega}\ 混}{\Pi_1,\ \Sigma_M \to \Omega,\ \Phi_{1M}}}{\Pi,\ \Sigma_M \to \Omega,\ \Phi_M}\,S}{\Pi,\ \Sigma_M \to \Phi_M,\ \Omega.}$$

因为 $M \in \Phi_1$（由 B2.1)，我们可取 $\Pi_1 \to \Phi_1$ 作为新混合的第一个前提． 由穷举假设以及具有一前提的结构规则的形状，我们可以核验而知新 $S$ 是正确的．新图式中混合的秩比原式中混合的秩少 1．故根据关于秩的归纳假设，可对其结论因而对原来的尾叙列而找到一个不用混合的证明．

情形 10a：$S_1$ 是根据后件结构规则 $S$ 而得，M为C或D．设前提为 $\Pi \to \Phi_1$．根据后件结构规则的形状，我们可以核验而知这时 $\Phi_{1M}$ 及 $\Phi_M$ 是全同的．

$$\dfrac{\dfrac{\Pi \to \Phi_1}{\Pi \to \Phi}\,S \qquad \Sigma \to \Omega}{\Pi,\ \Sigma_M \to \Phi_M,\ \Omega.}\ 混 \qquad \dfrac{\Pi \to \Phi_1 \quad \Sigma \to \Omega}{\Pi,\ \Sigma_M \to \Phi_M,\ \Omega.}\ 混$$

情形 11a：$S_1$ 是根据具有一前提的逻辑规则 $L$ 而得． 凡给出 $S_1$ 的任何一个这样的规则将具有下形：

$$\dfrac{\Lambda_1,\ \Gamma \to \Theta,\ \Lambda_2}{\Xi_1,\ \Gamma \to \Theta,\ \Xi_2}\,L$$

这里 $\Lambda_1, \Lambda_2$ 或为旁边公式或为空，而 $\Xi_1, \Xi_2$ 则有一为主要公式，另一为空的．

子情形 1：$\Xi_2$ 不是M． 因为 $M \in \Theta, \Xi_2$ 故得 $M \in \Theta$． 我们把所给图式写如下．

$$\dfrac{\dfrac{\Lambda_1,\ \Gamma \to \Theta,\ \Lambda_2}{\Xi_1,\ \Gamma \to \Theta,\ \Xi_2}\,L \qquad \Sigma \to \Omega}{\Xi_1,\ \Gamma,\ \Sigma_M \to \Theta_M,\ \Xi_2,\ \Omega.}\ 混$$

并改如下(说明见后)．

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Lambda_1, \Gamma \to \Theta, \Lambda_2 \quad \Sigma \to \Omega}{\Lambda_1, \Gamma, \Sigma_M \to \Theta_M, \Lambda_{2M}, \Omega}\text{混}}{\Lambda_1, \Gamma, \Sigma_M \to \Theta_M, \Omega, \Lambda_2}}{\cfrac{\Xi_1, \Gamma, \Sigma_M \to \Theta_M, \Omega, \Xi_2}{\Xi_1, \Gamma, \Sigma_M \to \Theta_M, \Xi_2, \Omega.}}\ L$$

新$L$以$\Gamma, \Sigma_M$作为它的$\Gamma$，以$\Theta_M, \Omega$作为它的$\Theta$。新$L$的结论便是原来的尾叙列，除却后件中公式的次序可能不同外。这便使我们可以推论说，如果$L$为$\to\forall$或$\exists\to$，则关于变元的限制在新应用中亦是满足的，因为根据所给证明的纯洁变元性质，其应用变元b不可能出现于原来的尾叙列中。如果所给的证明是直觉主义的，则(根据引理32a)$\Theta, \Lambda_2$至多只含一个公式。但$M\in\Theta$，故$\Lambda_2$为空。因此在新$L$以前的弱短换步骤中要求不破坏关于$\to$弱的直觉主义限制。(新$L$会不会破坏了直觉主义限制的$\to\neg$呢？这可能性是根本可以除去的，由于比较新$L$的结论和所给的尾叙列而知之；事实上，$L$不能是$\to\neg$.)新混合的秩比原混合少1.

子情形2：$\Xi_2$为M。这时$\Xi_1$为空，故在写出所给图式时可把它略去如下。

$$\cfrac{\cfrac{\Lambda_1, \Gamma \to \Theta, \Lambda_2}{\Gamma \to \Theta, M}\ L \quad \Sigma \to \Omega}{\Gamma, \Sigma_M \to \Theta_M, \Omega.}\ \text{混}$$

因为$\Xi_2$为M，故$\Lambda_2$不是M(且因由B2.1又有$M\in\Theta, \Lambda_2$，故$M\in\Theta$)。由于情形1b是除外的，故$M\notin\Omega$。利用这些事实可把新图式中各混合写出如下。

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Lambda_1, \Gamma \to \Theta, \Lambda_2 \quad \Sigma \to \Omega}{\Lambda_1, \Gamma, \Sigma_M \to \Theta_M, \Lambda_2, \Omega}\text{混}}{\Lambda_1, \Gamma, \Sigma_M \to \Theta_M, \Omega, \Lambda_2}}{\Gamma, \Sigma_M \to \Theta_M, \Omega, M}\ L \quad \Sigma \to \Omega}{\Gamma, \Sigma_M, \Sigma_M \to \Theta_M, \Omega, \Omega}\ \text{混}}{\Gamma, \Sigma_M \to \Theta_M, \Omega.}$$

如果$L$为$\to\forall$或$\exists\to$，则关于变元的限制是满足的，由于在所给的纯洁变元的证明中，$\Gamma, \Sigma_M, \Theta_M, \Omega$, M除在原来$L$的结论的上

方出现外，全部还出现于别处（按前四者出现于原来的尾叙列中，M出现于另一前提 $\Sigma \to \Omega$ 中.——译者）.（但 $L$ 不可能是 $\exists \to$.）这个子情形对直觉主义系统说来是不存在的，因为在所给证明中有一叙列 $\Gamma \to \Theta, \mathrm{M}$，它的后件至少有两个 M. 在新图式中上面的混合比原来的混合少 1 秩；故根据关于秩的归纳假设它可消去. 下面的混合便将没有混合在其上了. 因 $\mathrm{M} \notin \Omega, \Lambda_2$，故左秩将只是 1，而右秩将和原来混合的右秩同. 因假设原来的左秩 $\geqslant 2$，故本混合的秩比原有的为小；再根据关于秩的归纳假设，它亦可被消去.

情形 12a：$S_1$ 是根据具有两前提的逻辑规则 $L$ 而得，但直觉主义的 $\supset \to$ 除外. 给出 $S_1$ 的推理可写为

$$\frac{\Lambda_{11}, \Gamma \to \Theta, \Lambda_{12} \qquad \Lambda_{21}, \Gamma \to \Theta, \Lambda_{22}}{\Xi_1, \Gamma \to \Theta, \Xi_2.} L$$

其处理和情形 11a 相似. 在新图式中两个前提都先和 $\Sigma \to \Omega$（注意 $\mathrm{M} \in \Theta$）混合，然后再应用 $L$.

情形 13：$S_1$ 是根据直觉主义的 $\supset \to$ 而得. 因为 $\mathrm{M} \in \Theta$ 而 $\Theta$ 至多只有一公式，故 $\Theta$ 为 M. 在新图式只有第二前提即 $\mathrm{B}, \Gamma \to \mathrm{M}$ 与 $\Sigma \to \Omega$ 相混合.

B2.2. 情形 9b—12b. 其叙述及处理均和情形 9a—12a 相似，但须如下更改. 对情形 11b 的直觉主义核验是立刻可得的.（子情形 2 可直觉主义地存在的.）关于直觉主义的 $\supset \to$ 的处理可包括在情形 12b 内，只须在第一前提写入 $\Theta^\circ$；要核验新 $\supset \to$ 以一个空叙列作为它的 $\Theta^\circ$，只须注意，就直觉主义情形说来，所给的混合中的 $\Phi$ 就是 M.

下列的关于定理 48 的应用由寇里 [1939] 就直觉主义系统而给出.

**定理 49** 如果一公式 E 在直觉主义（古典）系统 $H$ 内是可证的，则只用 $\supset$ 公设（$\supset$ 及 $\neg$ 公设）[1] 以及关于公式中出现的逻辑符号

---

1) 参见上 495 页注——译者注.

的公设便可证出，但当∀出现而&不出现时，∀公设须包括§24引理11中的公理模式9a.

**证明** 应用引理33a，在 *G*1 内不用分割的任何证明中，除却相应于在尾叙列内出现的逻辑符号的规则外，别的逻辑规则是不能应用的. 如果E中没有变元是既自由出现又约束出现的. 这定理可由定理46（只用第一部分），48及47（两部分）而得；否则更应用§33附注1(c).

寇里的书[1950]（在编写§77—§80时作者尚未见到）对坚钦型系统理论有所贡献，并附有一个完备的文献. 寇里把主要定理叫做“消去定理”. 我们用“范式定理”一名意在暗示这定理的用意，只要说明（无须详细给出坚钦系统）范式是指证明而言的[它便很够暗示性了]；至于“消去定理”一名我们仅仅用于对一符号或一记号被消去的情形而言，如§74那样.（但“范式”亦有类似的缺点，即通常它只就公式而言，如§29，§76那样.）

下面两节专论本定理的两个应用，可以彼此独立地阅读.

## *§79. 相容性证明

在 *G*1 或 *G*2 中，关于结构规则的应用可以叫做结构推理；关于命题演算的逻辑规则的应用可以叫做命题推理；关于谓词演算的补充逻辑规则的应用可以叫做谓词推理.

如果对尾叙列作特殊的假定，对该证明还可作进一步的范式化；例如下述的坚钦[1934—5]对他的古典系统所给的“推广的主要定理”那样.（这与厄尔勃朗定理[1930]有密切关系.）如坚钦所指出的，这定理是他的系统内推理次序的可换性的一个例子. 这些可能性有进一步的讨论，如寇里[1952]对他[1950]的古典系统所作的，克林[1952]对这里所描述的古典及直觉主义系统所作的. 例如：

**定理50** 任给一叙列只含前束公式，其中没有任何变元既自由出现又约束出现. 又在古典系统 *G*1（不用 ∨ → 的直觉主义系

统 $G1$) 内给出该叙列的一证明，则可在同一系统内找出一个关于该叙列的证明，其中不含分割，并且其中有一叙列 S（叫做中介叙列）使得 S 内没有量词，而证明中由 S 到尾叙列的那一部分只使用谓词推理和结构推理. 新证明又是纯洁变元的证明. 同样可把“$G1$”“分割”分别改为“$G2$”及“混合”.

**证明** 把定理化归于下引理. 我们假设已经应用了定理 48，因而我们所处理的是 $G1$ 内的不用分割的（或 $G2$ 内不用混合的）一个纯洁变元的证明. 根据子公式性质，在这证明内的叙列中只有前束公式出现.

设考虑在这证明内所用的含有量词的公理，设 ∀ 为最先的量词符号. 我们可把该公理(左)换为下列的图式(右):

$$\forall x A(x) \to \forall x A(x),$$

$$\cfrac{\cfrac{A(b) \to A(b)}{\forall x A(x) \to A(b)}\ \forall\to}{\forall x A(x) \to \forall x A(x),}\ \to\forall$$

这里 b 是在证明之中原所未有的一变元. 新公理中公式 A(b) 较原来公理中的公式 ∀xA(x) 少一个量词. 因此若就一切公理中各公式内量词总数而作归纳，我们便可从所给的证明内把含有量词的公理完全消去（保存该证明的其它特点）. 类似地，可以处理 ∃ 为最先出现的量词符号的情形.

今假设，如我们下列引理所说的，我们能够把这证明中的逻辑推理重新排列(保存它的其它特点)，使得每个谓词推理都在一切命题推理之后. 那末便将有一叙列 $S_1$（的一个出现），在它之后这证明只使用谓词推理及结构推理(没有分支，因各规则都是一前提的)，而在它之前这证明只使用命题推理及结构推理. 在 $S_1$ 中及 $S_1$ 以上可能出现一些具有量词的公式. 但这些公式不可能是命题推理的旁边公式，否则结果的主要公式将不是前束的了. 它们不可能是主要公式，因为在证明的这一部分中并没有谓词推理. 它们不可能是公理，因为我们已经改过了. 因此如果我们把从头到 $S_1$ 的这一部分证明中，凡含有量词的公式的任一出现都删除，则每

个公设的应用仍然有效，不过或许有些结构推理变成了恒等推理(即前提与结论相一致)，这时该推理便可以省去．这种更改将把 $S_1$ 换为一个没有量词的叙列 S，但由 S 可经过 0 次或多次的细弱及互换而回到 $S_1$，然后再经过未更改的那一部分的证明，其中只用谓词推理及结构推理的，我们便得原来的尾叙列．因此我们便得到一个如本定理所描述的新证明，而 S 为中介叙列．

**引理 40** 任给古典系统 *G*1 (不用 ∨ → 的直觉主义系统 *G*1) 内的一个不用分割的纯洁变元的证明，其叙列只含前束公式，则恒可找出另一证明，具同样叙列，而每一谓词推理都在所有的命题推理之后．用作公理的叙列在新旧证明中是同样的，同样地，可把"*G*1"，"分割"分别改为"*G*2"，"混合"．

**引理的证明** 试考虑所给证明中任一谓词推理，并计算从它的结论起到整个证明的尾叙列止这一分支中所应用的命题推理的个数．一证明中就一切谓词推理而求得的这种数目之和，叫做该证明的阶．今就阶归纳而证明本引理．

如果阶非 0，则有谓词推理其后有一命题推理而中间不再有别的逻辑推理．

情形 1：谓词推理是 →∀，而它下面第一个命题推理是一前提的推理 *L*．如上所述，应用子公式性质，可知 →∀ 中的 ∀xA(x) 不可能是推理 *L* 的旁边公式．故所给的图式将如左边所示．古典地，我们可把它改为右图式．

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma_1\to\Theta_1,\ A(b)}{\Gamma_1\to\Theta_1,\ \forall xA(x)}\to\forall}{\overline{\Gamma_2\to\Phi,\ \forall xA(x),\ \Theta_2}}}{\Gamma_3\to\Phi,\ \forall xA(x),\ \Theta_3.}L
\qquad
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma_1\to\Theta_1,A(b)}{\Gamma_1\to\Theta_1,\ A(b),\ \forall xA(x)}\to 弱}{\overline{\Gamma_2\to\Phi,\ A(b),\ \forall xA(x),\ \Theta_2}}}{\overline{\Gamma_3\to\Phi,\ \forall xA(x),\ \Theta_3,\ A(b)}}L}{\Gamma_3\to\Phi,\ \forall xA(x),\ \Theta_3.}\to\forall$$

所以用 → 弱是考虑到，在所给图式弱短换步骤中可能有一是→短而以 ∀xA(x) 作为 C．由原给证明的纯洁变元性质可以保证在新图式内使用 →∀ 时关于变元的限制是满足的．直觉主义地则 $\Theta_1$，$\Phi$，$\Theta_2$ 及 $\Theta_3$ 全空，故在新图式中可删去 → 弱．这个更改把证明的

阶数减 1.

情形 2：$\rightarrow\forall$ 跟在两前提的命题推理 $L$ 之后. 古典地说可仿上面的处理，但在 $L$ 之上须多列一个额外前提(左或右)，而在新图式内额外前提之前还须列一个 $\rightarrow$ 弱(除非 $L$ 为 $\supset\rightarrow_1$). 直觉主义地说，$L$ 只能是 $\supset\rightarrow$，而额外前提必是左前提.

情形 3—8：对 $\forall\rightarrow$ 跟在一前提或两前提的命题推理之后的情形，不论古典地或直觉主义地，其处理基本上都和对 $\rightarrow\forall$ 的古典处理相仿. 关于 $\rightarrow\exists$ 及 $\exists\rightarrow$ 的四个情形则对偶地处理.

**例 1** 若在直觉主义系统 $G1$ 内还用到 $\vee\rightarrow$，则定理 50 不再成立. 试考虑下列的证明.

$$\dfrac{\dfrac{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a})\rightarrow\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a})}{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a})\rightarrow\exists x\boldsymbol{A}(x)}\rightarrow\exists\quad\dfrac{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{b})\rightarrow\boldsymbol{A}(\boldsymbol{b})}{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{b})\rightarrow\exists(x)\boldsymbol{A}(x)}\rightarrow\exists}{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a})\vee\boldsymbol{A}(\boldsymbol{b})\rightarrow\exists x\boldsymbol{A}(x).}\vee\rightarrow$$

今设另有一个证明如定理中所描述的. 中介叙列 S 将具有 $\Pi\rightarrow\Phi$ 形而 $\Pi$ 含有 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a})\vee\boldsymbol{A}(\boldsymbol{b})$ 的 0 个或多个出现，而 $\Phi$ 为空或为 $\boldsymbol{A}(t)$，t 为一项，因为从尾叙列到 S 而向上读时，弱短换步骤(如果有的话)只能省去、重复或互换公式而不能引入新公式，而谓词推理(如果有的话)只能是 $\rightarrow\exists$，它(向上读时)把 $\exists x\boldsymbol{A}(x)$ 改为 $\boldsymbol{A}(t)$. 但如果 $\Pi$ 或 $\Phi$ 为空，则把引理 33a 及 33b 照 §78 例 4 那样使用，可知在 $G1$ 中非用分割不能证明 $\Pi\rightarrow\Phi$. 因此 $\Pi\rightarrow\Phi$ 只能呈 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a})\vee\boldsymbol{A}(\boldsymbol{b})\rightarrow\boldsymbol{A}(t)$ 形. 项 t 可为 $\boldsymbol{a}$ 或为 $\boldsymbol{b}$ 或否. 试设 t 为 $\boldsymbol{a}$. 则由定理 47 系在命题演算 $H$ 内将可证明 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a})\vee\boldsymbol{A}(\boldsymbol{b})\supset\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a})$；由 §25 定理 4，$\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B}\supset\boldsymbol{A}$ 亦可证，这与 § 28 定理 9 相矛盾.

**相容性定理** 坚钦应用他的推广的主要定理来证明已经先由阿克曼，冯纽曼与厄尔勃朗所得到的那些相容性结果. 伯尔奈斯[1936]及希尔柏特-伯尔奈斯[1939]对公理理论叙述一个一般相容性定理，他们是根据阿克曼的处理而得的. 我们现在便叙述这个定理.

由数论、几何或代数所作的公理理论，如果可以构造性地(即

用有穷性语言)作出该理论的模型，或更准确地，作出它的概念及公理的模型(§ 14)，那末便可使用这条定理以元数学地证明其相容性了。

这个理论将形式化为一形式体系，其中的项及公式将由一些个体符号 $e_1, \cdots, e_q$，函数符号 $f_1, \cdots, f_r$ 及谓词符号 $P_1, \cdots, P_s$ 再使用谓词演算$H$的逻辑符号体系而作出。除却谓词演算$H$的公设以外，这体系可以附加上有限多个或无穷多个公理。

要作出一个构造性的模型，我们必须从一个客体域$D$出发，客体个数或有限(但非空)或可数无穷多。在任何情形下，我们均可把$D$取为自然数域$N$，因为，如果它未有枚举，可先对它选取一个固定的能行枚举(如果它为有穷，则枚举容许重复)，然后不讨论原来的客体而讨论该枚举号码。实际上，有时直接讨论别的域更为方便。对有穷域的情形，可用下法得到一个更简单的处理：把§ 36 定理 20 推广，使其赋值过程包括个体符号及函数符号。

要建立模型，其次的步骤是把个体符号，函数符号及谓词符号在域$D$内加以释义，即要在$D$内选出一些客体 $e_1, \cdots, e_q$ 作为 $e_1, \cdots, e_q$ 之值，选出其定义域为$D$而函数值在$D$内的函数 $f_1, \cdots, f_r$ 作为 $f_1, \cdots, f_r$ 之值，选出其定义域为$D$的逻辑函数或谓词 $P_1, \cdots, P_s$ 作为 $P_1, \cdots, P_s$ 之值。要使得模型是构造性的，$f_1, \cdots, f_r$ 必须是能行地可计算的函数，而 $P_1, \cdots, P_s$ 必须是能行可判定的谓词。在这情形下我们说，$e_1, \cdots, e_q, f_1, \cdots, f_r, P_1, \cdots, P_s$ 是 $e_1, \cdots e_q, f_1, \cdots, f_r, P_1, \cdots, P_s$ 在$D$内的能行释义。(当$D$为$N$时，根据§§ 60, 62 邱吉论点，可以期望 $f_1, \cdots, f_r, P_1, \cdots P_s$ 是一般递归的，这时我们便有一般递归释义。但是相容性理论无须和邱吉论点发生联系，因为我们只须承认在每一次应用相容性定理时，我们所选用的特殊的 $f_1, \cdots, f_r, P_1, \cdots, P_s$ 是能行的便成了。)

任给一个能行释义，并使用关于 $\supset$, &, $\vee$, $\neg$ 的二值真值表(§ 28)，我们便得到一个赋值过程，使得任给一个不含量词的公式 $A(x_1, \cdots, x_n)$，其中只含不同变元 $x_1, \cdots, x_n$ 的，对从$D$内任取客体$n$矢 $x_1, \cdots, x_n$ 以作 $x_1, \cdots, x_n$ 之值，我们都能够能行地决

定，$A(x_1, \cdots, x_n)$ 的值究竟为 t（真）或为 f（假）。（当 $D$ 为 $N$ 时，由 §45 ## A, C, D，这公式所表示的谓词 $A(x_1, \cdots, x_n)$ 是原始递归于 $f_1, \cdots, f_r, P_1, \cdots, P_s$ 的。）

当域 $D$ 为 $N$ 时，我们经常不说当 $x_1, \cdots, x_n$ 取自然数 $x_1, \cdots, x_n$ 时 $A(x_1, \cdots, x_n)$ 的值，而更方便地说 $A(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)$ 的值（这里 $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n$ 分别为相应于自然数 $x_1, \cdots, x_n$ 的数字）。当我们这样做时，$A(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)$ 便是在下列的推广的符号体系内的公式，该体系包括（如果必要）0 作为个体符号而 $'$ 作为函数符号，而该释义亦被推广使得 0 与 $'$ 取得通常的值。我们可假定，如果原来符号包括有 0 或 $'$，则在原来释义中，0 与 $'$ 必须取得通常的值。当 $D$ 不是 $N$ 时，我们亦可同样做法。这时对 $D$ 的每个客体 $x$，必须配有一个特殊的缺变元的项 $\mathbf{x}$（类似于数字）；而符号体系及释义必须推广（如果必要）使包括这些项（与原有释义须一贯）。对无论那一种情形，我们都把域 $D$ 的元素 $x$ 叫做"数"，而表示 $x$ 的这个缺变元的项 $\mathbf{x}$ 叫做"数字"。符号体系的推广（如果必要）只在于帮助描述赋值过程，无须应用到所考虑的形式体系，除非当我们要这样做时。

在模型之内，即选定了区域及非逻辑常项的释义以后，公理必须是真的。因为公理（一般地说）含有变元，所以对于'真'必须有比赋值过程所给的更为一般的意义。我们只就前束公式（§35 定理19）而表述它。先考虑一个闭前束公式，例如设为 $\exists y_1 \forall x_1 \exists y_2 \forall x_2 \exists y_3 A(y_1, x_1, y_2, x_2, y_3)$，这里 $A(y_1, x_1, y_2, x_2, y_3)$ 不含量词，并且只含有写出来的不同变元；设把这公式叫做"G"。在 $e_1, \cdots, e_q, f_1, \cdots, f_r, P_1, \cdots, P_s$ 的释义以及量词的通常意义之下，G 为真当且仅当有一数 $y_1$ 使得每一数 $x_1$ 都有一个依赖于 $x_1$ 的数 $y_2$（写之为"$y_2(x_1)$"）使得对每一数 $x_2$ 都有一个依赖于 $x_1$ 与 $x_2$ 的数 $y_3$（写之为"$y_3(x_1, x_2)$"）使得

$$\text{(I)} \qquad A(\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2(x_1), \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_3(x_1, x_2))$$

具有值 t（这里 $\mathbf{y}_2(x_1)$ 是相应于数 $y_2(x_1)$ 的数字，等等）。就元数学的目的言，我们还希望这存在性是作构造性地理解的，即 $y_1$，

$y_2(x_1)$（对每个给定的 $x_1$）及 $y_3(x_1, x_2)$（对每个给定的 $x_1$, $x_2$）都是可以找出的. 这样，$y_2(x_1)$ 及 $y_3(x_1, x_2)$ 应该是能行地可计算的函数. 因此，我们说，G是能行地真的，如果有一数 $y_1$ 及能行地可计算的函数 $y_2(x_1)$ 及 $y_3(x_1, x_2)$ 使得对每个 $x_1$ 及 $x_2$ 言 (I) 都为 t. （当 $D$ 为 $N$ 时，根据邱吉论点，我们可以期望 $y_2(x_1)$ 与 $y_3(x_1, x_2)$ 是一般递归的，这时我们说G是一般递归地真的.）一个开前束公式叫做能行地（一般递归地）真，如果它的闭包如此. 一个无量词的公式叫做可核验的，如果对它的变元代以任何数字后，所得的公式在赋值过程之下都取值 t，若用现在的用语说，它就指一个能行地真的无量词公式.

实际上，我们对 $y_2(x_1)$ 及 $y_3(x_1,x_2)$ 而要求其能行地可计算，不过是强调在构造性地使用存在量词时无论如何都需满足的条件；但要想元数学地断定其相容性，在别的方面（并未明述）对定理的假设亦必须作构造性的理解，例如，$y_1$ 以及 $y_2(x_1)$ 与 $y_3(x_1, x_2)$ 的描述都必须是能行地给出的，而关于 (I) 对任何 $x_1$, $x_2$ 言都取值 t 的证明*(demonstration) 亦必须是根据有穷性的推理的（参见 §62 关于邱吉论点之逆的附注.）

一前束公式，如果其中任何 ∀ 量词都不在 ∃ 量词之后，便叫做 ∀∃ 前束公式.

**定理 51** 设项与公式是如下地构成的，以 $e_1, \cdots, e_q, f_1, \cdots, f_r, P_1, \cdots, P_s$ 作为非逻辑常项用谓词演算 $H$ 的逻辑符号体系而构成. 则对于任何给定的域 $D$ 以及在 $D$ 内对这些常项所作的能行赋值，都有：

(a) 如果 $\Gamma$ 为能行地真的闭前束公式，E 为一个闭 ∀∃ 前束公式，在谓词演算 $H$ 内又有 $\Gamma \vdash E$，则 E 是能行地真的.

(b) 任何形式体系 $S$，如果它的公设是谓词演算 $H$ 的，它的每个公理都是（或在 $H$ 内等价于）一个能行地真的前束公式，又如果 E 为 ∀∃ 前束公式且在 $S$ 内 $\vdash$E，则 E 是能行地真的. 在特例，$S$ 是简单相容的.

由(a)到(b)的证明. {在 $S$ 内 $\vdash$E} → {在 $H$ 内 $\Gamma \vdash$E，这里

$\Gamma$ 是 $S$ 中有限多个非逻辑公理}→{在 $H$ 内 $\Gamma_1 \vdash$— $E_1$，这里 $\Gamma_1$ 是等价于 $\Gamma$ 的前束式的闭包，该前束式是能行地真的，故 $\Gamma_1$ 亦然，$E_1$ 为 E 的闭包}→{$E_1$ 是能行地真的}（由 (a)，以 $\Gamma_1$，$E_1$ 作为它的 $\Gamma$，E）→{E 是能行地真的}. 在特例，$1 = 0$（就通常释义下的数论符号体系而论）或 $A \& \neg A$（而 A 不含量词）不是能行地真的，故在 $S$ 内是不可证的. 因此依 §28 中第二说法的定义，$S$ 是简单相容的.

(a) 的证明. 如果给出的是在直觉主义 $H$ 内 $\Gamma \vdash$—E，则在古典 $H$ 内当然更有 $\Gamma \vdash$—E，因为直觉主义的公设 $8^{I}$ 是古典地可证的（§ 23）.

因为 $\Gamma$，E 是闭的，在推演 $\Gamma \vdash$—E 中一切变元保持固定，在叙列 $\Gamma \to$ E 中没有任何变元既自由出现又约束出现. 由定理 46 及 50，在古典谓词演算 $G1$ 内有一个关于 $\Gamma \to$ E 的证明，具有定理 50 所描述的特点. 设中介叙列出现处为第 h 层.

仍举例说明，设 $\Gamma$ 为上述的公式 G，而 E 为 $\forall v_1 \forall v_2 \exists w B(v_1, v_2, w)$，这里 $B(v_1, v_2, w)$ 不含量词并且只含已写出的不同变元.

任选一对数 $v_1$，$v_2$.

我们将作出一系列的操作，每个相应于 $G1$ 的证明中的一个谓词推理，从最低层开始，逐步上升. 每一个操作都是把自由出现于推理前提的每个变元在整个树枝中的每次出现都代以一数字（下文加以明指）. 当把这操作对一个根据 $\to\forall$ 或 $\exists\to$ 而作的推理来实施时，该推理当然被破坏了. 所给的证明是一个纯洁变元的证明，故应用 $\to\forall$ 或 $\exists\to$ 时，其应用变元 b 不出现于它的前提以后. 设该推理的前提在层数 $g$ 或低于层数 $g(\leqslant h)$，则对该推理而实施上述操作时，这时期可叫做时期 $g$. 根据引理 36 可知，这时凡其前提在层 $g$ 以上的原有各公设[1]的应用都将变成对同一公设的一个应用，但该应用却是属于其符号体系已扩张到（如果必要）包括了数字后的系统 $G1$.

---

1) 按指规则，又层数是由下而上地计数的——译者注.

现在我们明白指定，在代入时数字应如何选择，同时并就 $g$ 作归纳而证明，如果 $g \leqslant h$，则在第 $g$ 时期第 $g$ 层（在内）以下各叙列均有下列性质（叫做性质 $P$）：其前件（后件）只含有形如左行（右行）所示的公式

$$\exists y_1 \forall x_1 \exists y_2 \forall x_2 \exists y_3 A(y_1, x_1, y_2, x_2, y_3) \qquad \forall v_1 \forall v_2 \exists w B(v_1, v_2, w)$$

$$\forall x_1 \exists y_2 \forall x_2 \exists y_3 A(\mathbf{y}_1, x_1, y_2, x_2, y_3) \qquad \forall v_2 \exists w B(\mathbf{v}_1, v_2, w)$$

$$\exists y_2 \forall x_2 \exists y_3 A(\mathbf{y}_1, t_1, y_2, x_2, y_3) \qquad \exists w B(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, w)$$

$$\forall x_2 \exists y_3 A(\mathbf{y}_1, t_1, \mathbf{y}_2(t_1), x_2, y_3) \qquad B(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, s)$$

$$\exists y_3 A(\mathbf{y}_1, t_1, \mathbf{y}_2(t_1) t_2, y_3)$$

$$A(\mathbf{y}_1, t_1, \mathbf{y}_2(t_1), t_2, \mathbf{y}_3(t_1, t_2))$$

这里 $t_1$，$t_2$ 与 $s$ 为没有变元的项，$t_1$ 与 $t_2$ 为在所给的能行释义之下 $t_1$ 与 $t_2$ 所分别表示的数，而 $\mathbf{y}_1$，$\mathbf{y}_2(t_1)$，$\mathbf{y}_3(t_1, t_2)$，$\mathbf{v}_1$，$\mathbf{v}_2$ 分别为相应于数 $y_1$，$y_2(t_1)$，$y_3(t_1, t_2)$，$v_1$，$v_2$ 的数字，至于 $y_1$，$y_2(x_1)$ 及 $y_3(x_1, x_2)$ 则分别为根据G为能行地真这假设所给出的数及能行地可计算函数．

**奠基**：$g = 1$、只有尾叙列位于或低于层 $g$，而它有性质 $P$．

归纳推步：$g > 1$．对 $g > h$ 言，归纳命题空虚地成立．当 $g \leqslant h$ 时，根据归纳假设，在当时的树枝图式中，层 $g$ 以下的叙列具有性质 $P$．我们根据由层 $g$ 变到层 $g-1$ 时所使用的推理而穷举．

**情形 1**：$\rightarrow \forall$．就我们的例子言，这时主要公式必是两形之一，例如（设用第二个）为 $\forall v_2 \exists w B(\mathbf{v}_1, v_2, w)$．旁边公式便是 $\exists w B(\mathbf{v}_1, b, w)$，而 b 便是原来 $\rightarrow \forall$ 的应用变元 b．我们把各次出现的 b 都代以 $\mathbf{v}_2$，实即只在前提（在层 $g$ 处）中旁边公式处以及在层 $g$ 以上的叙列处．由于这操作，在层 $g$ 处也具有性质 $P$，因为旁边公式变成 $\exists w B(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, w)$，而这是性质 $P$ 所容许的后件形式之一，而叙列中所有其它公式不外是结论中相应公式的复本，依归纳假设，后者的公式已经属于所容许的形式．

情形 2：$\forall \rightarrow$．就我们的例子言，主要公式必须是两形之一，例如（设用第二个）为 $\forall x_2 \exists y_3 A(\mathbf{y}_1, t_1, \mathbf{y}_2(t_1), x_2, y_3)$；旁边公式便

呈下形 $\exists y_3 A(\mathbf{y}_1, t_1, \mathbf{y}_2(t_1), t^*, y_3)$，这里 $t^*$ 为一项，由于以前对原来推理中的 t 作代入而得的．根据归纳假设，在层 $g$ 以下的叙列中，没有任何变元是自由出现的，因此在前提中只有 $t^*$ 中的变元才自由出现．今把这些变元（如果有的话）的每一个出现处(即只在层 $g$ 的旁边公式处及层 $g$ 以上处)都以代0(当 $D$ 为 $N$ 时)或代以某个特别明指的数字．这样，旁边公式便变成 $\exists y_3 A(\mathbf{y}_1, t_1, \mathbf{y}_2(t_1), t_2, y_3)$，这里 $t_2$ 是对 $t^*$ 作这个代入的结果，而层 $g$ 的其它公式没有更改，并且已经具有性质 $P$ 所容许的形式．

情形 3：$\to \exists$．仿情形 2（就我们的例子言，主要公式的可能形式只有一个）．

情形 4：$\exists \to$．就我们的例子言，主要公式可以为三个形式之一，例如设为 $\exists y_2 \forall x_2 \exists y_3 A(\mathbf{y}_1, t_1, y_2, x_2, y_3)$；旁边公式便呈下形 $\forall x_2 \exists y_3 A(\mathbf{y}_1, t_1, b, x_2, y_3)$ 而 b 为原来的．我们便把 b 代以数字 $\mathbf{y}_2(t_1)$．

情形 5：弱短换．其前提已经具有性质 $P$，因为除结论中所已出现的公式外它不具有别的公式；这时无需任何操作．

这样便完全明指了各操作，并证明了，在第 $g(g \leqslant h)$ 时期从层 $g$（在内）以下的叙列都具有性质 $P$．故到第 $h$ 期，当对古典谓词演算 $G1$ 内所给的证明已经全部作了更改，这时中介叙列既然不含有量词，便变成下形

$$A(\mathbf{y}_1, t_{11}, \mathbf{y}_2(t_{11}), t_{12}, \mathbf{y}_3(t_{11}, t_{12})), \cdots, A(\mathbf{y}_1, t_{l_1}, \mathbf{y}_2(t_{l_1}), t_{l_2}, \mathbf{y}_3(t_{l_1}, t_{l_2})) \to B(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, s_1), \cdots, B(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, s_m).$$

从开始直到中介叙列为止的树枝图式便变成这叙列的一个证明，这证明是属于把数字加入符号体系后的命题演算 $G1$ 的．因此根据定理 47 系，在命题演算 $H$ 内可证出下公式

$$A(\mathbf{y}_1, t_{11}, \mathbf{y}_2(t_{11}), t_{12}, \mathbf{y}_3(t_{11}, t_{12})) \& \cdots \& A(\mathbf{y}_1, t_{l_1}, \mathbf{y}_2(t_{l_1}), t_{l_2}, \mathbf{y}_3(t_{l_1}, t_{l_2})) \supset B(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, s_1) \vee \cdots \vee B(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, s_m),$$

因此由 § 28 定理 9（及 § 25 定理 4），当把它的不同的素成分当作不同的命题字母时，在命题演算的赋值过程下它是永真的．在特例，在所给的非逻辑常项的能行释义之下，不同的素成分(其中不

含变元）都取值 t 或 f，如果便指派以这些值，则上公式恒取值 t. 根据假设，就任何数对 $x_1$, $x_2$ 言 (I) 恒取值 t. 故根据 &, ⊃, ∨ 的赋值表，$B(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, s_1)$, $\cdots$, $B(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, s_m)$ 必有一取值 t. 设首先取得值 t 的是 $B(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, s_a)$. 则没有变元的项 $s_a$ 便表示一数 $s_a$，一个使得 $B(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{s}_a)$ 取得值 t 的数.

当选定数 $v_1, v_2$ 后，获得这数 $s_a$ 的整个过程都是能行的；因此 $s_a = w(v_1, v_2)$，而 $w(v_1, v_2)$ 是一个能行地可计算函数. 因此对每个 $v_1$, $v_2$ 言，

(II) $$B(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}(v_1, v_2))$$

都是 t，即 E 是能行地真的，正如所要证明的.

附注 1. 上面的构造可使我们不管函数与谓词 $f_1, \cdots, f_r, P_1, \cdots, P_s$, $y_2(x_1)$, $y_3(x_1, x_2)$ 的本性为何而对函数 $w(v_1, v_2)$ 与它们之间的关系说一些话. 当 $D$ 为 $N$ 时，不管对该定理作出能行性假设与否，我们都有：(a) $w$ 是原始递归于 $f_1, \cdots, f_r, P_1, \cdots, P_s, y_2, y_3$ 的. 因为，我们可就 $g$ 作归纳而证明，如果 $g \leqslant h$，则在第 $g$ 时期中，当 $v_1$, $v_2$ 变时，在树枝中自由出现的每一项 t，如恰巧含有 $p$ 个不同的变元，它便表示一函数 $t(v_1, v_2, u_1, \cdots, u_p)$，显式于 $f_1, \cdots, f_r, y_2, y_3$ 及常项. 故 $s_i (i = 1, \cdots, m)$ 便表示一函数 $s_i(v_1, v_2)$ 亦显式于诸 $f$, $y_2$, $y_3$ 及常项；而 $B(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, s_i)$ 的每一个素成份亦都表示一个谓词，显式于诸 $f$, $y_2$, $y_3$，常项及 $P_1, \cdots, P_s$，故由 §45 ## A, C, D 可知，$B(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, s_i)$ 便表示一谓词 $B_i(v_1, v_2)$. 原始递归于 $f_1, \cdots, f_r, P_1, \cdots, P_s, y_2, y_3$. 故若应用 #F，把 $B_i$ 作 $Q_i$，把 $s_i$ 作 $\varphi_i$（不需要 $\varphi_{m+1}$），便可推得 (a) 了. 更明指一些：(b) $w$ 显式于 $f_1, \cdots, f_r, y_2, y_3, +, \cdot, \overline{sg}, P_1, \cdots, P_s$ 的代表函数及常项（##1,2,9）.

**应用　定理 52**　就 § 73 例 2 所描述的原始递归谓词 $R(x, y)$，形式系统 $S$，公式 $A(\mathbf{x}) (x = 0, 1, 2, \cdots)$ 而言：$A(\mathbf{x})$ 在 $S$ 内可证，仅当 $(Ey)R(x, y)$ 时.（事实上，在所想作的释义下，每个在 $S$ 内可证的 ∀∃ 前束公式都是能行地真的.）

**证明**　当区域为自然数域而非逻辑常项 $0, 1, f_1, \cdots, f_k$, $=$ 照

所想作的而释义时(这是能行的),即当分别释义为 0, 1, $\varphi_1$, $\cdots$, $\varphi_k$, = 时, $S$ 的公理全是可核验的(故能行地真的). 故(b)可应用. 这时若把 $\mathrm{A}(\mathbf{x})$ 即 $\exists y f_k(\mathbf{x}, y) = 0$ 作为 E, 便得: 如果在 $S$ 内 $\vdash \mathrm{A}(\mathbf{x})$, 则在这释义下 $\mathrm{A}(\mathbf{x})$ 是能行地真的, 即有一 $y$ 使得 $f_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ 为 t(即使得 $\varphi_k(x, y) = 0$), 即 $(Ey)R(x, y)$.

**定理 53** (a) 罗宾孙系统(§49 引理 18b), 设名之为 $S$, 是简单相容的(而每个在 $S$ 内可证的 $\forall\exists$ 前束公式都是能行地真的). (b) 在 $S$ 内任给一个原始递归谓词 $R(x, y)$ 及数字地表示它的公式 $\mathrm{R}(x, y)$, 根据 §49 定理 27 系证明中的方法而获得的, 我们有: $\vdash \exists y \mathrm{R}(\mathbf{x}, y)$ 仅当 $(Ey)R(x, y)$ 时. (c) 在 $S$ 内, 如果 §61 例 1 中的公式 $\mathrm{A}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ 及 $\mathrm{B}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$ 是根据定理 27 系的证明的方法而获得的, 则有((52)之逆): $\{\vdash \mathrm{B}(\mathbf{x})\} \to (Ey)W_0(x, y)$.

**证明** 只须就古典系统而证明本定理便够了, 因为, 如果在直觉主义系统内能够证明 $1 = 0$ 或 $\exists y \mathrm{R}(\mathbf{x}, y)$ 或 $\mathrm{B}(\mathbf{x})$, 则在古典系统内必能够证明它的.

(a) 除却 *137 (或 *136) 外, 在通常的(能行的)释义下, 十三个公理都是可核验的、若应用 §35*90, 我们可把 *137 化成一个等价的 $\forall\exists$ 前束式 $\exists \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} = 0 \vee \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}')$. 这是能行地真的, 因可取 $b(a) = a \dot{-} 1$, 这时对于每个自然数 $a$ 言, $\mathbf{a} = 0 \vee \mathbf{a} = (\mathbf{b}(a))'$ 都取值 t.

(b) 我们不能直接应用相容性定理, 因为 $\exists y \mathrm{R}(\mathbf{x}, y)$ 不是 $\forall\exists$ 前束公式, 但是我们将证明(根据下引理), 可以在 $S$ 内加入一些含有新谓词符号的公理, 并把释义能行地扩张到新谓词符号去, 使得每个新公理在谓词演算内都等价于一个能行地真的前束公式, 并且在结果所得的系统 $S'$ 内有 $\vdash S(x, y) \sim \mathrm{R}(x, y)$, 这里 $\mathrm{S}(x, y)$ 不含量词而在释义之下它是表示 $R(x, y)$ 的. 于是便可以如下地得到 (b):

$$\{\text{在 } S \text{ 内 } \vdash \exists y \mathrm{R}(\mathbf{x}, y)\} \to \{\text{在 } S' \text{ 内 } \vdash \exists y \mathrm{R}(\mathbf{x}, y)\}$$
$$\to \{\text{在 } S' \text{ 内 } \vdash \exists y \mathrm{S}(\mathbf{x}, y)\} \to (Ey)R(x, y).$$

**引理 41°** 设 $\mathrm{A}(x, y)$ 为一公式不含量词并且只含有写出来

的不同的变元，又设对它的非逻辑常项给出一个能行的释义，设在这释义之下，A(x, y) 表示谓词 $A(x, y)$. 设 $\dot{A}(x)$ 为一新谓词字母. (a)设

(1) $$(Ey)A(x, y) \to (Ey)_{y \leqslant v(x)} A(x, y)$$

而 $v(x)$ 为能行地可计算函数. 设

(2) $$\dot{A}(x) \equiv (Ey)A(x, y).$$

设 $\dot{A}(x)$ 由 $\dot{A}(x)$ 而释义(根据(1)(2)，后者是能行的). 则在谓词演算中下公式

(i) $$\dot{A}(x) \sim \exists y A(x, y)$$

等价于一个能行地真的前束公式. 同样可把 "x, y" 改为 "$x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m$". (b) 仿此可把存在量词改为全称量词((1)中 "→" 须改为 "←").

**引理 41 的证明** (a)把(i)中的～复原，并用 *96, *89, *97 及 *91，我们便得到它的一个 ∀∃ 前束形的等价式

(ii) $$\forall y \exists z[\{\dot{A}(x) \supset A(x, z)\} \& \{A(x, y) \supset \dot{A}(x)\}].$$

这公式是能行地真的可取 $z(x, y) = \mu z_{z < v(x)} A(x, z)$.

(b) 仿此，若用 *95, *89, *98 及 *91，我们得

$$\forall y \exists z[\{\dot{A}(x) \supset A(x, z)\} \& \{A(x, z) \supset \dot{A}(x)\}].$$

这是能行地真的可取 $z(x, y) = \mu z_{z < v(x)} \overline{A}(x, z)$.

**定理 53(b) 的证明**(续完) 根据由 §49 定理 27 到定理 27系的证明可知，只须证明下一事便够了，即在定理 27 的证明中，可把 $S$ 扩张使得当把 $\dot{P}(x_1, \cdots, x_n, w)$ 释义为 $\varphi(x_1, \cdots, x_n) = w$ 时有 $\vdash \dot{P}(x_1, \cdots, x_n, w) \sim P(x_1, \cdots, x_n, w)$.

**情形** (Vb). 由归纳假设，$S$ 已经扩张包括了谓词符号 $\dot{Q}(x_2, \cdots, x_n, w)$ 及 $\dot{R}(y, z, x_2, \cdots, x_n, w)$，使得当把 $\dot{Q}(x_2, \cdots, x_n, w)$ 释义为 $\psi(x_2, \cdots, x_n) = w$ 而 $\dot{R}(y, z, x_2, \cdots, x_n, w)$ 释义为 $\chi(y, z, x_1, \cdots, x_n) = w$ 时有 $\vdash \dot{Q}(x_2, \cdots, x_n, w) \sim Q(x_2, \cdots, x_n, w)$ 及 $\vdash \dot{R}(y, z, x_1, \cdots, x_n, w) \sim R(y, z, x_2, \cdots, x_n, w)$. 今引入 $\boldsymbol{a} \dot{<} \boldsymbol{b}$ (如果还没有的话)，它将释义为 $a < b$，其公理为 $\boldsymbol{a} \dot{<} \boldsymbol{b} \sim \boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a} \dot{<} \boldsymbol{b} \sim \exists \boldsymbol{c}(\boldsymbol{c}' + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b})$，而以 $c \leqslant b$ 作为引理

41 中的上界 $y \leqslant v(x_1, x_2)$. 我们再把 $S$ 扩张（如果还没有的话）来包括谓词符号 $\dot{B}(c, d, i, w)$，它将释义为 $\beta(c, d, i) = w$，使得有 $\vdash \dot{B}(c, d, i, w) \sim B(c, d, i, w)$；根据 $B(c, d, i, w)$ 的定义及 §41*(180)，这可以经过几个步骤（读者可自做）而得到，其步骤大体与下面所做的相似. 我们再引入 $\dot{D}(c, d, i, x_2, \cdots, x_n)$，释义为 $(Eu)(Ev)[\beta(c, d, i') = u \& \beta(c, d, i) = v \& \chi(i, v, x_2, \cdots, x_n) = u]$，其公理为 $\dot{D}(c, d, i, x_2, \cdots, x_n) \sim \exists u \exists v[\dot{B}(c, d, i', u) \& \dot{B}(c, d, i, v) \& \dot{R}(i, v, x_2, \cdots, x_n, u)]$，并以 $u \leqslant \beta(c, d, i')$，$v \leqslant \beta(c, d, i)$ 作为其界. 其次我们再引入 $\dot{E}(c, d, y, x_2, \cdots, x_n)$，释义为 $(i)[i < y \rightarrow (Eu)(Ev)[\beta(c, d, i') = u \& \beta(c, d, i) = v \& \chi(i, v, x_2, \cdots, x_n) = u]]$，其公理为 $\dot{E}(c, d, y, x_2, \cdots, x_x) \sim \forall i[i \dot{<} y \supset \dot{D}(c, d, i, x_2, \cdots, x_n)]$，其上界为 $i \leqslant y$. 然后我们引入 $\dot{F}$ 以消去 $P(y, x_2, \cdots, x_n, w)$ 中最前的 $\exists u$，所用的界为 $u \leqslant \beta(c, d, 0)$；最后引入 $\dot{P}$ 以消去 $\exists c \exists d$，所用的界为 $c \leqslant C$ 及 $d \leqslant D$，这里 $C, D$ 如 §57 例 1 (A) 所描述，而 $\eta(y, x_2, \cdots, x_n) = \varphi(y, x_2, \cdots, x_n)$. 根据 §49 定理 I 情形 (Vb)(c)，可知用以释义 $\dot{P}(y, x_2, \cdots, x_n, w)$ 的那个谓词 $\dot{P}(y, x_2, \cdots, x_n, w)$ 的确便是 $\varphi(y_1, x_2, \cdots, x_n) = w$；再根据引作公理的或已证明的等价式便得

$$\vdash \dot{P}(y, x_2, \cdots, x_n, w) \sim P(y, x_2, \cdots, x_n, w).$$

**定理 53(c) 的证明** 仿上，根据证明定理 27 的方法而把量词 $\forall c$ 消去.

定理 53(a) 给出了在 § 76 定理 54 的第一个证明中所需要的相容性（定理 53(b) 及 52 则给出了 §76 附注 2 的证明所需要的性质）.

**定理 55** 如果把其中的归纳模式限制为：在 A(x) 中 x 不能自由出现于一量词的辖域内，则第四章的形式数论系统是简单相容的.（阿克曼[1924-5]，冯纽曼[1927]；参见希尔柏特-伯尔奈斯[1939]，第 121 页，第 122 页及第 127 页.）

更进一步：在它之内所证出的任何 $\forall\exists$ 前束公式都是能行地真的，即使再加入罗宾孙公理（引理 18b）以及加入在定理 53(b)

(c) 两部分证明中所用到的公理亦仍然如此，此外这两部分对本系统亦可适用.

**证明** 把本定理化归于下引理. 只就古典系统证明本定理便够了. 我们首先处理 A(x) 不含任何量词的情形，然后根据引理 42 便得本定理之证.

试考虑在本系统内根据公设 13 而得的一公理，设它的 A(x) 为 $A(x, x_1, \cdots, x_n)$，只含有所写出的不同变元，并且不含任何量词，设在通常释义下，$A(x, x_1, \cdots, x_n)$ 表示一个(原始递归)谓词 $A(x, x_1, \cdots, x_n)$. 若用 *89 及 *98，则该公理等价于

$$\exists y[A(0, x_1, \cdots, x_n) \& (A(y, x_1, \cdots, x_n) \supset A(y', x_1, \cdots, x_n)) \supset A(x, x_1, \cdots, x_n)].$$

这公式是能行地真的，可取

$$y = (x, x_1, \cdots, x_n) = \begin{cases} 0 \quad \text{如果} A(x, x_2, \cdots, x_n) \vee \bar{A}(0, x_1, \cdots, x_n), \\ \mu y_{y<x} A(y, x_1, \cdots, x_n) \& \bar{A}(y', x_1, \cdots, x_n) \text{ 此外情形时.} \end{cases}$$

**引理 42°** 如果把归纳模式中的 A(x) 更限制为不含任何量词则定理 55 的系统内的可证公式类(或由给定的假定公式而作的可推演公式类)并不因而减少.

**证明** 任何公式 A(x)，只要它之中没有 x 出现于量词的辖域之内，它必是由下列的公式根据命题演算的运算子而组成，即公式 $A_1, \cdots, A_{m_1}$，它们不含量词但可含 x，以及公式 $A_{m_1+1}, \cdots, A_{m_1+m_2}$，它们含有量词但不含自由的 x ($m_1, m_2 \geqslant 0$; $m = m_1 + m_2 \geqslant 1$). 根据 §29 中关于主要析取范式定理 11 (以及 §25 定理 3)，如果范式的第一情形出现，则 A(x) 等价于一些公式 $A_{i1} \& \cdots \& A_{im}$ ($i = 1, \cdots, n$) 的析取，而每个 $A_{ij}$ 或为 $A_j$ 或为 $\neg A_j$ (随 $i$ 而定)，目前暂设 $m_1, m_2 \geqslant 1$. 试把 $A_{i_1} \& \cdots \& A_{im_1}$ 写为 "$B_i(x)$"，把 $A_{i,m_1+1} \& \cdots \& A_{im}$ 写为 "$C_i$"，并以 "B(x)" 表示某个没有量词的可驳公式. 则由 §27*48 及 *34，A(x) 等价于

(a) $$B(x) \vee (B_1(x) \& C_1) \vee \cdots \vee (B_n(x) \& C_n).$$

今试考虑任何具 (a) 形的公式，$n \geq 0$，而(如上所述)各 B 不含量词，各 C 含量词但不含自由的 x；把 $n$ 叫做它的次数．我们今就次数作归纳而证明，任何根据公设 13 而得的公理，只要其中 A(x) 呈这种形状，都可用具不含量词的 A(x) 的公设 13 而证明．

归纳推步：$n > 0$．把 (a) 写为

(b) $$D(x) \vee (B_n(x) \& C_n).$$

所考虑的公理便是

(c) $$[D(0) \vee (B_n(0) \& C_n)] \& \forall x[D(x) \vee (B_n(x) \& C_n) \supset D(x') \vee (B_n(x') \& C_n)] \supset D(x) \vee (B_n(x) \& C_n).$$

我们将证明，在谓词演算内 (c) 可由下列两公理推演出：

(d) $$[B_n(0) \vee D(0)] \& \forall x[B_n(x) \vee D(x) \supset B_n(x') \vee D(x')] \supset B_n(x) \vee D(x).$$

(e) $$D(0) \& \forall x[D(x) \supset D(x')] \supset D(x)$$

即我们将证：(d)，(e)$\vdash$(c)．根据 §33 定理 14 及 §27 *45 与 *34 有：$C_n \vdash$(c)$\sim$(d)；再由 *47 及 *48：$\neg C_n \vdash$(c)$\sim$(e)．所有变元均保持固定，因为 $C_n$ 不自由地含有量词 $\forall x$ 中的变元 x，而替换是在 $\forall x$ 辖域中实行的．故用 $\vee$ 消可得 (d)，(e)，$C_n \vee \neg C_n \vdash$(c)；再用 *51 得 (d)，(e)$\vdash$(c)．

但在 (e) 中其 A(x) 是 (a) 形而次数为 $n-1$，当把 $B_n(x) \vee B(x)$ 作为新的 B(x) 时，在 (d) 中亦然．

当 $m_1 = 0$ 时，如把"$B_i(x)$"及"$B_i(x) \&$"理解为空表达式，则这方法仍可适用，但有下列差异．试考虑

(f) $$C_n \& \forall x[C_n \supset C_n] \supset C_n.$$

若用 *46 得，$C_n \vdash$(c)$\sim$(f)；若用 *48 得，$\neg C_n \vdash$(c)$\sim$(e)．但若用 §26*1，§35*75 以及 *45 与 *1 便得 $\vdash$(f)．

当 $m_2 = 0$ 时，A(x) 已经缺乏量词了．

如果范式的第二情形出现，则用 *53，*34 及 *53 可得：A(x) 等价于 $B(x) \& \neg B(x)$．

**附注 2** 在定理 52，53，55 的系统内，每个可证的 $\forall\exists$ 前束公式都是原始递归地真的．因为，对定理 53(b) 的 $R(x, y)$ 及 R(x,

y) 言，可得 $\{\vdash \exists y R(x, y)\} \rightarrow \{$有原始递归函数 $\varphi$ 使得 $(x) R(x, \varphi(x))\}$. 证明. 由附注 1，以及我们在定理 52，53 及 55 中能行释义处及能行真确性处对函数及谓词的构作可知.

**例 2** 设 $S$ 为删去 · 后的数论形式系统. 对在 § 42 开首处所引的普列斯堡格 Presberger[1930]，可加以修整使得直接给出一个能行的对应[1]，对 $S$ 内每一个闭公式 A 都可对应于另一公式 B 而具有下列的性质(1)—(4). (如讨论开公式时，可令 A 为它的闭包.) (1)在 $S$ 内 $\vdash$A ~ B. (2) 对赋值过程(定理 51 的)作一个显然的扩张后，B 或真或假. 如果 B 真 (假) 我们便说 A 为真 (假). (由(3)，这个关于 $S$ 的闭公式的真确性的特殊定义是等价于真确性的一般定义的，那将在 §81 末加以讨论.)(3)在这意义之下的真假性服从 2 值真值表; $\{\exists x A(x)$ 为真$\} \equiv (Ex)\{A(\mathbf{x})$ 为真$\}$; $\{\forall x A(x)$ 为真$\} \equiv (x)\{A(\mathbf{x})$ 为真$\}$. (4) 根据 B 为真或为假，在 $S$ 内 B 便可证或可驳. 因此(5) $S$ 是简单完备的，并且亦是依该释义言是完备的 (§41，§ 29). (6) 有一判定过程以决定 A 的真假. (7) 如果 $S$ 是简单相容的，则对 $S$ 有一判定过程，即判定是否在 $S$ 内有 $\vdash$A. 我们今证(8)如果在 $S$ 内 $\vdash$A，则 A 为真；故 $S$ 是简单相容的. 试设在 $S$ 内 $\vdash$A. 则有有限个 $S$ 内非逻辑公理 $\Gamma$，使得在 $H$ 内有 $\Gamma \vdash$A. 我们可用引理 41 把 A 中的量词消去，并把 $\Gamma$ 的每个归纳公理中的归纳公式 A(x) 亦消去量词，例如对形如 $\exists y A(x, y)$ 的部分可取

$$\nu(x) = \mu y[(\{\exists y A(\mathbf{x}, y) \text{ 为假}\} \& y = 0) \vee A(x, y)].$$

这样我们便得 $\Gamma', \Theta \vdash A'$，这里 $\Theta$ 为引理 41 中诸公式 (i)，具 $\exists$ 形或具 $\forall$ 形，消去时所引入的每个谓词符号都对应于一个 (i). 根据定理 55 (或它的证明的第一部分)，当加入 $\Theta$ 作为公理后，在所得的系统内 A' (因而 A)是真的.

**讨论** 在相容性定理的这些应用中，区域 $D$ 为自然数集，而数字已经是符号体系的一部分，能行释义则是所想要的释义. 希尔

1) 参见附录 IV——俄译注.

柏特-伯尔奈斯[1939]对他们的相容性定理在几何公理系统方面作了两个应用. 在那里他们把复数系的某种可数系统作为区域 $D$.

这些相容性的证明都在于对公理而给出一模型，正如在希尔柏特的证明论(参考§14)出现以前所做的. 但是用直觉的算术用语而对公理给出一模型并不能够无疑地证明了从公理出发后不可能在该理论内推演出矛盾来，除非同时还证明了该理论内的推理可以借助于模型内的客体而译成直觉的算术推理. 这一种证明便是现在的相容性定理(定理51)所以有别于以前的处理的地方. (参见伯尔奈斯[1936]第115—116页及希尔柏特-伯尔奈斯[1939]第48页.)

在§75第一部分关于相容性的讨论中，我们的确把在该理论内由公理出发而作的推演考虑到，但那里我用的是非有穷性的集论方法.

相容性定理是依赖于推广的主要定理(定理50)因而依赖于主要定理(定理48)以及把 $H$ 化归为 $G1$(定理46). 根据这点，如果一系统是建立于具有数学公理的谓词演算之上的，则在它之内给出一定理的证明时，我们可把这系统及证明更改，使得在证明中所出现的公式绝不比公理及定理本身为复杂，即只是它们的子公式. 在这情形下，在由"实"公理而证明"实"定理时便没有借助于"理想"叙述句而绕弯子的必要了(§14).

我们关于一部分数论的元数学相容性定理，即定理55，当然对如下扩张的系统仍然有效，即加入能行地真的前束公理而得的系统，例如，我们可加入新原始递归函数符号及它们的递归方程. 在全部系统内这些当然是可以消除的(§74例9)，但在具有有限制的归纳模式的系统内，一般说来大抵是不能消除的(因此其相容性便不是显然的了——译者).

我们还可考虑一些新归纳公设，在全部系统内它们可以作为导出规则，但当公设13照定理55那样限制时大抵不能作为导出规则的，这时我们还可以在相应的限制下作类似的处理. 这样的

例子见于希尔柏特-伯尔奈斯[1934]，第 343—346 页中，但根据斯科林[1939]及培特[1940]，当加入适当的原始递归函数及它们的递归方程后，它们是可导出的.

所有这些由严格初等的方法所获得的相容性结果，当然必不能够用以得到具有无限制的递归模式的数论形式体系的相容性，这由有名的第二哥德尔定理[1931](§42 定理 30)可以知之，它说，一系统的相容性，不能够借助可以形式化于该系统之内的方法而证明.

坚钦关于数论相容性的证明. 现在我们给出一个简单的、由利性质的 (heuristic) 报告，说明坚钦([1936],[1938a])如何证明具有无限制归纳公设的古典纯粹数论的相容性[1].

在证明坚钦[1934—5]的主要定理(§78 定理 48)时，我们使用一个三重归纳，先就混合个数而作归纳，在它的归纳推步中(证明主要引理时)，我们就次数而作归纳，在它的奠基及归纳推步中，我们就秩而作归纳. 这个三重归纳可以看作是一个"超穷归纳"，如果我们的序数系已充分地扩张至于超穷数的话 (以前它只含有自然数).

在自然数或"有限序数"之上，加入其次一数或"第一超穷序数"$\omega$、再应用后继运算而得新数 $\omega+1, \omega+2, \cdots$，它们无穷多个相继以后又跟以另一数 $2\omega$. 重复这个过程，我们得出这种数的无穷叙列，每序列都和自然数序列同构，分别从 $0, \omega, 2\omega, \cdots$ 开始，在所有这一切序列后还跟着另外一数，叫做 $\omega^2$；等等，因此得：

$$0, 1, 2, \cdots; \omega, \omega+1, \omega+2, \cdots; 2\omega, 2\omega+1, 2\omega+2, \cdots; \cdots;;$$
$$\omega^2, \omega^2+1, \omega^2+2, \cdots; \omega^2+\omega, \omega^2+\omega+1, \omega^2+\omega+2, \cdots;$$
$$\omega^2+2\omega, \omega^2+2\omega+1, \omega^2+2\omega+2, \cdots; \cdots;;$$
$$2\omega^2, 2\omega^2+1, 2\omega^2+2, \cdots; 2\omega^2+\omega, 2\omega^2+\omega+1, 2\omega^2+\omega+2, \cdots;$$

---

1) 诺维科夫[1943]用构造性方法(与坚钦不同)获得关于数论的相容性的证明——俄译注.

$$2\omega^2+2\omega, 2\omega^2+2\omega+1, 2\omega^2+2\omega+2,$$
$$\cdots; \cdots;; \cdots; ; ;\omega^3, \cdots.$$

这个图式意在暗示到某阶段为止的产生的方式和记号．超穷序数的一般理论乃康托的抽象集合论（参见康托 [1897]）的一部分．一个线性有序集（§8）如果它的任何非空子集都有一个开首元素，便叫做良序的．两有序集$M$与$N$之间，如果可以建立保持次序的一一对应，便说是相似的（$M\simeq N$）．康托的序数乃由良序集按照相似性抽象而得一样（§3）．但是尽管康托的整个超穷序数体系需要一个集论式的处理，它的开始部分（至少不太大的开始部分）的理论却可以用有穷性方式来处理．

例如，$<\omega^3$的序数可表为依某种次序而排序的自然数 3 矢．设$\alpha=(a, b, c)=a\omega^2+b\omega+c$为任何一个 3 矢；后一记号是在$<\omega^3$的序数理论内常用的记号．两个 3 矢（作为$<\omega^3$的序数）之间的次序关系可如下定义

$$\alpha_1<\alpha_2\equiv(a_1<a_2)\vee(a_1=a_2\&b_1<b_2)\vee(a_1=a_2\&b_1=b_2\&c_1<c_2).$$

换句话说，3 矢$(a, b, c)$的排序是字典排序，而以自然数作为它的无穷字母表．

就混合个数$a$，次数$b$及秩$c$而作三重通常归纳可以看作是以$(a, b, c)=a\omega^2+b\omega+c$为归纳数的一个超穷归纳．在一个到$\omega^3$为止的超穷归纳中，要证明任何一个$<\omega^3$的序数都有一性质，我们须证，对任何一序数$\alpha<\omega^3$言，如果一切$\beta<\alpha$都有这性质则$\alpha$也具有该性质．这里我们使用更简约的叙述，把奠基与归纳推步合并为一（关于通常的归纳亦可这样叙述，参见 §40 *162 b）．如果我们喜欢的话[1]，$\alpha=0$而$\beta$组成空集的情形亦可作为奠基而分开处理．归纳是属于串值型的，在$\alpha\geqslant\omega$的情形下，现在将有无穷多个前驱$\beta$．对坚钦的主要定理言，其推理便是，如果这定理对一切具有归纳数$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})=\beta<\alpha(<\omega^3)$的证明为真，则

1）例如，在极小演算（译者按，即删除公设 8 及 $8^1$ 后的系统）内，我们不能得出 $\forall x(x<0\supset A)$——俄译注．

对具归纳数 $(a, b, c) = \alpha$ 的证明亦真. 归纳数 $\alpha = (a, b, c)$ 把本定理的各情形排成良序,然后按这次序而加以证明,正如作为归纳数的自然数在通常归纳中所起的作用一样.

反之,若把 $< \omega^3$ 的序数定义为 3 矢 $(a, b, c)$, 则凡到 $\omega^3$ 为止的超穷归纳都可改用通常归纳.

我们同样可用有穷性方式而定义更高级的序数. 显然对任何有限 $n$,我们可达到 $\omega^n$. 在这一切序数之后,可取 $\omega^\omega$ 作为其次一数;以后又得 $\omega^{\omega^\omega}$; 等等.

坚钦的发现是,证明数论的相容性时,所遇到的哥德尔障碍可用一个超穷归纳而克服,这归纳达到充分大的序数. 他的超穷归纳所达到的序数,康托叫做 $\varepsilon_0$,这是比下列无穷多个序数都大的序数中最小的一个: $\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \cdots$. 在康托理论中,它是方程 $\omega^\xi = \xi$ 对 $\xi$ 的解(叫做 $\varepsilon$ 数)中最小的一个.

坚钦是就他的叙列型系统而处理的,但这些系统有等价的希尔柏特型系统. 在[1938a]他的相容性证明的叙述中,该系统的简单相容性被等同于叙列 $\longrightarrow$ 的不可证性. 因为,由 $\longrightarrow$ 根据细弱可推出任何叙列;反之,由 $\longrightarrow A \& \neg A$ 及可证叙列 $A \& \neg A \rightarrow$ 根据分割立可推得 $\longrightarrow$. 他把他系统内每一证明都和一个 $< \varepsilon_0$ 的序数相对应. 他把归纳作成无穷递降形式(参见 §40*163), 他证明,给出任何一个关于 $\longrightarrow$ 的证明, 我们都可找到关于 $\longrightarrow$ 的另一证明而对应于更小的序数. 因此,他的(因而我们的)系统便是简单相容的了.

在 1936* 年的说法中, 他所用的每一个叙列都是具有恰巧一个后件公式的. 他就一证明所对应的序数 $(< \varepsilon_0)$ 而作超穷归纳,证明了对任何可证叙列我们都可以作出一种化归, 但这种化归对 $\longrightarrow 1 = 0$ 却是无法实施的. 这种化归的可实施性可以看作是古典数论中理想陈述所能具有的有穷性意义 (§ 14).

阿克曼[1940]用直到 $\varepsilon_0$ 的超穷归纳,应用希尔柏特的 $\varepsilon$ 符号,在另一方式下对初等数论的相容性作出了证明 (这原来是希尔柏特所建议的,阿克曼 [1924-5] 已经用来证明了当具有限制的归纳

模式时的相容性).

正如直到 $\omega^5$ 的超穷归纳可以化归为通常归纳那样,直到 $\varepsilon_0$ 的归纳亦然[1],这已由希尔柏特-伯尔奈斯[1939]. 第 360 页以后[2]形式地这样做了. 但其间有一差异,在化归后者时,有一个谓词作为归纳谓词 (§75(I) 的 $A(x)$ 或 §7 的 $P(n)$), 其中明显地出现有一谓词 $Q$, $Q$ 是由一递归式而定义的, 本质上和 §57 定理 VIII 中的 $M$ 的定义一样,因此很可能它不是算术的 (§ 48), 或者等价地, 不是"初等的"(§ 57 定理 VII). 的确, 可由第二哥德尔定理 (定理 30) 而看见, 直到 $\varepsilon_0$ 的超穷归纳是不能在这系统之内化归为通常归纳的,因为在坚钦的相容性证明中, 除却这个超穷归纳外, 此外的推理都可以形式化于这系统内(因此,在特例, 这系统内无一公式可以满足定义 $Q$ 的等价式). 坚钦在他的最后一文[1943]中,直接证明了直到 $\varepsilon_0$ 的归纳的不可化归性, 而无须间接地由哥德尔定理及他的相容性证明而推出.

形式主义者原来所提议的把古典数学用相容性证明来加以保证(§ 14, §15),当时并没有想到,例如, 直到 $\varepsilon_0$ 的超穷归纳这样一种方法会被用到. 作为保证古典数论这问题的原来表述的意见来说,坚钦的证明可以被接受到什么程度,这目前只能由各人自行判断, 看各人是否愿把直到 $\varepsilon_0$ 的归纳看作有穷性方法而定. (参见 § 81 末.)

坚钦[1938]. 曾想, 若用直到比 $\varepsilon_0$ 更大的序数的超穷归纳或许可以使得解析学的相容性得以证明[3]. 根据舒特 (Schütte)[1951] 的结果,这样做的确可以得到更强的归纳形式;事实上对任何序数 $\alpha$ 而言, 设 $\varepsilon'$ 为比 $\alpha$ 大的康托 $\varepsilon$ 数中最小者, 则直到 $\varepsilon'$ 的归纳不能化归为直到 $\alpha$ 的归纳(但直到其间的序数的归纳则可化归).

---

1) 这句话只能如下地理解,对任何 $\alpha<\varepsilon_0$,直到 $\alpha$ 的归纳都可化为通常归纳. 形式的证明见附录 VI——俄译注. 按这个理解不是作者原意,见本文——译者注.

2) 参见附录 VI——俄译注.

3) 这个想法仍未得证而且招致疑问. 由诺维科夫[1951]可以看出, 在解析学中可以映象出任何一个直到可数超穷数的归纳. 因此由定理 30,坚钦的想法对可数序数言很少可能成立——俄译注.

## § 80. 判定过程，直觉主义地不可证性

在形式系统$H$内一个依照假言取式（规则2）的推理，如果给出其结论B，我们并不能决定其前提A及A⊃B，因为其中的A不知．同样，在$G1$的分割中，即使知其结论$\Delta, \Gamma \rightarrow \Lambda, \Theta$，并把该结论的前件分析为$\Delta, \Gamma$，后件分析为$\Lambda, \Theta$，我们仍不能决定其前提$\Delta \rightarrow \Lambda$, C及C, $\Gamma \rightarrow \Theta$，因为C仍然不知．

但是，除分割外，就命题演算$G1$的各规则（或$G2$的，除混合外）言，若给出依该规则所作的推理的结论，并加以分析，那末该推理的前提却是可以认出的．应用这事实以及坚钦的范式定理（定理48），我们便得到一个关于命题演算的判定过程，它与真值表过程（§28—§30）不同，可以同样适用于古典系统及直觉主义系统．

该过程的步骤在于给出一结论，列出其推理前提的可能选择．在这样做时，若把应用结构规则弱短换的一切方式必须标明出来，那是非常麻烦讨厌的．因此，为了要应用坚钦的判定过程，我们将引进一个新的坚钦型系统$G3$，在其中，结构方面的更改，即弱短换，不算作独立的推理．我们亦对谓词演算而定义$G3$，虽则只对命题演算我们才有判定过程．

在$G3$内为了省去弱短换规则起见，我们必须把$G3$的公设理解为不管前件中公式的次序及其重复次数，就古典系统言对后件亦如此，两叙列$\Gamma \rightarrow \Theta$与$\Gamma' \rightarrow \Theta'$叫做同源的，如果恰巧同样的公式出现于$\Gamma(\Theta)$和$\Gamma'(\Theta')$中，但对直觉主义说，$\Theta$与$\Theta'$不能多过一个公式的出现因而必须相同．在这意义下，对$G3$来说，当任何一个公设应用时，如果把任何叙列换为‘同源’的叙列，结果仍是同一公设的应用．

**例1** 叙列$\boldsymbol{C, A, B\&A, A \rightarrow B}$与$\boldsymbol{B\&A, A, C \rightarrow B, B}$是古典地同源的，但后一叙列不为直觉主义者所用．

对古典系统$G3$言，其公设表与$G2$的表不同之处在于：公理模式换为

$$C, \Gamma \to \Theta, C.$$

没有结构规则;每个逻辑推理规则都如下修改,把主要公式保留于前提之中. 例如$\longrightarrow\neg$,$\supset\longrightarrow$,$\to\vee$及$\neg\longrightarrow$分别变为

$$\frac{A, \Gamma \to \Theta, \neg A}{\Gamma \to \Theta, \neg A.} \quad \frac{A \supset B, \Gamma \to \Theta, A \text{ 和 } B, A \supset B, \Gamma \to \Theta}{A \supset B, \Gamma \to \Theta.}$$

$$\frac{\Gamma \to \Theta, A \vee B, A \text{ 或 } \Gamma \to \Theta, A \vee B, B}{\Gamma \to \Theta, A \vee B.} \quad \frac{\neg A, \Gamma \to \Theta, A}{\neg A, \Gamma \to \Theta.}$$

(就$\supset\longrightarrow$言,两个前提都用到;就$\longrightarrow\vee$言,由于这里是把两个规则并写为一个的,可只用两前提之一.)

对直觉主义 *G*3 而言,其公设表如下.

直觉主义形式体系 *G*3 的公设.

公理模式.

$$C, \Gamma \to C.$$

命题演算的推论规则.

$$\frac{A, \Gamma \to B}{\Gamma \to A \supset B.} \quad \frac{A \supset B, \Gamma \to A \text{ 和 } B, A \supset B, \Gamma \to \Theta}{A \supset B, \Gamma \to \Theta.}$$

$$\frac{\Gamma \to A \text{ 和 } \Gamma \to B}{\Gamma \to A \& B.} \quad \frac{A, A \& B, \Gamma \to \Theta \text{ 或 } B, A \& B, \Gamma \to \Theta}{A \& B, \Gamma \to \Theta.}$$

$$\frac{\Gamma \to A \text{ 或 } \Gamma \to B}{\Gamma \to A \vee B.} \quad \frac{A, A \vee B, \Gamma \to \Theta \text{ 和 } B, A \vee B, \Gamma \to \Theta}{A \vee B, \Gamma \to \Theta.}$$

$$\frac{A, \Gamma \to}{\Gamma \to \neg A.} \quad \frac{\neg A, \Gamma \to A}{\neg A, \Gamma \to \Theta,}$$

$\Theta$ 空或只有一公式.

谓词演算的补充推论规则.

$$\frac{\Gamma \to A(b)}{\Gamma \to \forall x A(x),} \quad \frac{A(t), \forall x A(x), \Gamma \to \Theta}{\forall x A(x), \Gamma \to \Theta.}$$

须受关于变元的限制.

$$\frac{\Gamma \to A(t)}{\Gamma \to \exists x A(x).} \quad \frac{A(b), \exists x A(x), \Gamma \to \Theta}{\exists x A(x), \Gamma \to \Theta,}$$

须受关于变元的限制.

我们还定义古典的与直觉主义的系统 *G*3a. 它们与系统 *G*3

不同之点在于：当根据任何一个规则作推理时可容许在其前提的前件及后件处随意的删去一些公式.

当我们想把一个给定的尾叙列的所有可能的证明加以穷举，尤其当我们想证明尾叙列是不可证时，可用 $G3$ 来减少当结论给定时其前提的可能选择个数. 但当尾叙列是可证时，使用 $G3a$ 经常可以把在证明中所使用的叙列缩短.

在 $G3$ 内一证明叫做不冗余的，如果在同一分支中没有两个同源的叙列出现.

**定理 56** (a) 如果在 $G3a$ 中 $\vdash \Gamma \to \Theta$ (如在 $G3$ 中 $\vdash \Gamma \to \Theta$ 当更如此)，则在 $G2$ ($G1$) 中有 $\vdash \Gamma \to \Theta$，不用混合 (分割)，所使用的逻辑规则和所给的 $G3$ 中的证明所使用的完全同名.

(b) 反之，如果在 $G2$($G1$) 内 $\vdash \Gamma \to \Theta$，并且在 $\Gamma \to \Theta$ 内没有任何变元既自由出现又约束出现，则在 $G3$ 中(当然更在 G3a中)有 $\vdash \Gamma \to \Theta$，所使用的规则和 $G2$ (或 $G1$)内所使用的逻辑规则完全同名. 引理 32a—33b (就 $G1$ 与分割而叙述的，或就 $G2$ 与混合而叙述的)对 $G3$ (及 $G3a$) 亦成立.

(c) 一公式 E 中如果没有任何变元既自由出现又约束出现，则它在 $H$ 内是可证的当且仅当在 $G3$ 内对叙列 $\longrightarrow$E 有一个不冗余的证明.

(d) 关于一命题字母公式 E 在命题演算 $H$ 内是否可证，可有一判定过程(或算法)如下，试在 $G3$ 内作出 $\longrightarrow$E 的一个不冗余的证明. E 在 $H$ 内可证或否视该证明找得出或证明不存在而定[1].

**证明** (a) 由 $G2$ 的公理经过弱换步骤可得 $G3a$ 的公理. 给出 $G3a$ 中任一推论，经过弱短换步骤我们都可把它的前提变成 $G3$ 公设表中的标准形式. 于是便可用 $G2$ 的相应规则得出所给的结论，或再经过弱短换后得出所给的结论.

**例 2** 左边所列的是直觉主义 $G3a$ 的推理，右边所列的则是

---

1) 另一算法可用以解决构造的 (直觉主义的) 命题演算的判定问题的，见皮尔察 (Б. Ю. Пильчак) [1950]，[1952]及伏罗别夫(Н. Н. Воробьев.)[1952]——俄译注.

改用 $G2$ 的.

$$\frac{B, B \to A}{B, \neg A \to C.} \quad \neg\to_{3a} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{B, B \to A}{\neg A, B \to A}}{\neg A, \neg A, B \to}\neg\to_2}{\overline{B, \neg A \to C.}}$$

(b) 根据定理 48 (及引理 34), 我们可把所给的证明取为在 $G2$ 内的不用混合的证明. $G2$ 的公理都是 $G3$ 的公理;容易核验,只要在 $G3$ 内加入六个弱短换规则,则在 $G2$ 内不用混合的任何推论都可在该系统内完成(经过一个或多个步骤). 所以只要证明把这些规则加到 $G3$ 后并没有增加可证叙列类便够了. 为这目的,我们先用归纳法证明, 如果在 $G3$ 内 $\vdash \Gamma \to \Theta$, 则在 $G3$ 内有 $\vdash \Gamma \to \Theta$, C,不过对直觉主义言,$\Theta$ 须为空的,即我们要证明,$\longrightarrow$弱是 $G3$ 的一个导出规则. 在这个归纳中,$\longrightarrow\forall$ 或 $\exists\longrightarrow$所受到的关于变元的限制是满足的, 只须先用引理 35 (正如对 $G1$, $G2$ 那样, 它对 $G3$ 是成立的), 把这个应用变元 b 在旧前提的证明中的各次自由出现, 一律改为一个不自由出现于 C 的新变元便成了. 规则弱$\longrightarrow$可同法处理; 此外, 由 $G3$ 中关于规则使用时的约定,我们立刻得出 $\longrightarrow$短,短$\longrightarrow$,$\longrightarrow$换,换$\longrightarrow$.

(c) 由 (a)(b) 及定理 46, 47 可知, E 在 $H$ 内是可证的当且仅当在 $G3$ 内有$\longrightarrow$E 的证明. 但给出任何一个在 $G3$ 内$\longrightarrow$E 的证明后,我们总可找出一个不冗余的证明,这可就在同一分支上同源叙列对的个数而归纳证明.给出任何一对同源叙列,则该对中后面一个叙列,中间的叙列以及用以导出这些叙列的各支证明,都可以省去.

(d) 的证明将待看过下面判定过程的例子以后再给出.

**例 3** (a) 在直觉主义命题演算 $H$ 中,$\boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}$ 是否可证的?由 (c),它是可证的,当且仅当在直觉主义 $G3$ 内对$\longrightarrow \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}$有一个不冗余的证明. 我们试找这样的一个证明. 由视察可知, 叙列$\longrightarrow \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}$ 并不是 $G3$ 的一条公理. 能够以 $\longrightarrow \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}$ 作为结论的, 在 $G3$ 的推论规则中只有$\to\vee$一条. 直觉主义地说,

要根据这规则而推出$\longrightarrow \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}$，其前提只能是$\longrightarrow \boldsymbol{A}$或者$\rightarrow \neg \boldsymbol{A}$. 两者都非公理，而$\longrightarrow \boldsymbol{A}$不能是$G3$中任何推论的结论，后者$\longrightarrow \neg \boldsymbol{A}$只能是根据$\longrightarrow \neg$由前提$\boldsymbol{A} \rightarrow$而得或由前提$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} \rightarrow$而得，但后一前提实际与$\boldsymbol{A} \rightarrow$同源．在$G3$的证明中，两个同源叙列是可以彼此互换的，所以只须考虑$\boldsymbol{A} \rightarrow$便够．这叙列不是一公理，而$G3$中亦没有任何推理能够以它为结论．整个的构造可如下列图式所示，共有三行或三层，我们由尾叙列$\longrightarrow \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}$出发而由下到上地编号．简单地说，我们应用$G3$的规则由下而上地从结论到前提，列出所有可能的方法，但同源的叙列则不加区别．

$$
\begin{array}{ll}
3. & \qquad\qquad \underline{\boldsymbol{A} \rightarrow} \\
2. & \underline{\rightarrow \boldsymbol{A} \text{ 或 } \rightarrow \neg \boldsymbol{A}} \\
1. & \quad \rightarrow \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}
\end{array}
$$

在这构造中，我们把在直觉主义$G3$内可以得到$\longrightarrow \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}$的证明的一切可能性都找完了而没找到．所以在直觉主义$H$内$\boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}$是不可证的．

(b) 我们已知，在古典命题演算$H$内$\boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}$是可证的(§27*51)．但是我们想看，如何由判定过程而引出在古典系统$G3$内关于$\rightarrow \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}$的证明，然后按照定理56(a)的证明，定理47，以及后者所根据的第五章的结果，我们便可以得出在古典$H$内关于$\boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}$的证明了．在第二行中，后件处保留着$\boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}$(由于$G3$内古典的及直觉主义的$\rightarrow \vee$规则的差异)，这便使得我们在第三行有更多的可能性．那里所写的“2”意指写在它下面的第二行的叙列是第三行的可能前提之一(由$\rightarrow \vee$)．因为我们要找不冗余的证明，所以我们只须讨论新前提$\rightarrow \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}, \neg \boldsymbol{A}$或者$\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}, \neg \boldsymbol{A}$便够了．下面所示的构造一直到第四行为止．

$$
\begin{array}{llll}
4. & \underline{3 \text{ 或 } \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}, \neg \boldsymbol{A}} & \underline{3 \text{ 或 } \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}, \neg \boldsymbol{A}} & \underline{3 \text{ 或 } \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}, \neg \boldsymbol{A}} \\
3. & \underline{2 \text{ 或 } \rightarrow \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}, \neg \boldsymbol{A}} & \underline{2 \text{ 或 } \rightarrow \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}, \neg \boldsymbol{A}} & \underline{\text{或 } \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}, \neg \boldsymbol{A}} \\
2. & & \underline{\rightarrow \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} \text{ 或 } \rightarrow \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}, \neg \boldsymbol{A}} & \\
1. & & \rightarrow \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A} &
\end{array}
$$

在第四行处，我们的一系列的选择中有三个是以公理结束的；即，

我们已经在 $G3$ 内找出了 $\to \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}$ 的证明. 今设在第 2 行处选取左面的(在它上面则选取新的), 我们便得在 $G3$ 内的下列证明(左面的). 在 $G3a$ 中,其中的叙列还可简化(右面的).

$$\begin{array}{ll}
4. & \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}, \neg \boldsymbol{A} \\
\hline
3. & \to \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}, \neg \boldsymbol{A} \quad \to \neg \\
\hline
2. & \to \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} \quad \to \vee \\
\hline
1. & \to \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}. \quad \to \vee
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
4. & \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} \\
\hline
3. & \to \boldsymbol{A}, \neg \boldsymbol{A} \quad \to \neg \\
\hline
2. & \to \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} \quad \to \vee \\
\hline
1. & \to \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}. \quad \to \vee
\end{array}$$

若在 $G2$ (或 $G1$) 内,后者便成:

等等

$$\begin{array}{ll}
3. & \to \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} \\
\hline
2. & \to \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A} \quad \to \vee \\
\hline
1. & \to \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}. \quad \to \text{短}
\end{array}$$

(c) 我们已经知道, 在 $H$ 内 $\neg\neg(\boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A})$ 是直觉主义地可证的 (*51). 若使用判定过程可以发现在 $G3a$ 内关于 $\neg\neg(\boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A})$ 的证明. 就 $G2$ 来说, 在 (a) 项中由于直觉主义限制后件不能多于一公式故我们不能实施缩短,但现在却可以了,因为它是在前件实施的.

$$\begin{array}{ll}
7. & \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} \\
\hline
6. & \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A} \quad \to \vee \\
\hline
5. & \boldsymbol{A}, \neg(\boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}) \to \quad \neg \to \\
\hline
4. & \neg(\boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}) \to \neg \boldsymbol{A} \quad \to \neg \\
\hline
3. & \neg(\boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}) \to \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A} \quad \to \vee \\
\hline
2. & \neg(\boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}) \to \quad \neg \to \\
\hline
1. & \to \neg\neg(\boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}) \quad \to \neg
\end{array}$$

**定理 56(d) 的证明** 显然可见,例 3 所示的过程,可以完成到任何层数,并可注意后列事实. 给定任一叙列 $\Gamma \to \Theta$,由命题字母公式组成, 若在 $\Gamma$ 或在 $\Theta$ 内任选一个含有逻辑符号的公式作为主要公式时,则作为 $\Gamma \to \Theta$ 在 $G3$ 内的推论前提而言,只能有一个或两个不同源的选择.

还须证明整个过程必然终止. 由 $G3$ 的子公式性质, $G3$ 内每一个关于 $\to$ E 的证明中, 每个叙列必须由 E 的子公式组成. 但一命题字母公式 E 只能有有限个子公式; 而在这些公式内只有有限

个（$k$个）方法选取公式以出现于前件及后件中，即至多可以写下$k$个由E的子公式所组成的不同源叙列． 因此$\rightarrow$E的不冗余证明不能够多于$k$层；因此，当过程达到(最多)第$k$层时，找出这个证明的可能性便穷尽了．

**例 4** 在直觉主义命题演算中 $\neg\neg(\boldsymbol{A}_1\vee\boldsymbol{A}_2)\supset\neg\neg\boldsymbol{A}_1\vee\neg\neg\boldsymbol{A}_2$ 是否可证？我们可如下地出发．

$$\begin{array}{ll} 3 & \neg\neg(\boldsymbol{A}_1\vee\boldsymbol{A}_2)\rightarrow\neg(\boldsymbol{A}_1\vee\boldsymbol{A}_2) \text{ 或 } \neg\neg(\boldsymbol{A}_1\vee\boldsymbol{A}_2)\rightarrow\neg\neg\boldsymbol{A}_1 \text{ 或 } \neg\neg(\boldsymbol{A}_1\vee\boldsymbol{A}_2)\rightarrow\neg\neg\boldsymbol{A}_2 \\ \hline 2 & \neg\neg(\boldsymbol{A}_1\vee\boldsymbol{A}_2)\rightarrow\neg\neg\boldsymbol{A}_1\vee\neg\neg\boldsymbol{A}_2 \\ \hline 1 & \rightarrow\neg\neg(\boldsymbol{A}_1\vee\boldsymbol{A}_2)\supset\neg\neg\boldsymbol{A}_1\vee\neg\neg\boldsymbol{A}_2. \end{array}$$

不必再把这过程做下去，我们已经可以对这问题作否定的解答了．因为我们很快地可以由2值真值表的方法来核验，第三行上的叙列没有一个是可证的．例如，如果它们的第一个 $\neg\neg(\boldsymbol{A}_1\vee\boldsymbol{A}_2)\rightarrow\neg(\boldsymbol{A}_1\vee\boldsymbol{A}_2)$ 在$G3$内可证因而（定理56(a)）在$G1$内可证，则必须 $\neg\neg(\boldsymbol{A}_1\vee\boldsymbol{A}_2)\supset\neg(\boldsymbol{A}_1\vee\boldsymbol{A}_2)$ 在$H$内可证（定理47系）．但当$\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$取值t，t时它取值f，故（§28定理9）$\neg\neg(\boldsymbol{A}_1\vee\boldsymbol{A}_2)\supset\neg(\boldsymbol{A}_1\vee\boldsymbol{A}_2)$ 在$H$内是不可证的．

**定理 57** （a）在直觉主义命题演算$H$中，对任何公式A，B言：如果$\vdash$A∨B则必$\vdash$A或$\vdash$B．（哥德尔1932．）[1]

（b）第四章中只对古典命题演算而证明的结果*14，*15，*49，*51，*52，*55—*62，对直觉主义命题演算言的确是不成立的．（对蕴涵式*49a—*62a的逆亦然．）

**证明** （a）由在$G3$内$\rightarrow\vee$的形式立可推得．就（b）说，我们可用判定过程而证明，当A，B简单地便是命题字母$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$时，这些公式都是不可证的，正如我们在例3(a)中对*51所做的那样．（*51的不可证性亦可由(a)部分及定理9而得．）对其它的公式言，若利用直觉主义命题演算中的推演当可更迅速地得出结果．例如，如果*49成立，由§27附注1，则*51亦然，与我们对*51的结果相矛盾．其它的可依次讨论．

---

1）这定理及其证明对具有下列定理的谓词演算言亦仍成立：如果 $\vdash\exists x\mathrm{A}(x)$，则有a使 $\vdash\mathrm{A}(a)$；参见拉西奥瓦及西柯尔斯基（Rasiowa and Sikorski）[1954]——俄译注．

*14. 设对任何公式 A 及 B，在直觉主义命题演算内都有 $\neg A \supset B \vdash \neg B \supset A$. 则在特例我们将有 $\neg \boldsymbol{A} \supset \neg \boldsymbol{A} \vdash \neg\neg \boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{A}$，与我们对 *49 的结果相矛盾.

*56 (参见 *56a). 如果对一切 A 与 B，直觉主义地都有 $\vdash \neg(\neg A \& \neg B) \supset A \vee B$，则在特例将有 $\vdash \neg(\neg \boldsymbol{A} \& \neg \boldsymbol{A}) \supset \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{A}$，故由 *37 与 *38 又有 $\vdash \neg\neg \boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{A}$. 由 & 消，当然更不会对一切 A 与 B，直觉主义地有 $\vdash A \vee B \sim \neg(\neg A \& \neg B)$.

*62 (参见 *62a). 如果对一切 A 与 B，直觉主义地都有 $\vdash \neg(A \& B) \supset \neg A \vee \neg B$，则在特例有 $\vdash \neg(\boldsymbol{A} \& \neg \boldsymbol{A}) \supset \neg \boldsymbol{A} \vee \neg\neg \boldsymbol{A}$，故由 *50 得 $\vdash \neg \boldsymbol{A} \vee \neg\neg \boldsymbol{A}$. 由本定理之 (a) 或有 $\vdash \neg \boldsymbol{A}$ 或有 $\vdash \neg\neg \boldsymbol{A}$，与定理 9 矛盾.

**附注 1** 同样地，在第六章内标有记号○的结果，亦即只古典地证明的定理及系，都可以（只一例外）由现在的方法证明它们是直觉主义地不成立的. 例如，由定理 8 将可推得 *49，由它的系将可从 *54 而得 *55；由定理 11 将使 $\neg\neg \boldsymbol{A}$ 等价于下列四公式之一：$\boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}$, $\neg \boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A} \& \neg \boldsymbol{A}$；等等. 例外. 如果指所提出的过程能否适用，则定理 12 显然对直觉主义命题演算不成立. 没有任何只具有限多个值的真值表可以使用，这由哥德尔 [1932] 所证明. 但的确有另一种性质的判定过程（定理 56(d)).

**谓词演算** 根据 §76 定理 54，对谓词演算是没有判定过程的.（当我们想把定理 56(d) 应用于谓词演算时，其证明在什么地方失效？试比较 §78 例 2 与例 3(a).）但是虽则因此定理 56(c) 不能对谓词演算供给一个判定过程，但是在检查谓词演算的可证性时，它却是有用的. 任给一谓词字母公式 E，若试图在 $G3$ 内找一个关于 $\rightarrow E$ 的不冗余的证明，我们有时的确找出一个，有时可以发现当时情况的一些特点，因而指出了不可能有任何证明.

**定理 58** 在直觉主义谓词演算 $H$ 内：

(a) $\neg\neg\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \vee \neg \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}))$ 是不可证的.（海丁 Heyting [1930a]；克林 Kleene [1945]，纳尔孙 Nelson [1947].）

(b) (i) $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})) \supset \boldsymbol{A} \vee \forall \boldsymbol{x} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ 是不可证的.

(ii) $\neg\neg\{\forall x(A \vee B(x)) \supset A \vee \forall x B(x)\}$ 是可证的，但

(iii) $\neg\neg\forall y\{\forall x(A(y) \vee B(x)) \supset A(y) \vee \forall x B(x)\}$ 是不可证的.

(c) 在 §35 定理 17 系的每个表中，当 A(x) 为简单谓词字母 $A(x)$ 时，由直线下的公式蕴涵直线上的公式而作成的蕴涵式(因而等价式)是不可证的，如果这两公式是由双线隔开的，则即使该蕴涵式(由 *25，即使该等价式)加上双重否定亦是不可证的.（海丁 Heyting [1946].）

(d) 在第七章中，只就古典谓词演算而证明的结果*83—*85，*92，*97—*99（定理 17)的确是失效的. 当加上双重否定时，*83，*92 及 *97 是成立的，但 *84，*85，*98 与 *99 仍然不成立.

**证明** (a) 我们试图如下地在直觉主义系统 $G3$ 内对 $\to \neg\neg\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ 作出一个不冗余的证明. 为简短起见，在某些地方我们把 $\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ 缩写为"B". 由第 3 行到第 4 行，或者$\neg$B 或者 B 可作为推论的主要公式. 如果是$\neg$B（用$\neg\to$)，则其前提是在第 3 行已经得到的（原有的 B 作为 $\Theta$ 而消失，而它的新的出现作为旁边公式). 根据 $G3$ 内一个叙列的证明的定义，所有不在叙列内出现的变元都可同等看待；因此在第 4 行对 $\to\forall$ 的前提，只须列出具有特殊变元 $b_1$ 的便够了. 同样在第 8 行我们选取另外一个特殊变元 $b_2$，它必须与 $b_1$ 不同以满足应用 $\to\forall$ 时关于变元的限制；等等.

*11. $\neg B, A(b_1), A(b_2) \to B$

10. 7 或 $\neg B, A(b_1), A(b_2) \to$

9. 7 或 $\neg B, A(b_1) \to A(b_2)$ 或 $\neg B, A(b_1) \to \neg A(b_2)$

8. 7 或 $\neg B, A(b_1) \to A(b_2) \vee \neg A(b_2)$

*7. $\neg B, A(b_1) \to B$

6. 3 或 $\neg B, A(b_1) \to$

5. 3 或 $\neg B \to A(b_1)$ 或 $\neg B \to \neg A(b_1)$

4. 3 或 $\neg B \to A(b_1) \vee \neg A(b_1)$

*3. $\neg B \to B$

2. $\neg B \to$

1. $\to \neg\neg B$.

由已经写出的结构，其一般样式是很清楚的. 第 9 行的第一个新叙列 $\neg B, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}_1) \to \boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}_2)$ 不能成为公理，因为 $\boldsymbol{b}_1$ 与 $\boldsymbol{b}_2$ 是不同的变元；同样，第 13 行的第一个新叙列 $\neg B, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}_1), \boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}_2) \to \boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}_3)$ 亦然；等等. 一切其它叙列的出现更显然地不是公理. 注意，3，7，11···行的样式；在第 $4n+3$ 行 ($n=0, 1, 2, \cdots$)处我们已经把找 $\to \neg\neg B$ 的不冗余证明的一切可能性找完了，除却找 $\neg B, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}_1), \cdots, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}_n) \to B$ 的证明以外，这里 $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ 是不同的变元. 因此，想在 $G3$ 内找关于 $\to \neg\neg B$ 的不冗余的证明将永远不能由于成功而停止的，而只能永远的引我们向上，出来无穷多个越来越复杂的叙列. 换句话说，我们证明了，如果在 $G3$ 内对 $\to \neg\neg B$ 有一个不冗余的证明，则必然对 $\neg B \to B$ 有一个更短的证明，又对 $\neg B, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}_1) \to B$ 有更短的证明，对 $\neg B, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}_1), \boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}_2) \to B$ 有更短的，以至无穷. 因为由一个给定的证明出发，不可能有无穷多个越来越短的证明，所以我们可作结论说，在直觉主义系统 $G3$ 内不可能有关于 $\to \neg\neg B$ 的证明；故由定理 56(c)，在直觉主义谓词演算 $H$ 内不可能有 $\neg\neg B$ 的证明.

(b) (i) 我们试在 $G3$ 内作一个证明，其第一步骤可唯一地决定：

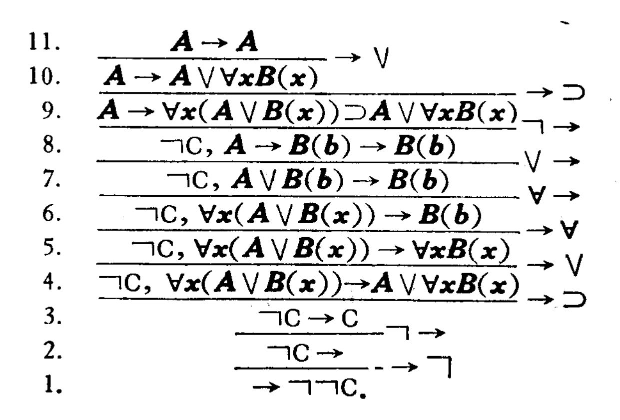
$$\begin{array}{ll} 2. & \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})) \to \boldsymbol{A} \vee \forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) \\ \hline 1. & \to \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})) \supset \boldsymbol{A} \vee \forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) \end{array}$$

根据第 2 行叙列的形式以及 $G3$ 中规则的形式，我们可以看见在最低一行以上的各叙列中，其前件只能出现下列四种形式的公式 $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}))$，$\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}(t)$ (t 为一项，对纯谓词演算言，则是一变元)，$\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{B}(t)$，而后件只能出现下列四种形式的公式 $\boldsymbol{A} \vee \forall \boldsymbol{x} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{A}$，$\forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ 及 $\boldsymbol{B}(b)$ (b 为变元). 这样的叙列要想成为公理，唯一的机会是呈下形 $\boldsymbol{A}, \Gamma \to \boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{B}(t), \Gamma \to \boldsymbol{B}(b)$ 而 t 为 b. 当用两前提的 $\vee \to$ 规则时，我们所构成的树枝形便有分支. 在第一步骤以后可能使用的其它规则都是一前提的规则 $\forall \to$，$\to \vee$ 及 $\to \forall$. 要想能够找出证明，必须按照某种选择后，每一分支(向上)都以公理而结束. 我们现在便证明，不管相继的步骤如

何实施，总有一分支沿着它时达不到公理．为此，我们要定义特异分支（我们要证明沿它向上时达不到公理），即每当应用 $\vee\rightarrow$ 时，我们指出那一个前提是属于特异分支的．设 $\vee\rightarrow$ 规则的主要公式为 $\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B}(\mathrm{t})$．如果后件的公式以 $\boldsymbol{A}$ 作为一部分或全部，则以 $\boldsymbol{B}(\mathrm{t})$ 作为旁边公式的那个前提便是属于特异分支的前提（叫做特异前提）；否则便是以 $\boldsymbol{A}$ 为旁边公式的那个前提．今考虑叙列的下列的性质 $P$，即(1)当后件以 $\boldsymbol{A}$ 为一部分或全部时，$\boldsymbol{A}$ 不出现为前件的公式之一，(2)对任何变元 b 言，如果 $\boldsymbol{B}(\mathrm{b})$ 是后件公式，则 $\boldsymbol{B}(\mathrm{b})$（同一的 b）不出现为前件的公式之一．上面所描述的公理没有一种是具性质 $P$ 的．因此要证明沿特异分支不能达到一公理，我们只须证明在特异分支上每一个叙列都具性质 $P$ 便够了．这可用归纳法证明．首先，在第一行及第二行的叙列有性质$P$．然后我们便须核验沿特异分支的每一个推论都保持性质 $P$，即如果该推理的结论具性质 $P$，则其前提亦然，对 $\vee\rightarrow$ 的情形，则其特异前提亦然．要核验这点，我们必须检查四个情形，按照推论的主要公式的形状而区分．情形 1：$\forall\mathrm{x}(\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B}(\mathrm{x}))$在前件中．性质 $P$ 显然保持，因为由于 $\forall\rightarrow$ 而引入于前件中的旁边公式是 $\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B}(\mathrm{t})$ 形，而后件不变．情形 2：$\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B}(\mathrm{t})$ 在前件中．如果后件以 $\boldsymbol{A}$ 为一部分或全部，则 $\vee\rightarrow$ 的特异前提把 $\boldsymbol{B}(\mathrm{t})$ 引入作为旁边公式，仍然保持性质 $P$．如果后件不以 $\boldsymbol{A}$ 为一部分或全部，则特异前提把 $\boldsymbol{A}$ 作为旁边公式而引入，亦保持性质 $P$．情形 3：$\boldsymbol{A}\vee\forall x\boldsymbol{B}(x)$ 作为后件．因为结论具性质 $P$，故由(1)公式 $\boldsymbol{A}$ 不作为前件公式而出现．故在后件中由 $\rightarrow\vee$ 而把 $\boldsymbol{A}$ 或 $\forall x\boldsymbol{B}(x)$ 作为旁边公式而引入，仍保持性质 $P$．情形 4：$\forall x\boldsymbol{B}(x)$ 作为后件．由于对 $\rightarrow\forall$ 所作的关于变元的限制，旁边公式 $\boldsymbol{B}(\mathrm{b})$ 的变元 b 必是不出现于前件的一个变元，而这便保证性质 $P$ 的(2)仍被满足．

(ii) 今试改考虑 $\neg\neg\{\forall x(\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B}(x))\supset\boldsymbol{A}\vee\forall x\boldsymbol{B}(x)\}$；命之为"$\neg\neg\mathrm{C}$"．这时底层以上各叙列中，前件可有公式 $\neg\mathrm{C}$ 而后件可为 C．上述的关于性质 $P$ 的归纳证明当 $\neg\mathrm{C}$ 在前件中时便不再成立，因为当 $\boldsymbol{A}$ 已经先被引入于前件后，$\neg\rightarrow$ 仍可把 C 引入作为

后件而这便破坏了(1)．前面关于不可证性的证明既有这个漏洞，根据这个漏洞，我们便得到关于 $\rightarrow \neg\neg\{\forall x(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}(x)) \supset \boldsymbol{A} \vee \forall x \boldsymbol{B}(x)\}$ 的证明，下面是在 $G3a$ 内而作出的．其中的特异分支，即若不把 $\neg C$ 用作 $\neg\rightarrow$ 的主要公式我们便将不能达到公理的，是最左的一支．



(iii) 我们再把公式改为 $\neg\neg\forall y\{\forall x(\boldsymbol{A}(y) \vee \boldsymbol{B}(x)) \supset \boldsymbol{A}(y) \vee \forall x \boldsymbol{B}(x)\}$，则上述漏洞又被堵塞了．因为在 $\neg\rightarrow$ 以前的前件所获得的 $\boldsymbol{A}$ 变成了 $\boldsymbol{A}(c)$ 而 c 为某一变元． 这时经过 $\neg\rightarrow$ 后，在后件所获得的 $\boldsymbol{A}$ 再经过就 y 言的 $\rightarrow\forall$，便变成了 $\boldsymbol{A}(d)$，而 d 为一变元，由于对 $\rightarrow\forall$ 所作的关于变元的限制，故 d 与 c 不同．读者可就(i)中的证明作出相应的修整以严格地证明其不可证性．

(c) 对任一给定的表言，设公式 A，B，C，D 如下：B 为 A 或在 A 之下，C 是直接在 B 之下而有一线与它隔开，D 为 C 或在 C 之下．由 *2，如果有 $\vdash A \supset B$ 及 $\vdash C \supset D$ 但没有 $\vdash C \supset B$，则没有 $\vdash D \supset A$．同样由 *24 及 *49a，如果 $\vdash A \supset B$ 及 $\vdash C \supset D$，但没有 $\vdash \neg\neg(C \supset D)$，则没有 $\vdash \neg\neg(D \supset A)$ 亦没有 $\vdash D \supset A$．因此只须讨论直接被一线隔开的六对公式之间的上向蕴涵式，当该线为双重时，只讨论其双重否定便够了．

$Ib \supset Ia$，$IIb \supset IIa$．如果有一是可证的，则把 $\boldsymbol{A}(x)$ 代以 $\boldsymbol{A}$（§34

定理 15)并用 *75 或 *76，或者应用 § 37 定理 22 ($k=1$) 便可以证得 $\neg\ulcorner \boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{A}$ 了. 故没有 $\vdash$Ib$\supset$Ia 亦没有 $\vdash$IIb$\supset$IIa.

$\neg\neg$(Ic$_1\supset$Ib). 设把 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \vee \neg \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 缩写为 "B($\boldsymbol{x}$)". 由 *51a 及∀引可得 $\vdash \forall \boldsymbol{x} \neg\neg \mathrm{B}(\boldsymbol{x})$. 故 $\forall \boldsymbol{x} \neg\neg \mathrm{B}(\boldsymbol{x}) \supset \neg\neg \forall \boldsymbol{x} \mathrm{B}(\boldsymbol{x}) \vdash \neg\neg \forall \boldsymbol{x} \mathrm{B}(\boldsymbol{x})$. 故由⊃引及两次换质位(*13, *12)可得 $\vdash \neg\neg\{\forall \boldsymbol{x} \neg\neg \mathrm{B}(\boldsymbol{x}) \supset \neg\neg \forall \boldsymbol{x} \mathrm{B}(\boldsymbol{x})\} \supset \neg\neg \forall \boldsymbol{x} \mathrm{B}(\boldsymbol{x})$. 因此如果 $\neg\neg\{\forall \boldsymbol{x} \neg\neg \mathrm{B}(\boldsymbol{x}) \supset \neg\neg \forall \boldsymbol{x} \mathrm{B}(\boldsymbol{x})\}$ 是可证的，则 $\neg\neg \forall \boldsymbol{x} \mathrm{B}(\boldsymbol{x})$ 亦然. 但由 (a), 没有 $\vdash \neg\neg \forall \boldsymbol{x} \mathrm{B}(\boldsymbol{x})$; 故没有 $\vdash \neg\neg\{\forall \boldsymbol{x} \neg\neg \mathrm{B}(\boldsymbol{x}) \supset \neg\neg \forall \boldsymbol{x} \mathrm{B}(\boldsymbol{x})\}$; 因此由代入规则(定理 15)没有 $\vdash \neg\neg\{\forall \boldsymbol{x} \neg\neg \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \supset \neg\neg \forall \boldsymbol{x} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\}$; 即没有 $\vdash \neg\neg$(IC$_1\supset$Ib).

$\neg\neg$(IIIc$\supset$IIIb$_2$). 容易化归为 $\neg\neg$(Ic$_1\supset$Ib).

IIc$_1\supset$IIb. 由 §37 例 3 及本节例 4 可得.

IIIb$_1\supset$IIIa. 容易化归到 IIc$_1\supset$IIb$_2$.

(d) *83—*85, *92. 包括于(b)(c)之内(并用到*25, *92a).

*97. 仿IIc$_1\supset$IIb 情形可证 $(\boldsymbol{A} \supset \exists \boldsymbol{x} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})) \supset \exists \boldsymbol{x}(\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}))$ 是不可证的. (应用了定理 22 ($k=2$)后，在第 3 行我们得: $\{\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{B}_1 \vee \boldsymbol{B}_2 \rightarrow \boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{B}_1 \vee \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{B}_1 \vee \boldsymbol{B}_2 \rightarrow (\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{B}_1) \vee (\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{B}_2)\}$ 或者 $\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{B}_1 \vee \boldsymbol{B}_2 \rightarrow \boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{B}_1$ 或 $\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{B}_1 \vee \boldsymbol{B}_2 \rightarrow \boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{B}_2$. 处理第一个可能时，只须证明两个前提中第一个前提 $\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{B}_1 \vee \boldsymbol{B}_2 \rightarrow \boldsymbol{A}$ 是不可证的当然也就够了.)又仿 (b) (ii) 可证 $\neg\neg\{(\boldsymbol{A} \supset \exists \boldsymbol{x} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})) \supset \exists \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}))\}$. (在第 4—9 行中，依次使用 $\rightarrow\exists$, $\rightarrow\supset$, $\supset\rightarrow$, $\neg\rightarrow$, $\exists\rightarrow$, 参见 *97a.)

*98. 在 $\neg\neg\{(\forall \boldsymbol{x} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \supset \boldsymbol{B}) \supset \exists \boldsymbol{x}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \supset \boldsymbol{B})\}$ 中把 $\boldsymbol{B}$ 代以 $\boldsymbol{A} \& \neg \boldsymbol{A}$, 并用 *50 及 *44 我们便得 $\neg\neg$(IIIc$\supset$IIIa).

*99. 化归为 *98 (参见对 Ib$\supset$Ia 的第一法).

海丁 (Heyting [1930a], 第 65 页)把直觉主义谓词演算用布劳维集合论来释义(§13 末)，因而推出了定理 58(a) 的公式及 Ic$_1\supset$Ib 两者的不可证性.

克林[1945] 及纳尔孙[1947]对定理 58(a)的证明是根据用 §82 方法所得到的结果的.

对(a),(b)的目前处理曾由克林[1948]报告过；对坚钦定理的类似应用亦见于寇里[1950]书中(在1948年已付印). 德伊洪(de Iongh) [1948] 使用这个方法对下列的公式作直觉主义的分类,即由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ 而加入 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ 的量词或否定而作成并且古典地等价于 $\forall \boldsymbol{x} \exists \boldsymbol{y} \forall \boldsymbol{z} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ 的，他的结果类似于海丁[1946]关于一个量词情形的四个表(§35 定理 17 系及定理 58(c))[1]. 他所以要取这种量词序列作为例子，因为在表述一序列收敛于一极限这个概念时它有其作用(参见 §35 (i) 或 (ii),但删去各 $x$).

莫斯托夫斯基[1948]把直觉主义谓词演算在"完备布劳维"格上作出释义，从而证明 $\neg\neg(\mathrm{I}c_1 \supset \mathrm{I}b)$ 及 (b)(i) 的不可证性. 汉金[1950a] 推广莫斯托夫斯基的结果从而对古典逻辑及直觉主义逻辑的量词得到一个代数的刻划.

## § 81. 把古典系统化归于直觉主义系统

在本章的以后部分，我们使用希尔柏特型系统 $H$. 当 $\Gamma$ 为 0 个或多个公式的序列时，$\neg\Gamma$, $\neg\neg\Gamma$, $\Gamma^{\circ}$ 便分别指把运算 $\neg$, $\neg\neg$, $^{\circ}$ (定义见下)应用于 $\Gamma$ 的每一个公式的结果.

本节第一部分的结果将叙述成几种说法，虽则只从一个说法亦可看出其意义. 因此读者如想得到一个简单的处理可以选读：定理 59 及证明, $^{\circ}$ 的定义及讨论,定理 60(a)关于 $^{\circ}$ 的部分及(c),引理 43a 及证明,定理 60(c) 的证明,系2(删去其它材料).

**定理 59** (a1) 如果在古典命题演算中有 $\Gamma \vdash \mathrm{E}$, 则在直觉主义命题演算内有 $\neg\neg\Gamma \vdash \neg\neg\mathrm{E}$. (a2) 如果在古典命题演算内 $\neg\Gamma, \Delta \vdash \neg\mathrm{E}$, 则在直觉主义命题演算内 $\neg\Gamma, \neg\neg\Delta \vdash \neg\mathrm{E}$. (格里文科 (Glivenko) [1929]. )

(b) 对删去规则 9 的谓词演算，及对删去规则 9 的形式数论系统亦有相同结果.

---

1) 参见奥仁西 (Ohnishi Masao) 1953——俄译注.

**证明** (a1)根据所给的$\Gamma\vdash E$的古典推演(即由于"$\Gamma\vdash E$"而肯定其存在的那个由$\Gamma$到E的推演,参见§22)的长度而归纳,并应用下列的注意. 如果E为古典命题演算中根据公理模式8以外的模式而得的公理,则E亦是直觉主义的公理,故由§27*49a,在直觉主义系统内有$\vdash\neg\neg E$. 如果E是根据古典公理模式8而得的公理,由*51b,直觉主义地亦有$\vdash\neg\neg E$. 更进一步,若用§26*23,可知相应于规则2的,直觉主义地有$\neg\neg A, \neg\neg(A\supset B)\vdash\neg\neg B$. (a2). 可由(a1)应用*49b而得.

(b) 因为补充的公理模式及特殊公理都是直觉主义系统与古典系统所共有的,我们只须处理新推理规则12便够了. 若用*23,规则12及*49a可得(i) $\neg\neg(A(x)\supset C)\vdash\neg\neg A(x)\supset\neg\neg C\ |\!\overset{x}{-}\ \exists x\neg\neg A(x)\supset\neg\neg C\vdash\neg\neg(\exists x\neg\neg A(x)\supset\neg\neg C)$. 若用*49a,§32*70及*49a可得(ii) $\vdash\neg\neg(\exists xA(x)\supset\exists x\neg\neg A(x))$. 由*51b得(iii) $\vdash\neg\neg(\neg\neg C\supset C)$. 合并(ii)(i)(iii)及*24得$\neg\neg(A(x)\supset C)\ |\!\overset{x}{-}\ \neg\neg(\exists xA(x)\supset C)$.

**例1** 由(a1),第六章中只就古典命题演算而证明的结果(见定理57(b))如果加上双重否定(在*74,*15中对两个公式都加),则仍然直觉主义地成立.

**例2** 加入双重否定后,*97直觉主义地成立(这在定理58(b)中用另一方法证明),可由(b)及§78定理49而得证.

**系((a2)的)** 如果E是一个命题字母公式,除&及¬外不含其它的逻辑符号,并且在古典命题演算内$\vdash E$,则在直觉主义命题演算内$\vdash E$(哥德尔[1932-3]).

**证明** 把E看作$n$个($n\geqslant 1$)非合取形公式的合取,故每个公式或是一命题字母或以符号¬起首. 由&消这$n$个成分都是古典地可证的. 但命题字母是不可证的(§28定理9),故每个成分都是一个否定,由格里文科定理((a2)),它亦是直觉主义地可证的. 由&引,E亦然.

**°的定义** 在本节的其余部分,当我们讨论命题演算、谓词演算或形式数论时,诸公式$\Gamma$,公式E等便将是命题字母公式,谓词

字母公式或数论公式．一公式的素部分是指一(连贯的)部分而又是素公式的，即是不含逻辑符号的公式的．

对任何公式E，我们用下列递归式而定义 $E^\circ$.1.如果P是素公式则 $P^\circ$ 为P. 2—5. 如果A与B为公式，则 $(A\supset B)^\circ$ 是 $A^\circ\supset B^\circ$，$(A\&B)^\circ$ 是 $A^\circ\&B^\circ$，$(A\vee B)^\circ$ 是 $\neg(\neg A^\circ\&\neg B^\circ)$，$(\neg A)^\circ$ 是 $\neg A^\circ$，6—7. 如果x是一变元，A(x)是一公式，$(\forall xA(x))^\circ$ 便是 $\forall xA^\circ(x)$（这里 $A^\circ(x)$ 是 $(A(x))^\circ$），而 $(\exists xA(x))^\circ$ 是 $\neg\forall x\neg A^\circ(x)$.

简单地说，$E^\circ$ 是把E中具下列第一行各形状的各部分分别换成("译为")相应的第二行的表达式而得的．

| $A\supset B$ | $A\&B$ | $A\vee B$ | $\neg A$ | $\forall xA(x)$ | $\exists xA(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A\supset B$ | $A\&B$ | $\neg(\neg A\&\neg B)$ | $\neg A$ | $\forall xA(x)$ | $\neg\forall x\neg A(x)$ |

**例3** 设A(x)与B为素的(且B不含自由的x)． 如果E为 $[\forall xA(x)\supset B]\supset\exists x[A(x)\supset B]$ （参见*98），则 $E^\circ$ 为

$$[\forall xA(x)\supset B]\supset\neg\forall x\neg[A(x)\supset B].$$

**关于°的讨论** 在下一定理中，我们将证明，古典系统可定义于直觉主义系统中．在特例，对数论系统言，如果古典地 $\vdash E$，则直觉主义地 $\vdash E^\circ$．其逆显然成立(因古典地 $\vdash E\sim E^\circ$)，正如定理59及定理60其它部分之逆一样．因此一公式E在古典系统内可证当且仅当其相应公式 $E^\circ$ 在直觉主义系统内可证．我们可把 $E^\circ$ 想象为在E中把逻辑符号 $\supset$, &, $\vee$, $\neg$, $\forall$, $\exists$ 分别改为 $\supset^\circ$, $\&^\circ$, $\vee^\circ$, $\neg^\circ$, $\forall^\circ$, $\exists^\circ$ 而得，这里"$A\supset^\circ B$"是 $A\supset B$ 的缩写，"$A\vee^\circ B$"是 $\neg(\neg A\&\neg B)$ 的缩写等等．因此古典公式便被"译成"直觉主义公式，要强调这点，可对古典系统的逻辑符号(上面的翻译表中的第一行)采用不同的符号(如用 $\supset^c$, $\&^c$, $\vee^c$, $\neg^c$, $\forall^c$, $\exists^c$).

′的定义，等等．就命题演算及谓词演算言，我们使用另一种对应．设 $E'$ 和 $E^\circ$ 相似但 $A\supset B$ 须译为 $\neg(A\&\neg B)$．设 $E^\dagger$ 由把E中每一个素成分P改为 $\neg\neg P$ 而得；$E^\ddagger$ 和 $E^\dagger$ 相似，但只当P单独时(即E本身为P时)或当P直接在&或 $\forall$ 的辖域之内时或当P在 $\supset$ 的辖域的第二部分时才把P换为 $\neg\neg P$；$E^*$ 与 $E^\ddagger$ 相似但即使P在 $\supset$ 的辖域的第二部分时亦不改换．

**例 3**(续完)

$E'$ 为 $\neg\{\neg[\forall x A(x) \& \neg B] \& \neg\neg\forall x \neg\neg[A(x) \& \neg B]\}$,

$E^{\circ\dagger}$ 为 $[\forall x \neg\neg A(x) \supset \neg\neg B] \supset \neg\forall x \neg[\neg\neg A(x) \supset \neg\neg B]$,

$E^{\circ\ddagger}$ 为 $[\forall x \neg\neg A(x) \supset \neg\neg B] \supset \neg\forall x \neg[A(x) \supset \neg\neg B]$,

$E^{*\prime}$ 为 $\neg\{\neg[\forall x \neg\neg A(x) \& \neg B] \& \neg\neg\forall x \neg\neg[A(x) \& \neg B]\}$.

就命题演算言,不可能有逆定理以把直觉主义系统化归于古典系统,其中直觉主义的命题联结词显式地由古典的命题联结词而定义.否则我们将对直觉主义命题演算而得到一个真值表的判定过程,这与哥德尔 Gödel [1932] 相矛盾.

**定理 60** (a) 对任何公式 E,命题演算内的,谓词演算内的,数论形式系统的,我们都古典地有 $\vdash E \sim E^{\circ} \sim E' \sim E^{\circ\dagger} \sim E^{\circ\ddagger} \sim E^{*\prime}$.(由 *56,*83,*58 及 *49.)

(b1) 对命题演算言,如果古典地 $\vdash E$,则直觉主义地 $\vdash E'$.

(b2) 对数论形式系统言,如果古典地 $\Gamma \vdash E$,则直觉主义地 $\Gamma' \vdash E'$.(哥德尔 Gödel [1932—3].)

(c) 对数论形式系统言,如果古典地 $\Gamma \vdash E$,则直觉主义地 $\Gamma^{\circ} \vdash E^{\circ}$.(坚钦[1936],第 532 页,伯尔奈斯.)

(d) 对命题演算,谓词演算或形式数论系统言,如果古典地 $\Gamma \vdash E$,则直觉主义地 $\Gamma^{\circ\dagger} \vdash E^{\circ\dagger}$ (又 $\Gamma^{\circ\ddagger} \vdash E^{\circ\ddagger}$ 及 $\Gamma^{*\prime} \vdash E^{*\prime}$)[1].

**证明** (b1)由 (a),如果古典地 $\vdash E$,则古典地 $\vdash E'$.但 $E'$ 只含运算子 & 及 ¬,故由定理 59 系可得 (b1).(反之,由 (b1) 可得定理 59 系.)

在证明下列引理后,我们先证 (c) 再证 (b2).

**引理 43a** 就数论形式体系言,如果 F 除 ⊃,&,¬,∀ 外没

1) 容易看见,断言 (b)(c)(d) 的逆仍然成立.事实上,例如在直觉主义系统内有 $\Gamma' \vdash E'$,则显然在古典系统内有 $\Gamma' \vdash E'$,再由(a)项,在古典系统内便有 $\Gamma \vdash E$.因此运算 °,′,0≠°†,*′ 是逼真的运算.(一个把公式变成公式的运算 α 叫做逼真的,如果公式 E 在古典系统内的可推演性等价于 αE 在直觉主义系统内的可推演性;这里 αE 是指应用 α 于公式 E 后所得的结果.)逼真这个概念由沙宁 [1954],[1955] 所引入并研究.第一个逼真运算由郭尔莫哥洛夫[1925]所作出,借它之助他证出了一大部分古典数学的相容性,只要假设直觉主义数学的相应部分的相容性便成(参见定理 60 系 2)——俄译注.

有其它逻辑符号(在特例，如果有公式E使F为$E^\circ$)，则直觉主义地$\vdash\neg\neg F\supset F$(因而$\vdash\neg\neg F\sim F$)。(根据哥德尔 Gödel [1932—3]。)

**引理 43a 的证明** 就F中逻辑符号(出现)的个数而作归纳。

奠基：F呈$s=t$形而s,t为项。由§40 *158，$\vdash s=t\vee\neg s=t$，故由 *49c，$\vdash\neg\neg s=t\supset s=t$。

归纳推步。情形1：F为$A\supset B$。由归纳假设得(i) $\vdash\neg\neg B\supset B$。由 *60g,h 得 (ii) $\neg\neg(A\supset B)\vdash A\supset\neg\neg B$。由(ii)(i)根据连锁推论(*2)得，$\neg\neg(A\supset B)\vdash A\supset B$。由$\supset$引得$\vdash\neg\neg(A\supset B)\supset(A\supset B)$。情形2：F为A&B。由归纳假设，$\vdash\neg\neg A\supset A$及$\vdash\neg\neg B\supset B$。再用 *25。情形3：F为$\neg A$。用 *49b。情形4：F为$\forall xA(x)$。用归纳假设，*69 及定理17系中的$\vdash Ib\supset Ic_1$。

**定理 60(c) 的证明** 就所给的古典推演$\Gamma\vdash E$的长度而作归纳，分别情形如下。

情形1：E是特殊公理14—21之一，或根据11以外的模式而得的公理。这时$E^\circ$为E或为根据同一模式而得的公理，或者由根据同一模式所得的公理在古典命题演算内推演出的(用 *56 及§26 定理6)；因此在下系统内$E^\circ$是可证的，即由古典命题演算加入其它公理及公理模式而得的。(例如，如果E是根据模式1a而得的公理$A\supset(B\supset A)$，则$E^\circ$为$A^\circ\supset(B^\circ\supset A^\circ)$，这是根据同一模式而得的公理。如果E为根据模式5a而得的公理$A\supset A\vee B$，则$E^\circ$为$A^\circ\supset\neg(\neg A^\circ\&\neg B^\circ)$，这可由$A^\circ\supset A^\circ\vee B^\circ$根据 *56 及定理6而推得，因为被换的部分并不在量词的辖域之内。)故由定理59(b)，在直觉主义数论系统内有$\vdash\neg\neg E^\circ$；再由引理43a，在直觉主义内又得$\vdash E^\circ$。情形2：公理模式11。这时E为$A(t)\supset\exists xA(x)$，而$E^\circ$为$A^\circ(t)\supset\neg\forall x\neg A^\circ(x)$，这可由公理$\forall x\neg A^\circ(x)\supset\neg A^\circ(t)$根据换质位(*13)而直觉主义地证出。

情形3：规则2。我们必须证明，直觉主义地有$A^\circ,(A\supset B)^\circ\vdash B^\circ$。但$(A\supset B)^\circ$本是$A^\circ\supset B^\circ$。情形4：规则9。仿此。情形5：规则12。利用 *12 及引理43a。

**定理 60(b2) 的证明** 根据引理 43a 及 §27*58b，$\Gamma^{\circ}$ 及 $E^{\circ}$ 内任何呈 $A \supset B$ 的部分都等价于 $\neg(A \& \neg B)$.

**引理 43b** 就命题演算或谓词演算言，如果 F 除 $\supset$, &, $\neg$, $\forall$ 外不含别的逻辑符号（在特例，如果有公式 E 使 F 为 $E^{\circ}$），则直觉主义地有 $\vdash \neg\neg F^{\dagger} \supset F^{\dagger}$（因而 $\vdash \neg\neg F^{\dagger} \sim F^{\dagger}$）.

**引理 43b 的证明** 仿引理 43a，在奠基中不用 *158 及 *49c 而用 *49b.

**定理 60(d) 的证明** 就数论系统及 $^{\circ\dagger}$ 而言，由 (c) 根据引理 43a 而得. 就命题演算或谓词演算及 $^{\circ\dagger}$ 而言，由引理 43b 而得，正如 (c) 之由引理 43a 而得一样.（若用引理 43a 或 43b，*58e 及 *49b，结果可改为 $\Gamma^{\circ\dagger} \vdash E^{\circ\dagger}$；若又用 *58b，结果可改成 $\Gamma^{*\prime} \vdash E^{*\prime}$.）

**附注 1** 就不除去规则 9 的谓词演算言，定理 59 不成立，又就谓词演算言，定理 60(b) 不成立，要证明这两点，可取 $\forall x \neg\neg \boldsymbol{A}(x) \supset \neg\neg \forall x \boldsymbol{A}(x)$ 为例. 命这公式为"E". 则古典地 $\vdash$E，但直觉主义地既没有 $\vdash$E，没有 $\vdash \neg\neg$E（§35 定理 17 系及定理 58 (c)），也没有 $\vdash E'$，否则由 E′ 根据 *49b 及 *58b 可直觉主义地推演得 E 了. $\neg\neg \boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{A}$ 这例子证明了定理 60(c) 对命题演算或谓词演算不成立；$\neg\neg \boldsymbol{A} \vdash \boldsymbol{A}$ 这例子证明了具有假定公式 $\Gamma$ 时定理 59 系及定理 60(b1) 不成立. 对不除去规则 9 的数论系统言，定理 59 不成立，用以证明它的例子须待下一节（定理 63(iii)）以后才能举出，因为直到现在我们还没有方法来举出一个数论公式的例子，它是古典可证但直觉主义地不可证的.

**系 1**（对 (c)） 对数论形式系统言，如果 $\Gamma$, E 中除 $\supset$, &, $\neg$, $\forall$ 以外没有其它逻辑符号，又古典地 $\Gamma \vdash$E，则直觉主义地 $\Gamma \vdash$E.（对(d)就 $^{\circ\dagger}$ 言）. 同样地，对命题演算或谓词演算亦然，只须假定在 $\Gamma$, E 中除却作为一蕴涵式的前件外，不含有非否定的字母.

**系 2**（对 (b2) (c) 或 (d)） 如果直觉主义数论系统是简单相容的，则古典数论系统亦然.

**系 2 的证明** 如果在古典系统内 $1 = 0$ 是可证的，则在直觉主义系统内亦然.

**讨论** 哥德尔说,"这定理[60(b2)或(c)]···证明了,直觉主义算术或数论只不过是表面上比古典的为狭;事实上,[它]包含了全部古典[数论],只不过它作略为不同的释义罢了."海丁接着说,"但对直觉主义者说来,这种释义是最主要的事情."([1934*],第18页.

德伊洪说,"根据我们意义主义者(Significist)的意见,直觉主义数学最重要的优点在于,它在每一事例之下都区别了直接证明的及间接证明的命题,并把数学概念分析成一系列的概念,具有不同程度的间接性的[1]."([1948]第746页.)

凡但泽(Van Dantzig)[1947]建议考查,到底古典数学可以在直觉主义数学内发展到什么程度,正如上文所说的,对初等数论说来那是全部都可以的.为了这个目的,古典公式E便被译成一个古典的等价式F,而F是直觉主义地稳定的,即有$\vdash \neg\neg F \sim F$的(参见引理43a).凡但泽暗示说,实际上可能把古典数学在这个直觉主义系统稳定部分之内全部加以释义.

关于相容性问题现在所得的结果可以看作是:证明了直觉主义数论正和古典数论一样,同样需要一个元数学的相容性证明,或者,如果我们根据其释义而接受了直觉主义系统的相容性,便当看作是保证了古典系统的相容性.

有些形式主义者指出,直觉主义初等数论的方法超出它们的有穷性的范围(参见希尔柏特-伯尔奈斯[1934],第43页及伯尔奈斯 Bernays[1935]).他们说,直觉主义者对复杂的命题使用否定,并且使用一个以复杂公式(例如一个全称公式或另一蕴涵式)为前提的蕴涵式,而这便牵涉到什么是直觉主义的证明这个一般逻辑概念.全靠这样地使用否定及蕴涵式,布劳维及其门徒才能够对构造主义数学发展得很远,比布劳维的先驱克伦涅客所发展的远得多了.

直觉主义者并不企图一般地对证明这个观念加以描述,他们

---

1) 所谓间接证明即指反证法——俄译注.

说，原则上这个描述是不可能的.

因此，直觉主义者对于否定及蕴涵式的使用，必须理解为，只是要求我们认出某一个给定的证明是可以直觉主义地接受的，或者（当他们证明具 $(A \to B) \to C$ 形的陈述时）认出，如果我们能够作出一个可直觉主义地接受的由一陈述 $A$ 到另一陈述 $B$ 的推演时，根据这个推演我们亦可以用一个给定的方法肯定地作出一个关于陈述 $C$ 的可直觉主义地接受的证明.

伯尔奈斯[1938]曾企图替坚钦的直到 $\varepsilon_0$ 的超穷归纳(§79 末)作辩护，说它对于狭隘的有穷性观点所作的推广比之整个直觉主义数论的方法所作的推广要少得多.

德伊洪 [1948] 略为提及关于直觉主义及其倾向的各种讨论（尤其是关于意义学派（Significs）的，后者由曼奴里（Mannoury）[1909，1925，1934]所代表).

定理 60 系 2 可说是用直觉主义观点来给古典数论作出相容性证明. 这证明的第二部分将是暗中地或明显地核验直觉主义数论形式体系是直觉地正确的.

因为定理 60 系 2 的证明是完全初等的，故根据哥德尔关于相容性证明的定理(§42 定理 30)，第二部分便不能这样了.[1)]

很有趣的，我们可以看见，正如在坚钦的相容性证明中用到了直到 $\varepsilon_0$ 为止的超穷归纳那样，现在的相容性证明，若加以分析，可以看见完全依赖于唯一的一个非初等步骤，即使用一个谓词，数论公式的真假性这个谓词，它是归纳地定义的，在该定义的归纳推步中出现了两类量词. 我们现在便定义这个谓词.

把符号 0，$'$，$+$，$\cdot$ 作通常的释义，把变元释义为自然数变元，把由项构成项的运算释义为显式定义的非形式的运算，在这种释义之下，任何一项 $t(x_1, \cdots, x_n)$，只包含不同变元 $x_1, \cdots, x_n$，都是表示一个原始递归函数 $t(x_1, \cdots, x_n)$，而当 $n = 0$ 时，则表示一数 $t$. 在$=$的通常释义下，每个只含 $x_1, \cdots, x_n$ 的素公式 $P(x_1,$

1) 如果古典初等数论是相容的的话——俄译注.

$\cdots, x_n$）都表示一个原始递归谓词 $P(x_1, \cdots, x_n)$，而当 $n = 0$ 时则表示一命题 $P$. 在我们的原始递归函数理论中，对每个闭素公式 $P$ 言，$P$ 的真或假都是确定的(并且是能行地判定的)，因此在真假性定义中我们将不对这部分下工夫.（的确，对该理论还可以说得多一些；参见下文例 4.）

（A）把这些作为基础，对任何闭的数论公式E 言，我们将就 E 中的逻辑符号（的出现）个数而归纳地对'E 为真的'加以定义. 在这定义中，'如果'当然指'当且仅当'，正如通常的定义一样.

1. 一闭素公式 $P$ 是真的，如果 $P$，即如果在递归函数论中 $P$ 是一个真命题.

在句子 2—5 中，A 与 B 为任何闭公式.

2. A&B 是真的，如果 A 是真的且 B 是真的.

3. A∨B 是真的，如果 A 是真的或 B 是真的.

4. A⊃B 是真的，如果 A 是真的蕴涵 B 是真的(即，A 为真的只当 B 是真的).

5. ¬A 是真的，如果 A 不是真的.

在句子 6 与 7 中，x 是一变元，而 A(x) 为一公式，只含自由的 x.[1]（这时当 $x$ 为一自然数时，**x** 便是相应的数字，§41.）

6. ∃xA(x) 是真的，如果有自然数 $x$ 使 A(**x**) 为真的.

7. ∀xA(x) 是真的，如果对于每个自然数 $x$，A(**x**) 为真的.

（B）一个只含不同自由变元 $y_1, \cdots, y_m$ 的数论公式 $A(y_1, \cdots, y_m)$ 为真的，如果对于每个自然数 $m$ 元矢 $y_1, \cdots, y_m$ 言，$A(\mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_m)$ 都是真的.（这里我们无需限制 $y_1, \cdots, y_m$ 全都自由出现于 $A(y_1, \cdots, y_m)$ 中，亦无须限制出现的次序，因为如果一公式对 $y_1, \cdots, y_m$ 的次序作某种选择时是真的，则作别的任何次序选择时亦然).

例 4. 一个没有变元的公式E 是真或假(即不真)可用 2 值真值表而判定；任何一个不含量词且只以 $x_1, \cdots, x_n$ 作为变元的公式

1）或者根本不含自由变元——俄译注.

$A(x_1, \cdots, x_n)$都表示一个原始递归谓词$A(x_1, \cdots, x_n)$，使得$A(x_1, \cdots, x_n) \equiv \{A(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)$是真的$\}$.（参见§79定理51前.）由§41(A),(C),(D)可得：在数论形式体系中，每一个没有变元的真公式都是可证的，每一个没有量词的公式$A(x_1, \cdots, x_n)$都数字地表示一个谓词$A(x_1, \cdots, x_n)$，该谓词亦即在释义之下它所表示的谓词.

用这定义，我们便可以证明下述定理，证法正和证明§37定理21那样，该定理便是在谓词演算内与它相当的定理.

**定理61** (a)[N] 如果在直觉主义的数论形式体系内有$\Gamma \vdash E$，而公式$\Gamma$是真的，则E是真的.(b)[C] 对古典数论形式体系亦同此.

(a),(b)的证明中唯一的不同点是：对(b)而言，在处理根据古典公理模式8而得的公理时，我们需用古典方法.我们对(a)标以"N"，乃表示其推理虽是直觉主义的，但已使用了非初等的方法；(b)部分标以"C"乃表示已使用了非直觉主义的古典方法(参见§37).

因为A与$\neg$A不能都是真的，故定理61(a)(当$\Gamma$空时)便蕴涵了直觉主义数论的简单相容性，再由定理60系2可得到古典数论的相容性，作为一个"N"结果.若直接由定理61(b)而推出后者，则须算作一个"C"结果，但若利用定理60，它却是可以作为"N"结果的.

**例5** (a) 如果一个$\forall\exists$前束公式是真的，它必是一般递归地真的(§79).例如，如果$\forall v \exists w_0 \exists w_1 C(v, w_0, w_1)$是真的，这里$C(v, w_0, w_1)$不含量词并且只含写出的不同的变元，那末当取$w_i(v) = (\mu w C(v, (w)_0, (w)_1))_i$时便有$(v)\ \{C(\mathbf{v}, \mathbf{w}_0(v), \mathbf{w}_1(v)$为t$\}$，根据§45#19及§57定理III可知$w_i(v)$是一般递归的.(b)[N或C] 故根据定理61(a)或(b)可得：在数论形式体系内，每一个可证的$\forall\exists$前束公式都是一般递归地真的.(参见§79附注2.)

在我们对公式所作的哥德尔编号下，谓词'A是真的'便变成一个数论谓词$T(a)$，其值可以由下命题给出，该命题由原始递归谓词通过命题演算的运算子以及量词而作成，后者使用的个数可

以是无界的[1]. 由定理 30 可以看见，谓词 $T(a)$ 不能在系统内表示，而其基本性质亦不能在系统内证明，否则我们便可以把上述的相容性证明形式化于系统之内了.（参见希尔柏特-伯尔奈斯[1939],第 329—340 页.）

事实上,下述每个谓词 $(Ex)T_1(a, a, x)$,$(x)(Ey)T_2(a, a, x, y)$,$(Ex)(y)(Ez)T_3(a, a, x, y, z)$,$\cdots$(参见 §57 定理 V 第二部分(b)都可以表成 $T(\phi(a))$ 形，而 $\phi$ 为原始递归[2]，这可由 §49 定理 I 系（由它，定理 27 系所给出的、数字地表示谓词 $T_1$，$T_2$，$T_3$，$\cdots$ 的公式在释义之下亦表示它们)以及 §52 例 2 而知道. 因此,由定理 VII(d) 与 V，$T(a)$ 不是算术的.

关于形式体系的真假性定义乃首先由塔斯基[1932,1933]所研究. 他证明了,如果一个包括有数论的（能行的）形式体系是相容的，必然不能够把关于这系统的谓词 $T(a)$ 用一公式 $\mathrm{T}(\mathbf{a})$ 表示,使得只要 $a$ 是一个闭公式 $\mathrm{A}_a$ 的哥德尔数时，$\mathrm{T}(\mathbf{a}) \sim \mathrm{A}_a$ 在系统内都是可证的,因为,否则埃皮曼尼德悖论的推理（§11）便可以在系统内作出来了.（更详细些见希尔柏特-伯尔奈斯[1939]，第 254—269 页.）[3]

公式的真假性这个观念,直觉主义的与古典的应该有所区别. 上述的真假性定义是对两者同样措词的，观念的任何差异必然由于对定义中所用的字作不同的理解而起.

在 §82 中,我们给出真假性的另一个定义,并有一定理相当于定理 61 的,但它只适用于直觉主义系统. 它的一些初步结果正和

---

1) 要定义 $T(a)$ 可根据哥德尔数 $a$ 而恢复原公式，再应用上面的关于真假性的递归定义.（这时在构造 $T(a)$ 时，公式的每个量词都相应于一量词，而公式内量词的个数是可以任意地多的.）——俄译注.

2) $\phi(a)$ 是,例如,公式 $\exists x \forall y \exists z \mathrm{T}_3(\mathbf{a}, \mathbf{a}, x, y, z)$ 的哥德尔数,这里 $\mathrm{T}_3$ 是根据定理 27 的方法而得的、数字地表示 $T_3$ 的公式——俄译注.

3) 设 $s(k)$ 为用下法所得的公式的哥德尔数,在以 $k$ 为哥德尔数的公式中把变元 $a$ 的所有自由出现均换为 $\mathbf{k}$（如果这定义不能应用,则 $s(k)$ 为 0)，又设 $p$ 为公式 $\neg \mathrm{T}(s(a))$ 的哥德尔数. 这时 $\mathrm{T}(\mathbf{a}) \sim \mathrm{A}_a$ 便可推演出 $\mathrm{T}(s(\mathbf{p})) \sim \neg \mathrm{T}(s(\mathbf{p}))$. 其次希尔柏特与伯尔奈斯用类似于理沙尔悖论的方法而证明了，在这样一个系统内不能形式地定义下一概念:“定义一个数的项”——俄译注.

定理 61(a)一样，将是直觉主义的，但非初等的("N")，但由这些结果却可以得到一些元数学结果(狭义的).

## § 82. 递归地可实现性

我们的问题是把直觉主义数论的释义用一种方式表示，使得它和古典系统有所不同的某些特点可以明显起来.

对直觉主义者说，存在陈述句"$(Ex)A(x)$"的意义可以如下释义，即它是下列陈述句的不完全的传达，该陈述句给出一个 $x$ 使得 $A(x)$ (希尔柏特-伯尔奈斯 [1934]，页 32).[1]但"$A(x)$"本身亦可以是不完全的传达. 因此，我们应该说，"$(Ex)A(x)$"是一个不完全的传达，要把这个传达补充完全，须给出 $x$ 使得 $A(x)$，同时还须就该 $x$ 而给出关于"$A(x)$"的完全传达.

这个意念可以推广到其它的逻辑运算. 例如我们可把全称陈述句"$(x)A(x)$"直觉主义地看作一个不完全的传达，要补充完全须给出一个能行的一般方法，使得对于任何 $x$ 都可找出一个消息使就这个 $x$ 而获得关于"$A(x)$"的完全传达.

仿此，蕴涵式"$A \to B$"亦可看作一个不完全的传达，它可如下地补全，给出一个能行的一般方法，只要补全"$A$"的那个消息给出后，这个方法便可以补全关于"$B$"的消息.

否定可以化归到蕴涵式去(参见 §74 例 3).

但当所需要的是自然数时，所谓能行的一般方法便是递归方法(§60, §62, §63)[2]. 还有，利用哥德尔编号后，消息可由自然数而得到.

合并这些意念，我们将对数论公式的一个性质加以定义，在所暗示的释义下，这性质大抵相当于该公式之为真一事. 但我们不说'真'而说'(递归地)可实现'，以区别于把形式逻辑符号根据相应的非形式语言而直接翻译时所定义的'真假性'(§ 81 末).

---

1) 参见 §13——俄译注.

2) 所给的须是自然数；这亦可由哥德尔编号而得——俄译注.

把一个只含自由 $x_1, \cdots, x_n$ 的项 $t(x_1, \cdots, x_n)$ 释义为一原始递归函数 $t(x_1, \cdots, x_n)$，或当 $n = 0$ 时释义为一数 $t$，把一个素公式 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 释义为原始递归谓词 $P(x_1, \cdots, x_n)$，或当 $n = 0$ 时释义为一命题 $P$（§ 81 末），这无论古典的或直觉主义的都没有不同. 我们根据这点而建立'可实现性'的定义，它把应用于数论公式的逻辑运算子直觉主义地加以释义.

首先，我们就闭公式 E 中逻辑符号（的出现）个数作归纳而定义什么叫做一自然数 $e$"（递归地）实现"了 E（或者 $e$ 为 E 的"实现数"）.[1]

(A) 1. $e$ 实现了一闭素公式 P，如果 $e = 0$ 而 P 为真（换句话说，如果 $e = 0$ 及 $P$）.

在句子 2—5 中，A 与 B 为任何闭公式.

2. $e$ 实现了 A&B，如果 $e = 2^a \cdot 3^b$ 而 $a$ 实现 A，$b$ 实现 B.

3. $e$ 实现了 A∨B，如果 $e = 2^0 \cdot 3^a$ 而 $a$ 实现 A 或 $e = 2^1 \cdot 3^b$ 而 $b$ 实现 B.

4. $e$ 实现了 A⊃B，如果 $e$ 为一元的部分递归函数 $\varphi$ 的哥德尔数，使得只要 $a$ 实现了 A，则 $\varphi(a)$ 实现 B.

5. $e$ 实现了 ¬A，如果 $e$ 实现了 $A \supset 1 = 0$.

在句子 6 与 7 中，x 为一变元，A(x) 为一公式只含自由的 x.[2]

6. $e$ 实现了 $\exists x A(x)$，如果 $e = 2^x \cdot 3^a$，而 $a$ 实现了 $A(\mathbf{x})$.

7. $e$ 实现了 $\forall x A(x)$，如果 $e$ 为一元一般递归函数 $\varphi$ 的哥德尔数，而对于每个 $x$，$\varphi(x)$ 都实现了 $A(\mathbf{x})$.

现在我们便对任一数论公式而定义'（递归地）可实现性'如下.

(B) 不含自由变元的公式 A 是可实现的，如果有一数 $p$ 实现

---

1) 这一段应如下理解，在下述定义的直接句子 $(A)_1$—$(A)_7$ 之后，还应加入一个限制句子(§6)，即：只有由 $(A)_1$—$(A)_7$ 所给出的 $e$ 才实现了一闭公式 A——俄译注.

2) 或根本不含自由变元——俄译注.

了A. 一个只含不同的自由变元 $\mathrm{y}_1, \cdots, \mathrm{y}_m$ $(m \geq 0)$ 的公式 A $(\mathrm{y}_1, \cdots, \mathrm{y}_m)$ 是可实现的，如果有一个 $m$ 元一般递归函数 $\varphi$(叫做 $\mathrm{A}(\mathrm{y}_1, \cdots, \mathrm{y}_m)$ 的实现函数) 使得，对每个 $y_1, \cdots, y_m$ 言，$\varphi(y_1, \cdots, y_m)$ 都实现了 $\mathrm{A}(\mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_m)$.（由 §44，如果一给定公式对 $\mathrm{y}_1, \cdots, \mathrm{y}_m$ 的一种选择是可实现的，则对别的选择亦然.）

在这个可实现性的定义中，对自由变元的处理与克林 [1945] 的处理不同. 它可以简化第一个定理(定理 62)的证明，然后便可推出这两个定义的等价性（由系 1).

上述的可实现性的定义是只就我们的数论公式的观念而立论，即只就我们的形式体系的形成规则而立论的.

别的可实现性观念，提到系统的公设表乃至提到假定公式 $\Gamma$ 的，可以更改下列三句而得. 句 3：把"$a$ 实现 A"改为"$a$ 实现 A 且 $\Gamma \vdash \mathrm{A}$，"把"$b$ 实现 B"改为"$b$ 实现 B 且 $\Gamma \vdash \mathrm{B}$."句 4：把"$a$ 实现 A"改为"$a$ 实现 A 且 $\Gamma \vdash \mathrm{A}$."句 6：把"$a$ 实现 $\mathrm{A}(\mathbf{x})$"改为"$a$ 实现 $\mathrm{A}(\mathbf{x})$ 且 $\Gamma \vdash \mathrm{A}(\mathbf{x})$."这样修整过后的'实现'[ '可实现性' ]可叫做 $(\Gamma \vdash)$ 实现 [$(\Gamma \vdash)$ 可实现性].

**定理 62^N** (a) 如果在直觉主义数论形式系统内有 $\Gamma \vdash \mathrm{E}$，而各公式 $\Gamma$ 是可实现的，则 E 是可实现的.（纳尔孙 David Nelson [1947]，第一部分).

(b) 仿此，把"可实现的"改为"$(\Gamma \vdash)$ 可实现的."

**引理 44^N** 如果 x 是一变元，A(x) 为一公式，除 x 以外没有其他变元，t 为一个没有变元的项，因而它表示一数 $t$，则 $e$ 实现 A(t) 当且仅当 $e$ 实现 $\mathrm{A}(\mathbf{t})$.

**引理 44 的证明** 如果 A(x) 是素的，则 A(t) 的真假等价于 $\mathrm{A}(\mathbf{t})$ 的真假. 故由句 1 本引理对素公式 A(x) 成立. 由这个奠基出发，就 A(x) 中逻辑符号(的出现)[1]个数而作归纳，并按照'实现'的定义中各句子而穷举，那末本引理对任何其他公式 A(x) 也成立了.

1) 译者加"的出现"三个字——译者注.

**引理 45**[N] 设E为闭公式，在E中把每个呈 $\neg A$ 形的部分（A为一公式）都换为 $A \supset 1=0$ 后得一公式，则 $e$ 实现E当且仅当 $e$ 实现该结果公式.

如果把"$e$ 实现"换为"$e(\Gamma\vdash)$ 实现"时，引理 44 与 45 仍成立，这里 $\vdash$ 是就直觉主义数论系统而言的，$\Gamma$ 为任何公式.（对引理 44，这时我们可引用 §41(A) 及 §38 定理 24(b).）

**定理 62 的证明** 我们只陈述 (a) 的证明，读者（愿意的话 optionally）只须略为花费一些精神，便可核验对(b)所增加的条件是满足的. 本证明可就所给推演 $\Gamma\vdash E$ 的长度而作归纳，并就我们的形式系统的各公设而穷举.

首先，我们考虑各公理. 如果 $A(y_1, \cdots, y_m)$ 为一公理，其中只含自由变元 $y_1, \cdots, y_m$，则根据 (B)，要证明它的可实现性，我们必须给出一个一般递归函数 $\varphi(y_1, \cdots, y_m)$ 使得，对于每个自然数 $m$ 矢 $y_1, \cdots, y_m$ 言，数 $\varphi(y_1, \cdots, y_m)$ 都实现了 $A(\mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_m)$. 但是对命题演算的每个公理模式言，我们总可以找一数使得，对根据这模式而得的任一公理 $A(y_1, \cdots, y_m)$ 言，它都实现了 $A(\mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_m)$. 只给出这个数（它实现了根据这模式而得的闭公理）便够了，因为当自由变元 $y_1, \cdots, y_m$ 出现时，我们可把 $\varphi(y_1, \cdots, y_m)$ 取作 $m$ 元常函数而永以这数为值(§44). 仿此，对特殊数论公理言，我们只须给出一数以实现把公理的自由变元任意代以数字后所得的结果便够了. 仿此，对公理模式而言，我们所给的实现数是 $x$ 的一般递归函数，它只依赖于用以代入 x 处的数字 $\mathbf{x}$；对公理模式 10 与 11 言，我们所给的是 $x_1, \cdots, x_n$ 的一般递归函数，它只依赖于 t 以及用以代入它的变元 $x_1, \cdots, x_n$ 处的数字 $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n$. 这样，当 $y_1, \cdots, y_m$ 包含有别的变元时，便可利用么函数（§44）把所得的函数扩张变成兼包含新变元的函数，因而得 $\varphi(y_1, \cdots, y_m)$ 了.

对于每个公理模式及特殊公理(§§19,23)，我们都用 §65 的记号来表示我们的实现数或实现函数. 至于它们为实现数或实现函数的证明，以及必须的关于递归性的核验，我们不作详细的讨论，

读者可自为之.

1a. 根据上面的预备附注，我们可只讨论根据本模式而得的不含自由变元的公理 A⊃(B⊃A) 我们证明，$\Lambda a \Lambda b a$，即 $\Lambda a \Lambda b U_1^2(a, b)$ (§ 44) 实现了 A⊃(B⊃A). 因为，设 $a$ 实现 A; 由句 4，我们必须证明 $\{\Lambda a \Lambda b a\}(a)$ 即 $\Lambda b a$（由 §65(71)）便实现了 B⊃A. 要证明这点，设 $b$ 实现 B;我们必须证明$\{\Lambda b a\}(b)$即 $a$，实现了 A. 但由假设，$a$ 的确实现了 A.

1b. (A⊃B)⊃((A⊃(B⊃C))⊃(A⊃C)) 被 $\Lambda p \Lambda q \Lambda a\{q(a)\}(p(a))$ 所实现. 因为，设 $p$ 实现了 A⊃B; 我们必须证明 $\{\Lambda p \Lambda q \Lambda a\{q(a)\}(p(a))\}(p)$ 即 $\Lambda q \Lambda a\{(q(a))\}(p(a))$ 实现了 (A⊃(B⊃C))⊃(A⊃C). 要证明这点，设 $q$ 实现了 A⊃(B⊃C);我们必须证明 $\Lambda a\{q(a)\}(p(a))$ 实现了 A⊃C. 要证明这点，设 $a$ 实现 A; 我们必须证明 $\{q(a)\}(p(a))$ 实现 C. 但由假设，$p$ 实现 A⊃B 而 $a$ 实现 A; 故 $p(a)$ 实现 B. 又 $q$ 实现 A⊃(B⊃C) 而 $a$ 实现 A，故 $q(a)$ 实现 B⊃C. 既然 $q(a)$ 实现 B⊃C 而 $p(a)$ 实现 B;故 $\{q(a)\}(p(a))$ 实现 C,这便是所想证的.

3. A⊃(B⊃A&B). $\Lambda a \Lambda b 2^a \cdot 3^b$.

4a. A&B⊃A. $\Lambda c(c)_0$ (参见 § 45#19).

4b. A&B⊃B. $\Lambda c(c)_1$.

5a. A⊃A∨B. $\Lambda a 2^0 \cdot 3^a$.

5b. B⊃A∨B. $\Lambda b 2^1 \cdot 3^b$.

6. (A⊃C)⊃((B⊃C)⊃(A∨B⊃C)). $\Lambda p \Lambda q \Lambda r \chi(p, q, r)$,其中 $\chi(p, q, r) \simeq [p((r)_1)$ 当 $(r)_0 = 0, q((r)_1)$ 当 $(r)_0 = 1]$,用定理 XXc. 设 $p$ 实现 A⊃C, $q$ 实现 B⊃C 而 $r$ 实现 A∨B, 我们必须证明 $\chi(p, q, r)$ 实现 C. 情形 1: $r = 2^0 \cdot 3^a$ 而 $a$ 实现 A. 则 $(r)_0 = 0$ 而 $(r)_1 = a$. 因 $p$ 实现 A⊃C 而 $(r)_1$ 实现 A,故 $p((r)_1)$ 实现 C. 但 $(r)_0 = 0$; 故（且因 $p((r)_1)$ 有定义）$\chi(p, q, r) = p((r)_1)$,从而它实现 C,如所欲证. 情形 2: $r = 2^1 \cdot 3^b$ 而 $b$ 实现 B. 仿上.

7. (A⊃B)⊃((A⊃¬B)⊃¬A). 用引理 45,凡实现根据公理

模式 1b 而得的闭公理(特例,以 $1=0$ 作为C的)的那些实现数亦实现根据本模式而得的公理.

$8^{I}$. $\neg A \supset (A \supset B)$. 0. 因为如果 $p$ 实现 $\neg A$, 则由句 5, $p$ 实现 $A \supset 1=0$. 但这时没有一数 $a$ 可实现 A, 否则 $p(a)$ 将实现假的闭素公式 $1=0$,与句 1[1]相矛盾. 因此空虚地可说,如果 $p$ 实现 $\neg A$ 而 $a$ 实现 A,则 $\{0(p)\}(a)$ 实现 B.

(读者可以试行核验: 不可能有显然的方式来处理古典模式 8,那将是有益的).

10. 设该公理中的 t 恰巧只含有不同的变元 $x_1, \cdots, x_n (n \geq 0)$; 记之为"$t(x_1, \cdots, x_n)$". 并设 $t(x_1, \cdots, x_n)$ 为它所表示的原始递归函数(当 $n=0$ 时,为一数). 根据预备附注,我们可假设该公理只含 $x_1, \cdots, x_n$ 是自由的; 设写之为 $\forall x A(x, x_1, \cdots, x_n) \supset A(t(x_1, \cdots, x_n), x_1, \cdots, x_n)$. 因为 $t(x_1, \cdots, x_n)$ 对 $A(x, x_1, \cdots, x_n)$ 中的 x 是自由的,故把公理中的 $x_1, \cdots, x_n$ (的自由出现)代以数字 $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n$ 的结果便是 $\forall x A(x, \mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n) \supset A(t(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n), \mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)$. 我们将证明, $\Lambda p p(t(x_1, \cdots, x_n))$ 实现这公式,而当 $x_1, \cdots, x_n$ 变时,它是 $x_1, \cdots, x_n$ 的一般(事实上是原始)递归函数. 根据句 4, 我们必须证明, 如果 $p$ 实现 $\forall x A(x, \mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)$, 则 $p(t(x_1, \cdots, x_n))$ 实现 $A(t(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n), \mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)$. 但如果 $p$ 实现了 $\forall x A(x, \mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)$,则由句 7, $p(t(x_1, \cdots, x_n))$ 实现 $A(\mathbf{t}, \mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)$ 而 $t = t(x_1, \cdots, x_n)$; 故由引理 44, $p(t(x_1, \cdots, x_n))$亦实现 $A(t(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n), \mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)$. 试设 $x_1$ 为 x,公理便是 $\forall x_1 A(x_1, \cdots, x_n) \supset A(t(x_1, \cdots, x_n), x_2, \cdots, x_n)$, 等等.

11. $A(t(x_1, \cdots, x_n), x_1, \cdots, x_n) \supset \exists x A(x, \mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)$. $\Lambda a 2^{t(x_1, \cdots, x_n)} \cdot 3^a$.

13. $A(0) \& \forall x(A(x) \supset A(x')) \supset A(x)$. 我们处理 A(x) 只含自由 x 的情形, 然后根据预备附注便可以处理一般情形了. 设用一

---

1) 似应说"与限制句子相矛盾"(参见上面的附注) —俄译注.

原始递归式定义一个部分递归函数 $\rho(x, a)$ 如下：

$$\begin{cases}\rho(0, a) = (a)_0 \\ \rho(x', a) \simeq \{\{(a)_1\}(x)\}(\rho(x, a)).\end{cases}$$

我们今证，对每个 $x$，数 $\Lambda a\rho(x,a)$ 都实现 $A(0)\&\forall x(A(x)\supset A(\mathbf{x}'))\supset A(\mathbf{x})$，而它为 $x$ 的原始递归函数．要证明这点（句 4），我们可就 $x$ 作归纳而证明：如果 $a$ 实现 $A(0)\&\forall x(A(x)\supset A(x'))$，则 $\rho(x, a)$ 实现 $A(\mathbf{x})$．奠基．如果 $a$ 实现 $A(0)\&\forall x(A(x)\supset A(x'))$，则由句 2，$\rho(0, a)[=(a)_0]$ 实现 $A(0)$．归纳步骤．仿此，$(a)_1$ 便实现 $\forall x(A(x)\supset A(x'))$，故（句 7）$\{(a)_1\}(x)$ 便实现 $A(\mathbf{x})\supset A(\mathbf{x}')$．但由归纳假设，$\rho(x, a)$ 实现 $A(\mathbf{x})$，故（句 4）$\rho(x', a)[=\{\{(a)_1\}(x)\}(\rho(x, a))]$ 实现了 $A(\mathbf{x}')$．

14. 代入数字后由这公理可得 $\mathbf{a}'=\mathbf{b}'\supset\mathbf{a}=\mathbf{b}$．这公式被 $\Lambda p0$ 所实现．因设 $p$ 实现 $\mathbf{a}'=\mathbf{b}'$，我们必须证明 0 实现 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$．因 $\mathbf{a}'=\mathbf{b}'$ 是素的，它之被实现只当它是真的时，即只当 $a'=b'$．故 $a=b$，因此 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ 亦真而 0 实现它．

仿此，对其它公理言，在代入数字后，我们可得下列的实现数．

15, 18—21：0．　　　　16：$\Lambda p\Lambda q0$．

17：$\Lambda p0$．

推论规则．2．我们利用在可实现性定义处所作的附注，把各公式看作依赖于出现于各公式上的全部变元．因此我们把本规则写为

$$\frac{A(y_1, \cdots, y_m)\quad A(y_1, \cdots, y_m)\supset B(y_1, \cdots, y_m)}{B(y_1, \cdots, y_m)}$$

根据归纳假设，两前提 $A(y_1, \cdots, y_m)$ 及 $A(y_1, \cdots, y_m)\supset B(y_1, \cdots, y_m)$ 都是可实现的，即有一般递归函数 $\alpha$ 及 $\phi$ 使得对每个自然数 $m$ 矢 $y_1, \cdots, y_m$ 言，$A(\mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_m)$ 被数 $\alpha(y_1, \cdots, y_m)$ 所实现而 $A(y_1, \cdots, y_m)\supset B(y_1, \cdots, y_m)$ 被数 $\phi(y_1, \cdots, y_m)$ 所实现．此外，$\{\phi(y_1, \cdots, y_m)\}(\alpha(y_1, \cdots, y_m))$ 显然是 $y_1, \cdots, y_m$ 的部分递归函数，但对每个 $y_1, \cdots, y_m$ 言，它的值都是一个实现数，故它必对每一个 $y_1, \cdots, y_m$ 有定义；因此它是一般递归的．故

结论 $B(y_1, \cdots, y_m)$ 便是可实现的.

9. $$\frac{C(y_1, \cdots, y_m) \supset A(x, y_1, \cdots, y_m)}{C(y_1, \cdots, y_m) \supset \forall x A(x, y_1, \cdots, y_m)}$$

根据归纳假设及可实现性的定义，有一般递归函数 $\phi$ 使得，对每个 $x, y_1, \cdots, y_m$ 言，$\phi(x, y_1, \cdots, y_m)$ 实现了 $C(\mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_m) \supset A(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_m)$. 我们今证，对每个 $y_1, \cdots, y_m$ 言，$\Lambda c \Lambda x\{\phi(x, y_1, \cdots, y_m)\}(c)$ 实现了 $C(\mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_m) \supset \forall x A(x, \mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_m)$. 这样便得出结论的可实现性，因 $\Lambda c \Lambda x\{\phi(x, y_1, \cdots, y_m)\}(c)$ 是 $y_1, \cdots, y_m$ 的原始递归函数，当然更是一般递归的了. 因此，设 $c$ 实现了 $C(\mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_m)$；我们必须证明 $\Lambda x\{\phi(x, y_1, \cdots, y_m)\}(c)$ 实现了 $\forall x A(x, \mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_m)$. 要证这点，我们必须证，对每个 $x$，$\{\phi(x, y_1, \cdots, y_m)\}(c)$ 都实现 $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_m)$. 但因 $c$ 实现 $C(\mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_m)$，又由归纳假设，$\phi(x, y_1, \cdots, y_m)$ 实现 $C(\mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_m) \supset A(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_m)$，故 $\{\phi(x, y_1, \cdots, y_m)\}(c)$ 的确实现了 $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_m)$. （注意，如果 C 含自由 x，设为"$C(x, y_1, \cdots, y_m)$"，则本证明失效. 这时我们须假设有某 $x$ 使 $c$ 实现 $C(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_m)$，因而我们只能作出结论说，对该 $x$ 言，$\{\phi(x, y_1, \cdots, y_m)\}(c)$ 实现了 $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_m)$，但我们需要的是对每个 $x$ 而有该结论.）

12. $$\frac{A(x, y_1, \cdots, y_m) \supset C(y_1, \cdots, y_m)}{\exists x A(x, y_1, \cdots, y_m) \supset C(y_1, \cdots, y_m)}$$

仿前，如果 $\phi$ 为前提的实现函数，则 $\Lambda p\{\phi((p)_0, y_1, \cdots, y_m)\}(p)$ 便为结论的实现函数.

这定理包含了直觉主义形式数论系统的简单相容性（用 (a)，$\Gamma$ 取为空公式而 E 取为 $1 = 0$），正和定理 61(a) 那样，关于这方面，定理 62 的新兴趣在于，加入什么样的新公理 $\Gamma$ 后，简单相容性仍可保持，对于这一点，它给出一些不同的条件（这将在定理 63 以后进一步讨论）.

**系 1^N** 如果 $y_1, \cdots, y_m$ 为不同的变元，$A(y_1, \cdots, y_m)$ 为一公式. 则 $A(y_1, \cdots, y_m)$ 是可实现的当且仅当 $\forall y_1 \cdots \forall y_m A(y_1,$

$\cdots, y_m$）可实现时.

因为在直觉主义形式系统内，$A(y_1, \cdots, y_m)$ 与 $\forall y_1 \cdots \forall y_m A(y_1, \cdots, y_m)$ 是可以彼此互相推演的.

这个系（当应用于下列情况，自由变元 $y_1, \cdots, y_m$ 依它们在所给公式中自由出现的先后而排列）给出了这里的可实现性定义（克林[1948]）和克林[1945]的定义之间的等价性.

**系 $2^N$** （a）如果 $\Gamma$ 是可实现公式，$A(y, x_1, \cdots, x_n)$ 为一公式，只含不同的自由变元 $x_1, \cdots, x_n, y$，又在直觉主义数论形式系统内有 $\Gamma \vdash \exists y A(x_1, \cdots, x_n, y)$，则有一个一般递归函数 $y = \varphi(x_1, \cdots, x_n)$，使得对每个 $x_1, \cdots, x_n$ 言，$A(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y})$ 都是可实现的（这里 $y = \varphi(x_1, \cdots, x_n)$）.

（b）同样地，可把"可实现的"改为下列任何一个合并性质：(i)"$(\Gamma \vdash)$ 可实现与可由 $\Gamma$ 推演出的，"(ii)"$(\Gamma \vdash)$ 可实现，可由 $\Gamma$ 推演出以及真的，"(iii)"$(\Gamma \vdash)$ 可实现，可由 $\Gamma$ 推演出以及可实现的，"(iv)"$(\Gamma \vdash)$ 可实现，可由 $\Gamma$ 推演出，真的且可实现的".

**证明** （a）由定理的（a）及定义中的(B)和（A）6.（b）(i) 改用定理的（b）.（ii）更用定理 61（a）以证明 $A(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y})$ 是真的.（iii）更用定理的（a）以证明 $A(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y})$ 是可实现的.

可实现性本意是对一公式而作直觉主义的释义；直觉主义地说，$A(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y})$ 是可实现的将蕴涵它是真的，即命题 $A(x_1, \cdots, x_n, y)$ 就其直觉主义意义来说是成立的. 公式 $\exists y A(x_1, \cdots, x_n, y)$ 则断言说，对每个 $x_1, \cdots, x_n$ 都存在一个依赖于 $x_1, \cdots, x_n$ 的 $y$ 使得 $A(x_1, \cdots, x_n, y)$；换句话说，存在一函数 $y = \varphi(x_1, \cdots, x_n)$，使得对每个 $x_1, \cdots, x_n$ 言都有 $A(x_1, \cdots, x_n, \varphi(x_1, \cdots, x_n))$. 由系（a）（当 $\Gamma$ 为空时）可知，只当存在这样一个一般递归函数 $\varphi$ 时，该公式才能在直觉主义形式系统内证明. 简单地说，一数论函数只当它是一般递归时才能够直觉主义地证明其存在.（这里我们只考虑下断言，在所有的变目 $n$ 矢 $x_1, \cdots, x_n$ 处函数值 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 都存在，因此和我们直觉主义地使用部分递归函数

一事并不冲突)。

这结果如果作为是由(a)推出的,那便依赖于我们接受下论点,$A(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y})$ 的可实现性蕴涵它的真确性。但若使用(b)(当 $\Gamma$ 空时)(这时,因为我们对 $\Gamma$ 没有加以什么条件,我们可以取最强的形式(iv)作为结论,即 $A(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y})$ 是($\vdash$)可实现的,可证的,真的及可实现的),我们亦得同一结果而无须依赖于该论点。

$\Gamma$ 之出现于系中表明了,若加入适当公理 $\Gamma$ 而把该形式系统扩张,这结果仍然成立。如果可实现性直觉主义地蕴涵真确性这论点被接受了,那末只要求这些新公理可实现便成了。否则它们须为($\Gamma\vdash$)可实现且是真的(至于可由 $\Gamma$ 推演出一事,则从关于 $\Gamma$ 的假设而自动地成立)。

这结果可对下列两者作出一连系,即由海丁所形式体系化的布劳维逻辑,以及邱吉论点(§62),即只有一般递归函数才是能行地可计算的。这两者都是构造主义观点而出发的,但在细节方面,以前两者是互不相关的。

公式 $\exists y A(x_1, \cdots, x_n, y)$ 并没有断言,使得 $A(x_1, \cdots, x_n, \varphi(x_1, \cdots, x_n))$ 成立的函数 $y = \varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 是唯一的,这需要 $\exists ! y A(x_1, \cdots x_n, y)$ (§ 41)。

古典地说,若知道存在一函数 $\varphi$ 使得,对一切 $x_1, \cdots, x_n$ 都有 $A(x_1, \cdots, x_n, \varphi(x_1, \cdots, x_n))$以后,由最小数原理便可以形式地得到一方法来描述一个特殊函数(§ 40*149及§ 41*174b)。直觉主义地,我们并没有最小数原理。但由系 2 我们的确知道,任对一个形为 $\exists y A(x_1, \cdots, x_n, y)$的公式作出特殊的直觉主义的证明后,我们都可以根据该证明,非形式地描述一个特殊的一般递归函数 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$,使得对于一切 $x_1, \cdots, x_n$,都有 $A(x_1, \cdots, x_n, \varphi(x_1, \cdots, x_n))$。

**例 1** (参见 §74 例 8 (c)。) 设 $S_1$ 为直觉主义数论系统。设 $A(x, y)$ 为一公式只含自由的 x, y。设对于每个 $x$,恰巧有一个 $y$ 使 $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 为真。则当我们引入 f 及其公理 $A(x, f(x))$ 后(以得

到 $S_2$)，这公理便把 f 刻划为，在释义之下它表示某一函数 $\varphi$. 由新公理根据 ∃ 引可得 $\vdash_2 \exists y A(x, y)$. 今设 f 及其公理 A(x, f(x)) 是可消除的. 则 $\vdash_1 \exists y A(x, y)$. 故由定理 62 系 2 (b)(ii) (当 $\Gamma$ 为空时)得：有一个一般递归函数 $y = \varphi_1(x)$ 使得，对每个 $x$，A(**x**, **y**) 是真的. 但这样便得 $\varphi_1 = \varphi$. 因此，在直觉主义数论系统内，如果引入一新函数符号 f (表示一函数 $\varphi$)及其公理，呈 A(x,f(x)) 形的，这里 A(x, y) 只含自由的 x 与 y，而 A(**x**, **y**) 恰巧只当 $y = \varphi(x)$ 时是真的，那末只当 $\varphi$ 为一般递归时，该函数符号 f 及其公理才是可消除的.

**例 2** 设 A(x, y) 为任何公式，只含自由的 x，y 而有 $\vdash_1 \exists y A(x, y)$. 则和例 1 同样，有一个一般递归函数 $y = \varphi_1(x)$ 使得，对每个 $x$，A(**x**, **y**) 是真的. 它的证明(主要点在定理 62(b) 的证明中)是构造性的；给出一个关于 ∃yA(x,y) 的证明(或这证明的哥德尔数)，我们都可找到一方程系 E 来递归地定义 $\varphi_1$ (或 $\varphi_1$ 的一个哥德尔数). 又可以能行地判定：一数 $a$ 是形为 ∃yA(x,y) 的公式的证明的哥德尔数(情形 1)或否(情形 2)，这里 A 只含自由的 x 与 y. 设

$$\theta(a) = \begin{cases} \varphi_1 \text{ 的一个哥德尔数，当情形 1 时,} \\ \Lambda x x \text{ (即 } U_1^1 \text{ 的一个哥德尔数)，当情形 2 时,} \end{cases}$$

至于究竟是 $\varphi_1$ 的那一个哥德尔数，$U_1^1$ 的那一个哥德尔数，这含混性可用适当的约定而除去. 这时 $\theta(a)$ 便是能行地可计算的. 故由邱吉论点我们可以期望 $\theta(a)$ 是一般递归的. (事实上，容易证明，$\theta(a)$ 是原始递归的，只须先证明：(1) 有一个原始递归函数 $\xi(a)$ 使得，如果 $a$ 是直觉主义数论系统内一个证明的哥德尔数，则 $\xi(a)$ 为其尾公式 A($y_1$, $\cdots$, $y_m$) 的 ($\vdash$) 实现函数 $\varphi(y_1, \cdots, y_m)$ 的一个哥德尔数，这里 $y_1, \cdots, y_m$ 是尾公式中的不同变元，按我们的变元表中出现先后而排列的.)令 $\varphi(x) = \{\theta(x)\}(x) + 1$. 则 $\varphi(x)$ 是一般递归的. 今设 A(x, y) 为一公式，恰巧只当 $y = \varphi(x)$ 时 A(**x**, **y**) 才为真(例如，数字地表示 $\varphi$ 的公式，参见 §59 定理 32(a)). 如果我们把这个公式作为例 1 中的 A(x,y)，又设 f 及

其公理 $A(x, f(x))$ 是可消除的，我们便会引起一矛盾. 因此，(2) 有一个一般递归函数 $\varphi$，使得在直觉主义数论系统内，一个表示 $\varphi$ 的新函数符号 f 及它的具 $A(x, f(x))$ 形的公理是不可消除的. 这里 $A(x, y)$ 只含自由的 x 与 y，而 $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 恰巧只当 $y = \varphi(x)$ 时为真(又对任何一个这样的 $A(x, y)$，$\exists y A(x, y)$ 是不可证的.)

**定理 $63^N$**. 对适当选取的公式 $A(x)$, $B(x)$ 及 $C(x, y)$ 言，下列的古典可证公式是不可实现的，因而(由定理 62(a))在直觉主义数论形式系统内是不可证的.(特别地，设 $A(x,y)$ 为数字地表示§57 的谓词 $T_1(x, x, z)$ 的公式，由 §49 定理 27 系而得的. 令 $A(x)$ 为 $\exists z A(x, z)$，$B(x)$ 为 $A(x) \vee \neg A(x)$ 而 $C(x, y)$ 为 $y = 1 \vee (A(x) \& y = 0)$.)

(i) $A(x) \vee \neg A(x)$

(ii) $\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ ((i) 的闭包).

(iii) $\neg\neg\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ ((ii) 的双重否定).

(iv) $\forall x \neg\neg B(x) \supset \neg\neg \forall x B(x)$.

(v) $\neg\neg\{\forall x \neg\neg B(x) \supset \neg\neg\forall x B(x)\}$ ((iv) 的双重否定).

(vi) $\exists y C(x, y) \supset \exists y[C(x, y) \& \forall z(z < y \supset \neg C(x, z))]$ (参见 §40 *149).

(vii) $\exists y(y < w \& C(x, y) \& \forall z(z < y \supset \neg C(x, z))] \vee$
$\forall y[y < w \supset \neg C(x, y)]$ (参见 *148).

以及 (vi) 及 (vii) 的闭包及闭包的双重否定式. ((i)—(v)见克林[1945]及纳尔孙[1947]).

**引理 $46^N$** (a) 如果 A 是可实现的，B 是不可实现的，则 $A \supset B$ 是不可实现的. 故：如果 A 是可实现的，则 $\neg A$ 是不可实现的. (b) 如果 A 是闭的且不可实现的，则 $A \supset B$ 及(因而) $\neg A$ 是可实现的，又(由 (a)) $\neg\neg A$ 是不可实现的.

**引理 46 的证明** (a) 由定理 62(a) 或其证明中关于规则 2 那部分可得：如果 A 及 $A \supset B$ 可实现，则 B 亦然. (b) 对一闭的 B 言，任何数，例如 0，都实现 $A \supset B$，因为空虚地有：凡 $a$ 实现 A 时(但永不实现)，$0(a)$ 都实现了 B.

**引理 47**[N] 如果在直觉主义数论形式体系中，$\mathrm{P}(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)$ 数字地表示一个一般递归谓词 $P(x_1, \cdots, x_n)$，则对于任何 $x_1, \cdots, x_n$ 言，$\mathrm{P}(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)$ 是可实现的当且仅当 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 成立。

**引理 47 的证明** 如果 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 成立，则由 §41(i)，$\vdash \mathrm{P}(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)$，故由定理 62(a)，$\mathrm{P}(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)$ 是可实现的。反之，设 $\mathrm{P}(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)$ 是可实现的，因为 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 是一般递归谓词，故我们（构造性地）有：对任给的 $x_1, \cdots, x_n$ 言，或者 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 或者 $\bar{P}(x_1, \cdots, x_n)$。但在后一情形时，由 §41 (ii) 得：$\vdash \neg \mathrm{P}(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)$，故由定理 62(a)，$\neg \mathrm{P}(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)$ 是可实现的，根据引理 46(a)，这便和我们的假设，即 $\mathrm{P}(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)$ 是可实现的，相矛盾。

**定理 63 的证明** (i) 假设(i)即 $\exists z \mathrm{A}(x, z) \vee \neg \exists z \mathrm{A}(x, z)$ 为可实现的。令 $\varphi(x)$ 为它的实现函数；并令 $\rho(x) = (\varphi(x))_0$。则 $\rho(x)$ 是一般递归的并只取值 0 及 1（由定义的 (B) 及 (A)3）。试讨论任一固定的 $x$。情形 1：$\rho(x) = 0$。则 $(\varphi(x))_1$ 实现了 $\exists x \mathrm{A}(\mathbf{x}, \mathrm{z})$；因而 $(\varphi(x))_{1,1}$ 便实现了 $\mathrm{A}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$（当 $z=(\varphi(x))_{1,0}$时），由引理 47，这时有 $T_1(x, x, z)$，故得 $(Ez)T_1(x, x, z)$。情形 2：$\rho(x) = 1$。这时 $(\varphi(x))_1$ 实现了 $\neg \exists z \mathrm{A}(\mathbf{x}, z)$，即 $(\varphi(x))_1$ 实现了 $\exists z \mathrm{A}(\mathbf{x}, z) \supset 1=0$。这时可证得 $\overline{(Ez)}T_1(x, x, z)$。因为，如果有一 $z$ 使得 $T_1(x, x, z)$，由引理 47，$\mathrm{A}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ 将是可实现的；设 $k$ 实现它。则 $2^z \cdot 3^k$ 将实现 $\exists z \mathrm{A}(\mathbf{x}, z)$；$\{(\varphi(x))_1\}(2^z \cdot 3^k)$ 将实现 $1=0$，而这是不可能的。由这两情形便证明了一般递归函数 $\rho(x)$ 是 $(Ez)T_1(x, x, z)$ 的代表函数。但 $(Ez)T_1(x, x, z)$ 不是递归的（§57 定理 V(15)）；故这样的一般递归 $\rho(x)$ 不可能存在。由反证法，(i) 是不可实现的。

(ii)(iii) 根据∨消可由 (ii) 而直觉主义地推演出 (i)，故由定理 62(a)，(ii) 亦是不可实现的；既然 (ii) 是闭的，由引理 46(b)，(iii) 亦不可实现。

(iv) 若用 §27*51a 及∀引，(iii) 可由 (iv) 推演出。

(vi) 我们今证明由 (vi) 可推演得 (i). 由 $1=1$ (那是可证的). 根据$\vee$引及$\exists$引得 $\exists y C(x, y)$, 由此再由 (vi) 及$\supset$消可得 $\exists y[C(x, y) \& \forall z(z<y \supset \neg C(x, z))]$. 为了要使用&消及$\exists$消, 设 $C(x, y)$, 即

$$(1) \qquad y=1 \vee (A(x) \& y=0)$$

及

$$\forall z(z<y \supset \neg C(x, z)), \text{ 即}$$

$$(2) \qquad \forall z(z<y \supset \neg\{z=1 \vee (A(x) \& z=0)\}).$$

我们用穷举证法由(1)借助于(2)而推演 (i). 情形 1: 假设 $y=1$. 为了使用反证法, 更假设 $A(x)$. 由此及 $0=0$, 根据&引及$\vee$引得 $0=1 \vee (A(x) \& 0=0)$. 但又由 $y=1$ 及*135b 得 $0<y$;故由(2)及$\forall$消(把 0 作为 t) 及$\supset$消可得 $\neg\{0=1 \vee (A(x) \& 0=0)\}$. 故由反证法可得 $\neg A(x)$. 由$\vee$引得 $A(x) \vee \neg A(x)$,它便是(i)而且不含自由变元 y (y 是我们建议的$\exists$消变元).情形 2: 假设 $A(x) \& y=0$. 由&消及$\vee$引得 $A(x) \vee \neg A(x)$. (这推演和 §64 例 6 的直觉推理相应.)

(vii) 由 (vii) 可推演 (vi),见由 *148 到 *149 的证明.

定理 63(i)—(v) 蕴涵着,在直觉主义命题演算中 $\boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}$ 是不可证的,而在直觉主义谓词演算中,$\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \vee \neg \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}))$, $\neg\neg\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \vee \neg \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}))$, $\forall \boldsymbol{x}\neg\neg \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \supset \neg\neg\forall \boldsymbol{x} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 及$\neg\neg\{\forall \boldsymbol{x}\neg\neg \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \supset \neg\neg\forall \boldsymbol{x} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\}$ 亦是不可证的, 这由定理 57b 及定理 58 (a) 及 (c) 已经知道了. 这里的证明和上文根据坚钦范式定理而作的证明比较起来是不够初等的, 但它对直觉主义逻辑如何地作为数论推理的工具这事说来却给了透彻的阐明. 我们证明了, 在直觉主义数论中, 只当自由变元 x 出现时, $A \vee \neg A$ 才是不可证的[1].

**系** (对 (ii))$^{N}$ 公式 $\neg\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ (虽则是一个古典可证公式的否定)是可实现的.

由 (ii) 及引理 46(b).

---

1) 古典地说,对闭公式 A 言,公式 $A \vee \neg A$ 是可实现的,由引理 46(b), $\vee$引及定理 62(a) 可知(克林 Kleene [1945])——俄译注.

公式 $\forall x(A(x)\vee\neg A(x))$ 是古典地可证的，故在古典释义下是真的．但它是不可实现的．因此，如果把可实现性接受为直觉主义真确性的一个必要条件，则它是直觉主义地不真的，因此不但在目前的直觉主义形式体系内不可证，而且用任何直觉主义方法亦不可证．

这附带地蕴涵着，在补充以相容性的直觉主义证明以后，仍不能象 § 14 所暗示的那样，以为我们的古典形式系统可以作为直觉主义证明的工具，除却属于非常狭隘的一类公式以外(包括 §42 末的形为 $B(\mathbf{x})$ 及 $\forall xB(x)$ 的公式，但不包括这里的公式 $\forall x(A(x)\vee\neg A(x))$)．

该公式的否定 $\neg\forall x(A(x)\vee\neg A(x))$ 是古典地不真但（由系）是可实现的，因此如果我们把(直觉主义地建立的)可实现性作为直觉主义的真确性的充分条件的话，它便是直觉主义地真的．

因此便出现了一个可能性，即直觉主义地断定下公式 $\neg\forall x(A(x)\vee\neg A(x))$．以前我们本来把直觉主义数论看作古典数论的一个子系统的，现在却可以把直觉主义数论加以扩张，使得直觉主义数论与古典数论有所分歧，在直觉主义数论内有 $\neg\forall x(A(x)\vee\neg A(x))$，而在古典数论内有 $\forall x(A(x)\vee\neg A(x))$．

对数学家说来，这种分歧是熟悉的，如欧氏几何与非欧几何或其他的例子，但在算术中却是一个新现象．第一个实例(按在算术中——译者)是加入 $A_p(\mathbf{p})$ 或 $\neg A_p(\mathbf{p})$ 于数论形式系统内而得的，参见 § 42 末及 §75．

不但公式 $\neg\forall x(A(x)\vee\neg A(x))$ 本身是可实现的，根据定理 62(a)（把它作为 $\Gamma$），把它加入到现在的直觉主义形式体系后，在扩张系统内亦只有可实现公式才能证出．因此，在可实现性释义下，每个可证公式都是真的．在特例，我们便根据释义而证明了，加强后的直觉主义系统是简单相容的[1]．

1) 同时我们看见（古典地），这个“加强的直觉主义系统，”即算术中可实现公式系统是不可公理化的，因此不是形式系统．实际上，古典地说，每个闭公式或其否定都是可实现的(引理 46(b))，根据关于直觉主义系统的哥德尔第一定理(定理 29)，算术中可实现公式集不是可递归枚举的(参见附录I)——俄译注．

更详细的讨论可见克林［1945］，在那里他提议把未加强的直觉主义数论形式系统 $S$ 扩大，以得到一个与古典系统 $S_c$ 有所不同的一个加强直觉主义系统 $S'$，他的提议实质上是把真确性与可实现性看作等同.

对我们这里根基于释义而得的结果所作的改进可见于纳尔孙［1947］第 II—IV 部分(及克林［1945］).因为它都牵涉到数论形式系统的相容性，所以不可能期望有完全初等的处理. 但在纳尔孙著作的结果中，这种不初等性却减少到充分的程度，即，在 $S$ 的简单相容性的假设之下，其结果可以在初等元数学中作出证明.在特例，由这些结果及哥德尔［1932—3］(参见定理 60 系 2) 可以元数学地得出：如果 $S$ 是简单相容的，则 $S'$ 及 $S_c$ 亦然. (纳尔孙的 $S$ 并不是我们的直觉主义形式体系而是下列系统，除却无关重要的相等性公设外，在我们的公理之上再加入一些新函数及它们的定义方程.这些方程满足 §43 的模式(I)—(V)或密切类似的模式，但此外还容许一些串值递归式. 若用纳尔孙第 332 页上的(i)—(iv)可知，对串值递归模式的每一次应用，都可以不用该模式而仍证出具有同样形状的一对方程，不过 f, g, h, $t_i$ 须换为 f′, g′, h′, $t_i'$ 罢了；因此串值递归模式是可消除的. 然后由 §74 例 9 及它前面的附注，新增的函数符号是可以消除的).

纳尔孙 Nelson［1949］引入“P 可实现性”一观念，用它我们可以建立一个数论系统，与加强直觉主义系统及古典系统都不相同.

罗斯 G. Rose ([1952]就直觉主义命题演算而研究可实现性[1].

克林[1950a]计划使用递归函数以释义直觉主义集合论.

---

1) 命题演算中某个公式叫做可实现的，如果由它作代人而得的所有算术公式都是可实现的. 罗斯[1953]证明了，下面公式(这里D为 $\neg \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{B}$)
$P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$: $((\neg\neg D \supset D) \supset (\neg\neg D \vee \neg D)) \supset (\neg\neg D \vee \neg D)$ 是可实现的，虽则是不能直觉主义地证明的(这点可借助于，比如说，定理 56(d) 而知之). 可实现性则可如下推出，把闭算术公式 M，N 代人 $P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 后所得的每一个公式 P(M，N) 都可以被同一数所实现，即被下列函数的哥德尔数所实现，
$\lambda b \mu c\{[[(\{b\}(h_1))_0 = 0 \vee (\{b\}(h_2))_0 = 0] \& c=1] \vee [[(\{b\}(h_1))_0$

**例 3** (a) 当 t, f, u 分别读为'可实现的''不可实现的''不知的(或无关的)'时，如果把运算子⊃，¬,&,∨应用到闭公式 A 与 B 去，它们将服从强三值真值表(§ 64，但用现在的符号重述)，即，由关于 A 与 B 的可实现性或不可实现性的消息出发，这些表只给出关于 A⊃B，¬A，A&B，A∨B 的可实现或不可实现性的正确消息. 证明. 试考虑⊃，如果 B 是可实现的，则由 § 26*11 及定理 62(a)，A⊃B 亦然，这便相应于⊃表中第一直行的三个 t. 如果 A 是不可实现的，则由引理 46(b)，A⊃B 是可实现的，这相应于第二横行的三个 t. 如果 A 是可实现的而 B 是不可实现的，由引理 46(a)，A⊃B 是不可实现的，这相应于第一横行第二直行处的 f. 关于¬的表简单地就是⊃表中的 f 直行表；关于 & 与∨仿此处理. (b) 没有变元的公式是可实现的当且仅当它是真的时. 因此它的可实现性(及真确性)或不可实现性(及虚假性)是能行地可判定的，只须用 0，′，+，·，= 的通常释义以及关于⊃，¬，&，∨的古典二值真值表作出一个赋值过程便成了 (参见 § 79 定理 51 前). 证明用 § 81 例 4，或如下：对闭素公式，真确性与可实现性是相同的，因而可被判定. 由它们根据命题演算的运算子而构造复合公式时，我们经常停留在三值表中前两横行直行处. (c) 我们把一数 $e$ 叫做一个闭公式 E 的 R 赋值数，如果或则 $e = 2^0 \cdot 3^{e_1}$ (这时 $e_1 = (e)_1$) 而 $e_1$ 实现 E，或 $e = 2^1 \cdot 3^0$ 而 E 是不可实现的. 对开公式言，R 赋值函数便仿"实现函数"而定义. 一公式 $C(z_1, \cdots, z_m)$ 如果不含任何量词且只含不同变元 $z_1, \cdots, z_m$ ($m > 0$)，则必有一个原始递归的 R 赋值函数 $\gamma(z_1, \cdots, z_m)$. 证明(为节省篇幅起见，省去"$z_1, \cdots, z_m$"). 情形 1：C 是一素公式 P，则

---

$$= 1\&(\{b\}(h_2))_0 = 1]\&c = 2]\},$$

这里 $h_1$ 与 $h_2$ 为常函数 1 与 2 的哥德尔数. 罗斯基本上是作这样证明的，但排中律只对下列的断言而使用的，$[(\{b\}(h_1))_0 = 0 \vee (\{b\}(h_2))_0 = 0] \vee [(\{b\}(h_1))_0 = 1\&(\{b\}(h_2))_0 = 1]$. (这个析取式相应于下列的选择：¬M∨¬N 或是不可实现的或否.) 若和计算 $\{b\}(h_1)$ 与 $\{b\}(h_2)$ 的步骤相合并(几步骤之后计算便会结束的)并确定了所得的数的奇偶性后，我们便可以证明所说的析取式了. 所说步骤的存在性亦可以借助于诺维科夫结果(参见附录 VII 最后脚注)而直觉主义地建立起来——俄译注.

P表示一原始递归谓词$P$,命其代表函数为$\varphi$. 令$\gamma = 2^{\varphi} \cdot 3^0$. 情形2: C是A⊃B, 而由归纳假设, A与B分别有原始递归R赋值函数$\alpha$与$\beta$. 令

$$\gamma = \begin{cases} 2^0 \cdot [3\exp \Lambda a(\beta)_1] & \text{当 } (\beta)_0 = 0 \text{ 时,} \\ 2^0 \cdot 3^0 & \text{当 } (\alpha)_0 = (\beta)_0 = 1 \text{ 时,} \\ 2^1 \cdot 3^0 & \text{此外情形时.} \end{cases}$$

情形3: C为¬A. 同情形2但取$\beta = 2^1 \cdot 3^0$. 情形4: C为A&B. 命

$$\gamma = \begin{cases} 2^0 \cdot [3\exp 2^{(\alpha)_1} \cdot 3^{(\beta)_1}] & \text{当 } (\alpha)_0 = (\beta)_0 = 0 \text{ 时,} \\ 2^1 \cdot 3^0 & \text{此外情形时.} \end{cases}$$

情形5: C为A∨B. 仿上. (d) 一前束公式是可实现的当且仅当它是一般递归地真时. (参见§79附注2及§81例5.) 证明. 再考虑§79中作为例释的公式G. 设A($y_1$, $x_1$, $y_2$, $x_2$, $y_3$)的原始递归R赋值函数为$\alpha(y_1, x_1, y_2, x_2, y_3)$. 这时, 如果G是递归地真的,它便被下数所实现,

$$2^{y_1}[3\exp \Lambda x_1 2^{y_2(x_1)} \cdot [3\exp \Lambda x_2 2^{y_3(x_1,x_2)} \cdot 3$$
$$\exp[\alpha(y_1, x_1, y_2(x_1), x_2, y_3(x_1, x_2)))_1]].$$

反之,如果$g$实现G,则G是递归地真的,可取$y_1 = (g)_0$, $y_2(x_1) = (\{(g)_1\}(x_1))_0$及$y_3(x_1, x_2) = (\{(\{(g)_1\}(x_1))_1\}(x_2))_0$作为所要求的数及一般递归函数.

**例4** 设采取下论点: 若$(x)(Ei)B(x, i)$直觉主义地成立, 则必有一个一般递归的$\alpha$使$(x)B(x, \alpha(x))$ (见上, 或克林Kleene [1943] 第69页上论点III),我们便可证明:

(a) $$(y)(Ei)_{i<a}A(i, (y)_i) \rightarrow (Ei)_{i<a}(y)A(i, y)$$

不能对所有$A$都直觉主义地成立(参见§57(20)). 因为, 若用§61(51), 可得

$$(x)(y)(Ei)_{i<2}\overline{W}_i(x, (y)_i).$$

因而如果我们直觉主义地有(a),则我们将直觉主义地有

$$(x)(Ei)_{i<2}(y)\overline{W}(x, y);$$

再由上论点,有某递归$\alpha$只取值<2使得$(x)(y)\overline{W}\alpha(x)(x, y)$;因

而 $(x)\overline{(Ey)}W_{\alpha(x)}(x, y)$；故对每个 $x$ 都有

(b) $(Ey)W_0(x, y)\rightarrow\alpha(x)=1$， $(Ey)W_1(x, y)\rightarrow\alpha(x)=0$.

但我们可取 $\alpha(x)=1$ 作为 § 61(57) 中的 $R_0(x, y)$，而 $\alpha(x)=0$ 作为 §61(58) 中的 $R_1(x, y)$. 这样或则 $\alpha(f)=1$ 或 $\alpha(f)=0$. 如果 $\alpha(f)=1$，则 $(Ey)R_0(f, y)$，因而和在 § 61 中一样得 $(Ey)W_1(f, y)$，与 (b) 相矛盾. 如 $\alpha(f)=0$，仿此.

# 附录 I[1]　哥德尔第二定理的证明

我们根据希尔柏特-伯尔奈斯[1939]的意念来补入定理 30 的证明. 假定读者已经读过本书前 54 节以及第十四章 §73 及 §74.

我们将考虑一形式系统 $S$，它由第四章的系统加入运算子 $\iota w$ (参见§ 74) 而得，但我们的讨论可以毫无损害地转到下情形去，即当 $S$ 含有有穷多个新函数符号、谓词符号及公理时. 这个系统可用 §50 的方法而放入广义算术去，这时 $\iota$ 应该考虑作一个新的(第 14 个) 零；对上面所述的新函数符号及新谓词符号，如果有的话，亦应该用同法处理. 在 § 52 所给的哥德尔算术化中，符号 $\iota$ 对应于数 29. 我们仍然使用 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 型的记号以代替 $\iota w F(x_1, \cdots, x_n, w)$ (参见 §74).

我们今证明第 231 页中在表述定理 30 以前所引入的公式(II)可以在系统 $S$ 中推出. 由 §74 的结果(定理 42)便可推得，公式(II)可在第四章的系统内推出(或在如下的系统内推出，由它加入有穷多个辅助函数符号及谓词符号及公理而得的；符号不必定是有穷多个，只要它们可数便成；对公理的个数亦然，由于本附录 596 页的附注及下列事实，由递归可数的公理集所作的后承集亦是递归可数的，故有这结果；参见在 § 72 定理 38 的证明中关于 $F_0(a)$ 的附注).

由此便可以证明定理 30 了.

在下文，符号$\vdash$是就系统 $S$ 而言的.

今设 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 为随便一个原始递归函数，而 $\varphi_1, \cdots, \varphi_k (=\varphi)$ 为它的一个原始递归描述. 根据 §74 例 9，在 $S$ 中有函数符号 $f_1, \cdots, f_k$ 用以表示函数 $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$，其意为，在 $S$ 内可以

1) 俄译本主编人并没有参加这些附录的编辑——俄译注.

把下列一切方程证出，它们是作出 $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ 时对模式(I)—(Vb)的应用(§43)，然后把每个 $\varphi_i$ 换为 $f_i$，把直觉变元 $x_1, x_2\cdots$ 换为形式变元 $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \cdots$ 而得的。对于每个这样的符号 $f_i$，我们说，它形式地表示相应的函数 $\varphi_i$ (这个在 f 与 $\varphi$ 间的关系与所给函数 $\varphi$ 的原始递归描述有关.)(我们亦说，项 $f_i(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_{m_i})$ 形式地表示函数 $\varphi_i(x_1, \cdots, x_{m_i})$；$m_i$ 是出现于函数 $\varphi$ 的原始递归描述中的函数 $\varphi_i$ 的变目个数.) 若就函数 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 的原始递归描述的长度 $k$ 而作归纳，并利用每个函数 $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ 的可计算性(§43)，我们便容易证明，就形式地表示 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 的项 $f(\mathrm{x}_1,\cdots,\mathrm{x}_n)$ 而言，有

(1) $$(x_1)\cdots(x_n)(y)\{\varphi(x_1, \cdots, x_n) = y \equiv \vdash f(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{y}\}.$$

如果项 $f(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n)$ 形式地表示函数 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$，则 $f(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n)$ 亦数字地表示函数 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$，其意为有

$$\varphi(x_1, \cdots, x_n) = y \rightarrow \vdash f(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{y}$$

及 $$\varphi(x_1, \cdots, x_n) \neq y \rightarrow \vdash \neg f(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{y}.$$

其次，若就函数 $\varphi(x, y)$ 的原始递归描述的长度而作归纳，容易证明(用 *66)，如果项 $f(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ 形式地表示函数 $\varphi(x, y)$，则项 $f(\mathrm{x}, \mathbf{q})$ 形式地表示函数 $\varphi(x, q)$，这里 $q$ 为随便一个固定的数；其次，在同一假定下，如果 $g(\mathrm{n})$ 数字地表示原始递归函数 $\psi(n)$，则 $f(\mathrm{x}, g(\mathbf{p}))$ 形式地表示函数 $\varphi(x, m)$，这里 $m = \psi(p)$ ($p$ 为随便一个固定的数)(使用定理 24b).

今设 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 为原始递归谓词 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 的代表函数(§45)，而项 $f(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n)$ 形式地表示函数 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$. 凡满足下列关系

(2) $$\vdash \mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n) \sim f(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n) = 0$$

的每一公式 $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n)$，我们将说，它形式地表示谓词 $P(x_1, \cdots, x_n)$ (这个在 $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n)$ 与 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 之间的关系与代表函数 $\varphi$ 的原始递归描述有关).

对每一个原始递归谓词 $P(x_1,\cdots,x_n)$，都有一公式 $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1,\cdots,$

$x_n$)来形式地表示它．例如，公式 $f(x_1, \cdots, x_n)=0$ 便是，这里 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 为一项，形式地表示该谓词的代表函数．此外(3)对形式地表示任一原始递归谓词 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 的每一公式 $P(x_1, \cdots, x_n)$，都有一项 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 形式地表示该谓词的代表函数 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$，并使得下式成立

$$\vdash f(x_1, \cdots, x_n)=0 \sim P(x_1, \cdots, x_n)$$

根据代表函数的定义（并利用(1)，$\vdash \neg 1=0$，(2)及*30)可以推出，如果公式 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 形式地表示原始递归谓词 $P(x_1, \cdots, x_n)$，则

(4)　$(x_1)\cdots(x_n)\{P(x_1, \cdots, x_n) \equiv \vdash P(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)\}$．

由 $\vdash \neg 1=0$，*30，(1)(2)及(4)可见，形式地表示谓词 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 的公式 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 亦数字地表示该谓词．一般说来，逆定理并不成立(参见本附录末)．

由(2)，*158 及 *166 可以推出，对形式地表示原始递归谓词的每一个公式 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 都直觉主义地有

$$\vdash P(x_1, \cdots, x_n) \vee \neg P(x_1, \cdots, x_n)．$$

今考虑广义算术(第十章)中下列的谓词及函数：

$\mathfrak{S}(X, l) \asymp \mathfrak{S}(X, l, a)$ (参见 §52 例 2)

$$\mathfrak{E}(X) \asymp \begin{cases} (\neg, X) & \text{当 X 为系统 } S \text{ 的公式时，} \\ X & \text{此外情形时．} \end{cases}$$

$\mathfrak{B}(X, F) \equiv \mathfrak{B}\mathfrak{F}(X) \& \{X\}_0 \asymp F$ (参见 §51 Dn12)．

今设 $s(x, l)$，$e(x)$，$B(x, y)$ 为通常内容算术中相应的函数及相应的谓词．用 §52 的方法可以证明它们的原始递归性．

在内容算术中定义 $B(x, y)$ 的有一公式，若依 245 页的表面翻译，则在系统 $S$ 内得一公式 $B(x, y)$．显然，$B(x, y)$ 形式地表示 $B(x, y)$．

再设 $s(x, y)$ 与 $e(x)$ 为项，形式地表示 $s(x, y)$ 及 $e(x)$，并依 § 52 的方法而定义的．

不致于丧失普遍性，在今后的考虑中我们可约定在公式 $B(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ 及项 $s(x, y)$，$e(x)$ 中，变元 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 不再约束出现（参见 213

页脚注).

在分别数字地表示 $B(x,y)$, $s(x,y)$ 及 $e(x)$ 的一切可能的公式及项中,对公式 $\mathrm{B}(\mathrm{x},\mathrm{y})$, 项 $\mathrm{s}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ 及 $\mathrm{e}(\mathrm{x})$ 所作的这样的挑选将叫做特异选择,在今后它将起非常重要的作用.

但现在我们假定, $\mathrm{s}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ 与 $\mathrm{e}(\mathrm{x})$ 为随便一些不含变元 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的项,它们分别数字地表示函数 $s(x,y)$ 与 $e(x)$, $\mathrm{B}_0(\mathrm{x},\mathrm{y})$ 为数字地表示原始递归函数 $\varphi(x)$ 的随意一公式, $\varphi(x)$ 则对系统 $S$ 的一切可证公式加以枚举. (这样的公式可由 §60 定理 XIV 及其系得到,亦可由 §53 末所说的得到).

今设在哥德尔编号下公式 $\forall \boldsymbol{c}\neg \mathrm{B}_0(\boldsymbol{c},\mathrm{s}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}))$ 的哥德尔数为 $p$,与此相应这公式可表为 $\mathrm{A}_p(\boldsymbol{a})$ (参见 §42,第 226 页);这时公式 $\mathrm{A}_p(\mathbf{p})$ 便是 $\forall \boldsymbol{c}\neg \mathrm{B}_0(\boldsymbol{c},\mathrm{s}(\mathbf{p},\mathbf{p}))$. 这公式的哥德尔数是 $s(p,p)$. 如果假设它是可证的,即假设有

(5) $\vdash \forall \boldsymbol{c}\neg \mathrm{B}_0(\boldsymbol{c},\mathrm{s}(\mathbf{p},\mathbf{p}))$,

设依 $\varphi$ 而对所有可证公式作枚举时,它的号码为 $\varphi(k)$. 这时 $\varphi(k)=s(p,p)$,因此 $\vdash \mathrm{B}_0(\mathbf{k},\mathrm{s}(\mathbf{p},\mathbf{p}))$;由 $\exists$ 引得 $\vdash \exists \boldsymbol{c}\mathrm{B}_0(\boldsymbol{c},\mathrm{s}(\mathbf{p},\mathbf{p}))$, 由 *83a 得 $\vdash \neg\forall \boldsymbol{c}\neg \mathrm{B}_0(\boldsymbol{c},\mathrm{s}(\mathbf{p},\mathbf{p}))$. 与 (5) 合并这便表示系统 $S$ 是不相容的. 因此如果系统 $S$ 是相容的,则没有 $\vdash \mathrm{A}_p(\mathbf{p})$.

这是定理 28 第一部分的证明的变种 (其变种在于选取公式 $\mathrm{B}_0(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$ 作为 §42 引理 21 中的 $\mathrm{A}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$;这个变种亦可适用于这定理的第二部分). 正如在 §42,第 227 页处一样, 在哥德尔编号下,断言"非 $\vdash \mathrm{A}_p(\mathbf{p})$"可由公式 $\mathrm{A}_p(\mathbf{p})$ 表示,而整个讨论的结果则由下公式而表示

(II') $\mathrm{consis} \supset \mathrm{A}_p(\mathbf{p})$

(参见第 231 页). 这时作为出现于 (II') 中的公式 consis, 我们可选取公式

Wid: $\forall \boldsymbol{a}\neg(\exists \boldsymbol{c}\mathrm{B}(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})\&\exists \boldsymbol{c}\mathrm{B}(\boldsymbol{c},\mathrm{e}(\boldsymbol{a})))$,

它等价于下二公式 (参见 *86 及 *58b):

$$\neg\exists \boldsymbol{a}(\exists \boldsymbol{b}\mathrm{B}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})\&\exists \boldsymbol{b}\mathrm{B}(\boldsymbol{b},\mathrm{e}(\boldsymbol{a})))$$

及 $\forall \boldsymbol{a}(\exists \boldsymbol{b}\mathrm{B}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})\supset\neg\exists \boldsymbol{b}\mathrm{B}(\boldsymbol{b},\mathrm{e}(\boldsymbol{a})))$

(第一个是第 230 页公式 $\neg\exists a(\exists b C(a, b) \& \exists c D(a, c))$ 的变种，而第二个是希尔伯特与伯尔奈斯所考虑的公式).

我们还认为，在 consis 中 $\mathrm{e}(a)$ 形式地表示 $e(a)$，而在 $A_p(a)$ 中的 $B_0(c, a)$ 形式地表示谓词 $\varphi(c) = a$。

今开始在下列假定之下而推演 (II)′:

(0)对 wid 中出现的公式 $\exists c B(c, a)$ 以及形式地表示谓词 $\varphi(a) = b$ 的某一公式 $B_0(a, b)$ 言，这里 $\varphi(a)$ 是把系统 $S$ 的定理的哥德尔数加以枚举的一个原始递归函数，都有

$$\vdash \exists c B(c, a) \sim \exists c B_0(c, a).$$

又对于形式地表示函数 $s(a, b)$ 及 $e(a)$ 的项 $\mathrm{s}(a, b)$ 及 $\mathrm{e}(a)$ 言，下列三断言 I, II, III 是成立的(参见希尔伯特-伯尔奈斯[1939]，第 285—6 页)。(今后 $A_n$ 永远表示以 $n$ 为哥德尔数的公式，参见第 226 页)。

I. 如果 $A_k \vdash A_l$，则 $\vdash \exists c B(c, \mathbf{k}) \supset \exists c B(c, \mathbf{l})$

II. $\vdash \exists c B(c, \mathrm{e}(b)) \supset \exists c B(c, \mathrm{e}(\mathrm{s}(b, d)))$.

III. 如果项 $\mathrm{f}(a)$ 形式地表示一元原始递归函数 $\varphi(a)$，而 $r$ 为等式 $\mathrm{f}(a) = 0$ 的哥德尔数，则

$$\vdash \mathrm{f}(b) = 0 \supset \exists c B(c, \mathrm{s}(\mathbf{r}, b));$$

今按(3)而选取项 $\mathrm{b}(a, \mathbf{c})$ 使得

$$\vdash \mathrm{b}(a, \mathbf{c}) = 0 \sim B_0(a, \mathbf{c}). \tag{6}$$

项 $\mathrm{b}(a, \mathbf{c})$ 形式地表示谓词 $\varphi(a) = c$[1] 的代表函数，因此，$\mathrm{b}(a, \mathrm{s}(\mathbf{p}, \mathbf{p}))$ 便形式地表示一元原始递归函数，即谓词 $\varphi(a) = s(p, p)$[1] 的代表函数，这里 $p$ 是上文所定义的固定的数。设 $r$ 为公式 $\mathrm{b}(a, \mathrm{s}(\mathbf{p}, \mathbf{p}))$ 的哥德尔数，亦即 $e(r)$ 为公式 $\neg \mathrm{b}(a, \mathrm{s}(\mathbf{p}, \mathbf{p})) = 0$ 的哥德尔数。

由 III 得

$$\vdash \mathrm{b}(b, \mathrm{s}(\mathbf{p}, \mathbf{p})) = 0 \supset \exists c B(c, \mathrm{s}(\mathbf{r}, b));$$

由此再根据(6)得

---

1) 原文分别误作"$\varphi(c) = a$"及"$\varphi(c) = s(p, p)$"，今改正——译者注。

(7) $\vdash B_0(\boldsymbol{b}, s(\mathbf{p}, \mathbf{p})) \supset \exists \boldsymbol{c} B(\boldsymbol{c}, s(\mathbf{r}, \boldsymbol{b}))$.

我们有 $\forall \boldsymbol{c} \neg B_0(\boldsymbol{c}, s(\mathbf{p}, \mathbf{p})) \vdash \neg B_0(\boldsymbol{a}, s(\mathbf{p}, \mathbf{p}))$($\forall$ 消)，亦即(参见(6)) $A_{s(p,p)} \vdash A_{e(r)}$；由于 I (以及下二断言，当 $q = s(p,p)$ 及 $s = e(r)$ 时有 $\vdash s(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = \mathbf{q}$ 及 $e(\mathbf{r}) = \mathbf{s}$) 可得

$$\vdash \exists \boldsymbol{c} B(\boldsymbol{c}, s(\mathbf{p}, \mathbf{p})) \supset \exists \boldsymbol{c} B(\boldsymbol{c}, e(\mathbf{r})),$$

又因根据 II 及 *66 有$\vdash \exists \boldsymbol{c} B(\boldsymbol{c}, e(\mathbf{r})) \supset \exists \boldsymbol{c} B(\boldsymbol{c}, e(s(\mathbf{r}, \boldsymbol{b})))$，故由 *2 得

(8) $\vdash \exists \boldsymbol{c} B(\boldsymbol{c}, s(\mathbf{p}, \mathbf{p})) \supset \exists \boldsymbol{c} B(\boldsymbol{c}, e(s(\mathbf{r}, \boldsymbol{b})))$.

此外，我们有 $\vdash B_0(\boldsymbol{b}, s(\mathbf{p}, \mathbf{p})) \supset \exists \boldsymbol{c} B_0(\boldsymbol{c}, s(\mathbf{p}, \mathbf{p}))$ (公理 11)，故由(0)及定理 6 可得

(9) $\vdash B_0(\boldsymbol{b}, s(\mathbf{p}, \mathbf{p})) \supset \exists \boldsymbol{c} B(\boldsymbol{c}, s(\mathbf{p}, \mathbf{p}))$.

根据 *2，由 (8)(9) 可得

(10) $\vdash B_0(\boldsymbol{b}, s(\mathbf{p}, \mathbf{p})) \supset \exists \boldsymbol{c} B(\boldsymbol{c}, e(s(\mathbf{r}, \boldsymbol{b})))$.

根据永真命题公式

$$(A \supset B) \supset ((A \supset C) \supset (A \supset B \& C)),$$

由(7)(10)可得

$$\vdash B_0(\boldsymbol{b}, s(\mathbf{p}, \mathbf{p})) \supset \exists \boldsymbol{c} B(\boldsymbol{c}, s(\mathbf{r}, b)) \& \exists \boldsymbol{c} B(\boldsymbol{c}, e(s(\mathbf{r}, \boldsymbol{b})))$$

再根据换质位(*12)可得

$$\vdash \neg(\exists \boldsymbol{c} B(\boldsymbol{c}, s(\mathbf{r}, \boldsymbol{b})) \& \exists \boldsymbol{c} B(\boldsymbol{c}, e(s(\mathbf{r}, \boldsymbol{b})))) \supset \neg B_0(\boldsymbol{b}, s(\mathbf{p}, \mathbf{p})).$$

又因由 $\forall$ 消及 $\supset$ 引可得 $\vdash \mathrm{wid} \supset \neg(\exists \mathbf{c} B(\mathbf{c}, s(\mathbf{r}, \boldsymbol{b})) \& \exists \mathbf{c} B(\mathbf{c}, e(s(\mathbf{r}, \boldsymbol{b}))))$，故由 *2 可得 $\vdash \mathrm{wid} \supset \neg B_0(\boldsymbol{b}, s(\mathbf{p}, \mathbf{p}))$. 根据规则 9 (及 *73) 可得 $\vdash \mathrm{wid} \supset \forall \boldsymbol{c} \neg B_0(\boldsymbol{c}, s(\mathbf{p}, \mathbf{p}))$ 即 $\vdash \mathrm{wid} \supset A_p(\mathbf{p})$.

因此，在上述各假定下，我们证明了 (II′)，因而证明了定理30.

若一对一地转到系统 $S$ 中公式的另一个哥德尔编号去，并没有使情况有所改变，至少在下条件之下如此：这个转变及其逆转变分别由一般递归函数 $\phi$ 及 $\chi$ 完成，即由该两函数把随便一公式 F 在原来编号中的哥德尔数以及在新编号中同一公式的哥德尔数彼此转变，并且此外还有项 f 及 g，分别数学地表示函数 $\phi$ 及 $\chi$ 使得 $\vdash g(f(\boldsymbol{a})) = \boldsymbol{a}$. 事实上，如果对公式 $B_0(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a})$, $\exists \boldsymbol{c} B(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a})$ 及项 $s(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, $e(\boldsymbol{a})$ 分别选为 $B_0(\boldsymbol{c}, g(\boldsymbol{a}))$, $\exists \boldsymbol{c} B(\boldsymbol{c}, g(\boldsymbol{a}))$, f(s(g

$(\boldsymbol{a}),\boldsymbol{b}))$ 及 $f(e(g(\boldsymbol{a})))$，则断言(0)及 I，II，III 仍对新编号成立.

今证明，对系统 $S$ 言，如对 $B(x, y)$，$s(x, y)$ 及 $e(x)$ 作特异选择，则我们的命题(0)及 I，II，III 是成立的.

命题(0)的正确性可由把 §60 定理 XIV 系的证明映象到 $S$ 去而得，或简单地在 wid 内把 $B(x, y)$ 选为 $B_0(x, y)$ 而得.

还须证明，如对 $B(x, y)$，$s(x, y)$ 与 $e(x)$ 作特异选择，则断言 I，II，III 对系统 $S$ 是正确的. 为这目的，我们转而考虑第十章的广义算术，对它我们一开始便作出一些形式体系化.

在我们的广义算术中只有有限多个可容许的 s 值（参见第 270—1 页），这将叫做"容许数". 在今后，不附有足码的 s 将表示最大的容许数；其它的容许数将以附有足码的 s 而表示之. 我们有兴趣的系统 $S$ 只是 $s=2$ 而 0 及 1 亦为容许数的情形（这三个容许数我们将以 $s_0$，$s_1$ 及 $s_2$ 表之）.

在第十章我们曾定义广义算术中的客体，并叫做"实体"，在 §51 及 §52 中并曾考虑关于这些实体的谓词及函数. 在第十章中关于实体及其谓词的议论是在内容语气上进行的，但今后我们将把广义算术的命题写成公式的形状，并把借谓词而表示的初等命题用命题联结词等加以联结，并利用关于实体变元 x，y，… 的量词（在通常意义下）. 系统 $S$ 的表达式作为广义算术的客体时，我们仍继续使用在系统 $S$ 内的写法)(参见 272 页)；注意，尽管这样，在系统 $S$ 内使用的记号以及在广义算术中使用的记号并没有彼此混乱的可能；因为后者的谓词永远使用哥德体字母或别的记号，而这些在系统 $S$ 内是不使用的. 在广义算术公式内所遇见的系统 $S$ 的符号，它们之应该以系统 $S$ 的意义来理解，当且仅当它们出现于广义算术的一项的成份中而不是整个该项时.（广义算术的项是指一些表达式，它们可以作为谓词的变目的；对广义算术我们不引进运算 $\iota w$）.

因此，广义算术可以看作形式系统，这系统将记为 $W$. 今列举这系统的公设，在今后它们对我们将是有用的（但不顾到它们的独立性）.

首先取作公设的是那些根据具相等性(把记号"$\asymp$"理解为相等性)的谓词演算的公设而得的公式.(变元的自由出现及约束出现则照第四章而定义.)这样在系统$W$内便可以使用§23.

定理2中所有的推演规则;我们仍然使用它们原来的名称(∃引等等).

关于一元x函数$\{x\}_i$的公理(对任何$i \leqslant s$):

对于任意的容许数$l, m$及$i \leqslant s, k \leqslant r$($r$为零的个数,见§50),$l < i, i \leqslant m$言,有:

$\{0_k\}_i \asymp 0_k, \{(x_0, \cdots, x_l)\}_i \asymp (x_0, \cdots, x_l)$ 及 $\{(x_0, \cdots, x_m)\}_i \asymp x_i$.

又271页上所提到的"皮亚诺公理"($l, m$为容许数):

($p_0$) $\neg 0_i \asymp 0_k$ 当 $i \neq k$ 时,

($p_1$) $\neg (x_0, \cdots, x_l) \asymp (x_0, \cdots, x_m)$ 当 $l \neq m$ 时,

($p_2$) $(x_0, \cdots, x_l) \asymp (y_0, \cdots, y_l) \supset x_0 \asymp y_0 \& \cdots \& x_l \asymp y_l$,

($p_3$) $\neg (x_0, \cdots, x_l) \asymp 0_k (k = 0, \cdots, r)$.

归纳公理模式($s_1, \cdots, s_t (=s)$为所有的容许数):

(I) $A(0_0) \& \cdots \& A(0_r) \& \forall x_0 \cdots \forall x_{s_1}(A(x_0) \& \cdots \& A(x_{s_1}) \supset$

$A((x_0, \cdots, x_{s_1}))) \& \cdots \& \forall x_0 \cdots \forall x_{s_t}(A(x_0) \& \cdots \& A(x_{s_t}) \supset$

$A((x_0, \cdots, x_{s_t}))) \supset A(x)$.

这个模式便使得我们可以使用下列的关于x的归纳原则了:

(i) $A(0_0), \cdots, A(0_r)$,

$A(x_0) \& \cdots \& A(x_{s_1}) \supset A((x_0, \cdots, x_{s_1}))$

$\cdots\cdots$

$$\frac{A(x_0) \& \cdots \& A(x_{s_t}) \supset A((x_0, \cdots, x_{s_t}))}{A(x)}$$

我们再引进谓词显式定义的公理模式

$$\mathfrak{P}(x_0, \cdots, x_n) \sim A(x_0, \cdots, x_n),$$

这里,每一次使用这模式时,$A(x_0, \cdots, x_n)$都表示系统$W$内随便一公式,除却$x_0, \cdots, x_n$外不含其它自由变元,而$\mathfrak{P}$为随便一个谓词符号,不出现于这公式以及以前所引用的公理之内.

借助于这公式我们可引入谓词$\mathfrak{B}(x, y)$(见上).

为了无须考虑递归定义理论的全部细节，我们限于下列的公设：

对 §51 中 Dn1—Dn13a 所定义的谓词我们都引用一个相应的公理，这个公理呈等价式的形状，左端是所考虑的谓词符号，而以不同的变元填入其变目处，而右端则是这个谓词的归纳定义中限制句子和所有直接句子的析取式两者所作成的合取式，且须以同样的变元填于相应的变目处，这时，直接句子是把定义 Dn1—Dn13a 中这一种类句子的相应语言表达式加以形式体系化而得的，限制句子则是一蕴涵式，其前件和该公理的左端相同，而后件则是刚才写出的各直接句子的析取式.

在 $W$ 内我们对这些谓词继续使用在 §51 中的符号.

谓词 $x \prec y$（著者在 § 50 中所引入）的归纳定义不适合于作这样的形式体系化的，因为在直接句子中 y 被写成 $(x_0, \cdots, x_s)$ 形.

我们今把它改为下列四种形状的公理，这里 $l$ 为任一容许数而 $i \leqslant l$：

$$x_i \prec (x_0, \cdots, x_i, \cdots, x_l);$$

$$y \prec x_i \supset y \prec (x_0, \cdots, x_i, \cdots, x_l);$$

$$\neg(y \prec 0_k)(k = 0, \cdots, r);$$

$$y \prec (x_0, \cdots, x_l) \supset y \asymp x_0 \vee y \prec x_0 \vee \cdots \vee y \asymp x_l \vee y \prec x_l.$$

不含变元的项叫做常项.

为了要用递归式而定义新函数，我们引进一些公理模式，类似 § 43 的模式 (II)—(Vb) 及 §45 的 #F，并分别记为 (II')—(Vb)' 及 #F'. 模式 (II)'—(IV)' 可由 §43 的相应模式中将 $x_1, \cdots, x_n$ 换为 $x_1, \cdots, x_n$，将符号"＝"换为"$\asymp$"而得，而 $q$ 为随意一个常项. 模式(Vb)' 则是下列的"方程"组

$$\begin{cases}\varphi(0_i, x_2, \cdots, x_n) \asymp \phi_i(x_2, \cdots, x_n)(i = 0, \cdots, r), \\ \varphi((y_0, \cdots, y_l), x_2, \cdots, x_n) \asymp \chi_l(y_0, \cdots, y_l, \varphi(y_0, x_2, \cdots, x_n), \cdots \\ \quad \cdots \varphi(y_l, x_2, \cdots, x_n), x_2, \cdots, x_n)\end{cases}$$

对任何容许的 $l$.（$\chi_l$ 依赖于 $n + 2l + 1$ 个参数）.

模式 (Va)' 则由 (Vb)' 中换 $\phi_i(x_2, \cdots, x_n)$ 为随便一个常项，

并删去“$x_2, \cdots, x_n$”而得。

最后我们还引入一个用以定义新函数的模式 #F′，作为模式 (Va)′ 的推广．为简单起见，我们先写出这个模式，它在后面亦用到的，然后再证明它如何地形式体系化于 $W$ 内．这写法很似 § 38 所叙述的内容方式

$$\varphi((y_0,\cdots,y_l),x_1,\cdots,x_n)\begin{cases}\asymp\psi_1(\varphi(y_0,x_1,\cdots,x_n),\cdots,\varphi(y_l,x_1,\cdots,x_n),\\ \quad x_1,\cdots,x_n),\text{当 } Q_1(\varphi(y_0,x_1,\cdots,x_n),\cdots,\\ \quad \varphi(y_l,x_1,\cdots,x_n),x_1,\cdots,x_n)\text{ 时；}\\ \cdots\cdots\\ \asymp\psi_m(\varphi(y_0,x_1,\cdots,x_n),\cdots,\varphi(y_l,x_1,\cdots,x_n),\\ \quad x_1,\cdots,x_n),\text{当 } Q_m(\varphi(y_0,x_1\cdots,x_n),\cdots,\varphi\\ \quad (y_l,x_1,\cdots,x_n),x_1,\cdots,x_n)\text{时；}\\ \asymp\psi_{m+1}(\varphi(y_0,x_1,\cdots,x_n),\cdots,\varphi(y_l,x_1,\cdots,\\ \quad x_n),x_1,\cdots,x_n),\text{当其它情形时．}\end{cases}$$

这里 $Q_i(y_0,\cdots,y_l,x_1,\cdots,x_n)$ 为系统$W$内的公式，不含符号 $\varphi$，而且所有形如$\neg(Q_i(y_0,\cdots,y_l,x_1,\cdots,x_n)\&Q_j(y_0,\cdots,y_l,x_1,\cdots,x_n))(i\neq j)$的公式是可证的．

形式上这公式可在系统$W$内写成下形（这里为简短起见，我们把起参数作用的变元 $x_1,\cdots,x_n$ 省写了；其右端今后将记为“$F_l\{x\}$”）：

$$\varphi(x)\asymp y\sim(\psi_1(\varphi(\{x\}_0),\cdots,\varphi(\{x\}_l))\asymp y\&Q_1(\varphi(\{x\}_0),\cdots,\varphi(\{x\}_l)))\vee\cdots\vee(\psi_m(\varphi(\{x\}_0),\cdots,\varphi(\{x\}_l))\asymp y\&Q_m(\varphi(\{x\}_0),\cdots,\varphi(\{x\}_l)))\vee(\psi_{m+1}(\varphi(\{x\}_0\},\cdots,\varphi(\{x\}_l))\asymp y\&\neg Q_1\&\cdots\&\neg Q_m)^{1)}$$

如果容许 $l$ 经历 $s_0,s_1,\cdots,s$ 而变，便得到模式 #F′（的各个情形——译者）．形式地说，#F′ 的右端是各项 $\exists x_0\cdots\exists x_l(x=\{x_0,\cdots,x_l\}\&F_l\{x\})$ 的析取式．

这模式有一特例如下：

---

1) 在最末一个析取项中我们把$Q_1,\cdots,Q_m$的变目省写了．原文漏掉“$\&\neg Q_1\&\cdots\&\neg Q_m$”，今补入——译者注

$$\begin{cases}\varphi((a_1))\asymp z_1,\cdots,\varphi((a_k))\asymp z_k, (a_1,\cdots,a_k \text{为}W\text{中的固定项});\\ \varphi((x,y))\asymp\psi(x,\varphi(y)), \text{当} Q(x,y) \text{时};\\ \varphi((x,y,z))\asymp\chi(x,\varphi(y),\varphi(z)), \text{当} R(x,y,z) \text{时};\\ \varphi(y)\asymp y \text{ 当其它情形时}.\end{cases}$$

这写法应该理解为下模式的写法

$$\varphi(x)\asymp\begin{cases}z_1, \quad \text{当 } x\asymp(a_1) \text{ 时},\\ \cdots\cdots\\ z_k, \quad \text{当 } x\asymp(a_k) \text{ 时},\\ \psi(x,\varphi(\{x\}_1)), \quad \text{当 } \exists y\exists z(x\asymp(y,z)\&Q(y,z)) \text{ 时},\\ \chi(x,\varphi(\{x\}_1),\varphi(\{x\}_2)), \quad \text{当}\exists y\exists z\exists w(x\asymp(y,z,w)\&R\\ \quad (y,z,w)) \text{ 时},\\ x \quad \text{当其它情形时}.\end{cases}$$

我们说，模式 (II)′—(Vb)′ 及 #F′ 都定义了记为 $\varphi$ 的那个函数.

在模式 (II)′—(Vb)′ 中，希腊字母 $\varphi$, $\psi$, $\chi$ (具有足码) 都不过是$W$中函数符号的名(§50,第 274 页). 为了要从这些模式之一而得到公理,必须把每一个名 $\psi$, $\chi$ (有足码或否)换为固定的函数符号,预先由这些模式之一定义的,或从头便有的如 $(x_0,\cdots,x_l)$ ($l$ 为容许数) 或 $\{x\}_l$ 等，而 $\varphi$ 则须换一个新函数符号与所有以前定义过的或从头便有的那些函数符号均不同. 为了要得到这样的符号,在广义算术中无须考虑引入新的零,可以使用第 272 页中获得新变元 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_{11}$, $\cdots$ 的办法，只不过，例如，把 $\boldsymbol{a}$ 改为“ ′ ”便成(亦参见§56,第 303 页). 至于记号“|”的个数可以取任何一数,只须还未曾在这个目的上使用过便成，例如当把这公理依 §52 而作映象时其左端的哥德尔数.

在应用模式 #F′ 时每次都必须先证明，它满足各 $Q_i$,$Q_j$ 是互不可兼的那个条件.

这样，我们便完成了系统$W$的描写. 我们用 $\vdash_1$ 表示在这系统内的可证性及可推演性.

注意，在 Dn1 中定义的调词 $\mathfrak{N}(y)$ (“为一数字”) 在我们系统

中由公式 $\mathfrak{N}(y)$ 所代表．根据 §74 例 13，这便使得我们能够在 $W$ 内引入新种变元（把 $\mathfrak{N}(y)$ 作为该例中的公式 $M(w)$）．我们将把这些变元叫做数字变元，且以斜体 $a, b, c\cdots$ 表之．（这记法暗示了我们把自然数的内容算术映象于系统 $W$ 内．）

在 §52 内已经定义了把广义算术的客体——实体与谓词及函数——映到自然数的内容算术去的映象．以后可使用第 245 页的表及 $S$ 中已有的运算子 $\iota w$ 而把这个内容算术映象到形式系统 $S$ 去（参见 § 74 例 9）．然后借助于很自然的方法把系统 $W$ 内的运算子映象到 $S$ 中去，这样便可以把广义算术中实体，谓词及函数在 $S$ 中的映象推广为由 $W$ 到 $S$ 的映象．这时在系统 $W$ 中每次的规则 2，9 或 12 的应用都变成在系统 $S$ 中同样规则的使用．

这时 $W$ 的每一个公理都相应于系统 $S$ 的一个可证公式，例如当 $l=2$ 时，$(p_2)$ 变成一条算术定理 $2^{x_0}\cdot 3^{x_1}\cdot 5^{x_2}=2^{y_0}\cdot 3^{y_1}\cdot 5^{y_2}\supset x_0=y_0\&x_1=y_1\&x_2=y_2$，而 (I) 给出（当 $r=13$ 而 0，1，2 为所有的容许数时）：

$$
\begin{aligned}
&E(x)\supset[A(0_0)\&\cdots\&A(0_{13})\&\forall y((Ey)\&A(y)\supset A(2^y))\\
&\&\forall y_0\forall y_1(E(y_0)\&E(y_1)\&A(y_0)\&A(y_1)\supset A(2^{y_0}\cdot 3^{y_1}))\&\\
&\forall y_0\forall y_1\forall y_2(E(y_0)\&E(y_1)\&E(y_2)\&A(y_0)\&A(y_1)\&A(y_2)\supset\\
&\quad A(2^{y_0}\cdot 3^{y_1}\cdot 5^{y_2}))\supset A(x)],
\end{aligned}
$$

这里 $E(x)$ 表示一算术谓词，相应于（§52）谓词“为一实体”．

对于系统 $W$ 内所定义的每一个函数（用 § 46 相应于模式 (V)' 及 *F' 的方法），都可以证明相应的算术函数的原始递归性（比较 § 52）．其次在 $W$ 中每一个用以定义函数的公理都变成系统 $S$ 的某一公式，并且在模式中用字母 $\varphi$ 表示的函数符号都变成相应的算术函数的符号；正如 §74（参见定理 42 及例 9）一样，我们把这记号亦引入 $S$ 中；所得公式在 $S$ 中的可推演性可由 §74 例 9 的结果而知道．

因此，在 $W$ 中每一个用以定义函数的公理，都变成系统 $S$ 中一个可证公式．

关于 $W$ 中其它公理亦可作出类似的结论．

因此在$W$中每一个证明都变成系统$S$内相应公式的证明.

因此，在$W$中每一个由公式$B_1, \cdots, B_k$到公式A的推演都变成在系统$S$内由相应公式$B'_1, \cdots, B'_k$到相应公式A′的推演.

有时，和在第十章中一样，我们把$W$中的变元用大写字母表示.

今设$\mathfrak{B}_{z_1\cdots z_k}(Y,x)$为下列谓词:"Y是系统$S$内由公式$z_1, \cdots, z_k$到公式x的推演"，这谓词的定义可由以前的定义得到，只须在§51 Dn8中增加直接句子0.

0. $$D \asymp z_1 \vee \cdots \vee D \asymp z_k.$$

同时，Dn12便变成一谓词的定义，该谓词可记为$\mathfrak{Pf}_{z_1\cdots z_k}(Y)$，而Dn8亦变成一谓词的定义，可记为$\mathfrak{A}_{z_1\cdots z_k}(0)$.

这个修整过的谓词$\mathfrak{Pf}_{z_1\cdots z_k}(Y)$以及当定义谓词$\mathfrak{B}_{z_1\cdots z_k}(Y, x)$时所需要的其它谓词都可以用系统$W$内已有的模式而定义出来；实际上，它们的定义并不需要二元递归式，为了核验这点，只要想想，在系统$W$中它们所参与的定义式都和Dn1—Dn13a所定义的谓词是一样的.

注意，谓词$\mathfrak{B}x(y, z)$是可判定的，即对于任意的常项x,y,z都有$\vdash_1 \mathfrak{B}x(y, z)$或$\vdash_1 \neg\mathfrak{B}x(y, z)$（而且可证公式是真的，对下文所遇到的可判定的谓词亦有类似的注语）. 这亦同样证明了，每一个原始递归算术谓词的可判定性(§43—§45及§54).

为了证明论断I, II, 我们可考虑在$W$内的相应论断I′与II′.

在$W$内论断I′可写如下:

$$\exists Y \mathfrak{B}x(Y, y) \vdash_1 \exists Z \mathfrak{B}(Z, x) \supset \exists Z \mathfrak{B}(Z, y).$$

我们今证更一般的论断$I'_a$:

$$\exists Y \mathfrak{B}_{x_1\cdots x_s}(Y, y) \vdash_1 \exists Z \mathfrak{B}(Z, x_1) \& \cdots \& \exists Z \mathfrak{B}(Z, x_s) \supset \exists Z_1 \mathfrak{B}(Z, y).$$

今就$s = 1$情形而考虑，并说出当$s > 1$时应作如何更改.

为了∃消，设$\mathfrak{B}_x(Y, y)$及$\mathfrak{B}(X, x)$. 今在系统$W$内借助于下模式而定义函数$\varphi$:

$$\begin{cases} \varphi((x)) \asymp Z \\ \varphi((D, P)) \asymp (D, \varphi(P)), \text{ 如果 } \mathfrak{Pf}_x(P) \& \mathfrak{C}(D, \{P\}_0), \end{cases}$$

$$\begin{cases}\varphi((D,P,Q))\asymp(D,\varphi(P),\varphi(Q)), \text{如果 } \mathfrak{Pf}_x(P)\&\mathfrak{Pf}_x(Q) \\ \quad \&\mathfrak{C}(D,\{P\}_0,\{Q\}_0), \\ \varphi(y)\asymp y, \text{当其它情形时}.\end{cases}$$

(当 $s>1$ 时把 $\varphi((x))\asymp Z$ 换为等式组 $\varphi((x_1))\asymp Z_1,\cdots,\varphi((x_s))\asymp Z_s$.)

(11) $$\vdash \mathfrak{Pf}_x(Y)\supset\mathfrak{Pf}(\varphi(Y))\&\{Y\}_0\asymp\{\varphi(Y)\}_0.$$

我们可就 x 作归纳而证明(11)，为此，我们可注意(比较上文 * F′ 的定义及第 280 页的(1))，有

$$\vdash_1 \mathfrak{Pf}_x(Y)\sim\exists D(Y\asymp D\&\mathfrak{A}_x(D))\vee$$

(12) $$\exists D\exists P(Y\asymp(D,P)\&\mathfrak{Pf}_x(P)\&\mathfrak{C}(D,\{P\}_0))\vee$$

$$\exists D\exists P\exists Q(Y\asymp(D,P,Q)\&\mathfrak{Pf}_x(P)\&\mathfrak{Pf}_x(Q)\&\mathfrak{C}(D,\{P\}_0,\{Q\}_0)).$$

(11)的证明：奠基：容易由($P_3$)及(12)得

$$Y\asymp 0_i\vdash_1\neg\mathfrak{Pf}_x(0_i).$$

归纳推步：设 $Y\asymp(D,P,Q)$ 而有 $\mathfrak{Pf}_x(Y)$；由(12)及($P_1$)可得，对每一个 Y 言，(12)的等价式的右端开首两个析取项都是可驳的；因此第三项必须是真的．为了∃消起见，今设 $Y\asymp(D,P,Q)\&\mathfrak{C}(D,\{P\}_0,\{Q\}_0)\&\mathfrak{Pf}_x(P)\&\mathfrak{Pf}_x(Q)$；根据对 P 及 Q 的归纳假设有 $\mathfrak{Pf}(\varphi(P))$，$\mathfrak{Pf}(\varphi(Q))$ 及 $\{P\}_0\asymp\{\varphi(P)\}_0$，$\{Q\}_0\asymp\{\varphi(Q)\}_0$，由此得 $\mathfrak{C}(D,\{\varphi(P)\}_0,\{\varphi(Q)\}_0$，并且对 $Y\asymp(D,\varphi(P),\varphi(Q))$ 即对 $\varphi(Y)$ 而有(12)的等价式右端的第三析取项，不过 $\mathfrak{Pf}$ 的足码 x 须删去——即，整个析取式是真的，而由于这个等价式(这和(12)一样，同在广义算术中可证)，我们便得 $\mathfrak{Pf}(\varphi(Y))$．此外，$\{Y\}_0\asymp\{\varphi(Y)\}_0\asymp D$．亦即 $\mathfrak{Pf}(\varphi(Y))\&\{Y\}_0\asymp\{\varphi(Y)\}_0$．对 $Y\asymp(D,P)$ 及 $Y\asymp(x)$ 情形仿此；在后一情形，$\{Y\}\asymp\{\varphi(Y)\}_0$ 可由 $\mathfrak{B}(Z,x)$ 推出．$\varphi(Y)\asymp Y$ 的情形是显然的．再借助于∃消，∨消，⊃引及应用归纳模式便可以证明(11)了．

$\mathfrak{B}_x(Y,y)$ 给出 $\mathfrak{Pf}(Y)$；由(11)得 $\mathfrak{Pf}(\varphi(Y))$，又因 $\{\varphi(Y)\}_0\asymp\{Y\}_0\asymp y$ (后者由于 $\mathfrak{B}(Y,y)$ 故)，故得 $\mathfrak{B}(\varphi(Y),y)$，再由∃引得 $\exists Z\mathfrak{B}(Z,y)$．因为这时对假定公式 $\mathfrak{B}_x(Y,y)$ 及 $\mathfrak{B}(Z,x)$ 而言，变元 Y 及 Z 是固定的，故∃消是合法的(§24 引理 7b)．在这些∃消

中借助于⊃引便得到I′了.

由论断I′立刻可得I. 实际上，由论断1的条件有某Y使$\mathfrak{B}_{A_k}(Y, A_l)$为真，由$\mathfrak{B}_x(y, z)$的可判定性，对这个Y可得$\vdash_1 \mathfrak{B}_{A_k}(Y, A_l)$，其次再由∃引得$\vdash_1 \exists Y \mathfrak{B}_{A_k}(Y, A_l)$. 由I′得$\vdash_1 \exists Z \mathfrak{B}(Z, A_k) \supset \exists Z \mathfrak{B}(Z, A_l)$. 转入系统$S$内可得$\vdash \exists z B(z, \mathbf{k}) \supset \exists z B(z, \mathbf{l})$，而且可取$\mathbf{c}$以作z.

论断II′. $\vdash_1 \exists X \mathfrak{B}(X, e(b)) \supset \exists X \mathfrak{B}(X, e(s(b, d)))$. 实际上，如在第十章一样，若使用广义算术的语言考虑，并把$e(b)$及$s(e(b), d)$看作系统$S$内(无定义的)公式，我们便可以看见有一个由第一个公式到第二个公式的推演$Y: e(b) \vdash^{e} s(e(b), d)$. 作为这样的Y可取下列的广义算术中的实体：$(s(e(b), d), (\forall b e(b), (\neg a' = 0), (\neg a' = 0 \supset \forall b e(b), (\neg a' = 0 \supset e(b), (e(b)), (e(b) \supset (\neg a' = 0 \supset e(b))))(\forall b e(b) \supset s(e(b), d)))$. 这个实体是作为推演$e(b) \vdash^{e} s(e(b), d)$在广义算术中的代表而得到的. 这推演由∀引, ∀消组成；对∀消这里换为公理11，而∀引则根据§23第102页的方法而撤消，作为C则选取公理15. 注意，$\mathfrak{B}e_{(b)}(Y, s(e(b), d))$是广义算术的一个真公式，由于在$W$中谓词$\mathfrak{B}_x(y, z)$的可判定性，我们有$\vdash \mathfrak{B}(b)(Y, \mathfrak{S}(e(b), d))$. 其次有$\vdash_1 \mathfrak{S}(e(b), d) \asymp e(\mathfrak{S}(b, d))$. (依归纳式(I)). 由此得$\vdash_1 \mathfrak{B}e_{(b)}(Y, e(s(b, d)))$. 再由∃引便得$\vdash_1 \exists Y \mathfrak{B}e_{(b)}(Y, e(s(b, d)))$. 最后由I′得

$$\vdash_1 \exists X \mathfrak{B}(X, e(b)) \supset \exists X \mathfrak{B}(X, e(s(b, d))).$$

(这便是II′.——译者)把II′映象到系统$S$去并作必要的变元选择便得II.

III. 今引进下列的预备定义：$\mathfrak{S}^{a \cdots y}_{\mathbf{a} \cdots \mathbf{y}} X$是系统$W$内一函数，它把每一实体变成下列的结果，把变元$\boldsymbol{a}$的所有自由出现换为数字$\mathbf{a}$，…，变元$\boldsymbol{y}$的所有自由出现换为数字$\mathbf{y}$(除变元$\boldsymbol{a}, \cdots, \boldsymbol{y}$之外可能还有其它变元). 这函数可如下定义，当X为系统$S$的项或公式时，重复应用函数$\mathfrak{S}(E, t, x)$而得，当X为一证明时，则借助于条件$\mathfrak{S}(D, P, Q) \asymp (\mathfrak{S}D, \mathfrak{S}P, \mathfrak{S}Q)$及对$\mathfrak{S}(D, P)$或$\mathfrak{S}(D)$的类似条件而得. (这里及下文$\mathfrak{S}D$均为$\mathfrak{S}^{a \cdots y}_{\mathbf{a} \cdots \mathbf{y}} D$的缩写，并且在一

公式中 $\mathfrak{S}$ 的所有出现处，这个缩写都应该用唯一的方式加以复原). 如果 $\boldsymbol{a}, \cdots \boldsymbol{y}$ 是在系统 $S$ 的字母表中开首的字母，那末我们便把 $\mathfrak{S}_{a \cdots y}^{a \cdots y} X$ 写为 $\mathfrak{S}(X, a, \cdots, y)$. $s(x, a, \cdots, y)$ 是相应于 $\mathfrak{S}(X, a, \cdots, y)$ 的算术函数，而 $s(x, a, \cdots, y)$ 为一项，在系统 $S$ 内形式地表示这函数，并用 §52 方法而作成的 (参见下文 $(N_2)$).

$\hat{\mathfrak{B}}_{z_1 \cdots z_k}(X, y)$ 为系统 $W$ 的谓词，意指: X 为由公式 $A_1, \cdots, A_s$ 及公式 $z_1, \cdots, z_k$ 到公式 y 的推演，诸 A 乃由公理 14—21 作代入而得，在推演中并未用到规则 9 及 12.

借助于就 (A, B) 的归纳 $(I)$[1]，容易证明

$$\vdash_1 \mathfrak{S}(A \supset B) \asymp (\mathfrak{S}A \supset \mathfrak{S}B),$$

以及(就 (D, E, F) 而归纳) $\vdash_1 \mathfrak{C}(D, E, F) \supset \mathfrak{C}(\mathfrak{S}D, \mathfrak{S}E, \mathfrak{S}F)$，由此(再就 (X, Y, Z) 而归纳)便得

$$(13) \qquad \vdash_1 \hat{\mathfrak{B}}_z(X, Y) \supset \hat{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{S}z}(\mathfrak{S}X, \mathfrak{S}Y).$$

此外由于 $\vdash A_1, \cdots, \vdash A_s$ 及 $(I_a')$ 可得

$$(14) \qquad \vdash_1 \exists X \hat{\mathfrak{B}}_z(X, Y) \supset \exists X \mathfrak{B}_z(X, Y).$$

为了理解后文，须作下列的附注.

设 $A(x_1, \cdots, x_n)$ 为系统 $S$ 的公式；对于随意的数 $x_1, \cdots, x_n$ 都把相应于这些数的数字 $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n$ 代入公式 $A(x_1, \cdots, x_n)$ 的变元去，所得的公式记为 $A(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)$ (参见 § 41, 第 212 页). 公式 $A(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)$ 为系统 $W$ 中的一项；把 $W$ 中这样的项写成 $S$ 的公式，再用弯斜的变元以代替 $W$ 中的数字变元，我们将把系统 $W$ 中具变数字的项表为 $A(x_1, \cdots, x_n)$ (因此，例如把具变数字 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的等式 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ 写成 $a = b$). 今设 $\pi(x_1, \cdots, x_n)$ 为一算术函数，对任意的 $x_1, \cdots, x_n$ 言其值等于相应公式 $A(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)$ 的哥德尔数，而 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 为一项，在系统 $S$ 内形式地表示这函数[2]. 这时在由系统 $W$ 到 $S$ 的映象下 $A(x_1, \cdots, x_n)$ 便变成系统 $S$ 的项 $p(x_1, \cdots, x_n)$. 对 $S$ 中的项亦可作同样的附注.

---

1) 就 (A,B) 归纳而证明公式 P(A,B) 乃指就 x 归纳而证明 $P(\{x\}_0, \{x\}_1)$; 对 P(A, B, C) 仿此——俄译注.

2) 用 §52 的办法作成. 对 $(N_1)$ 中的 $t(x, y)$, (19) 中的 $p(a, b)$, 第 594 页上的 $f_0$ 及 $h_0$ 均仿此——俄译注.

($N_1$) 对系统 $S$ 随意一公式 $A(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 言，就 $(a,b)$ 而归纳容易证明 $\vdash_1\mathfrak{N}(a)\&\mathfrak{N}(b)\supset A(a,b)\asymp s(A(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),a,b)$，或更简短些

(15) $$\vdash_1 A(a,b)\asymp s(A(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),a,b).$$

例如：

(16) $$\vdash_1 a=b\asymp s(\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b},a,b),$$

(17) $$\vdash_1 a'=b\asymp s(\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{b},a,b).$$

今设 $r(x,y)$ 为一函数，其值等于公式 $A(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 的哥德尔数，用 §52 的方法而作成的. $t(x,y)$ 为一项，在 $S$ 内形式地表示这函数. 这时在由 $W$ 到 $S$ 的映象中论断(15)变成 $\vdash t(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=s(\mathbf{r},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$，这里 $r$ 为公式 $A(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 的哥德尔数. 对于随意多个变元 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, ……类似的论断亦成立. 例如：

(18) $$\vdash_1 a=b'\asymp s(\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}',a,b,c).$$

($N_2$) 设 $\pi(x,y)$ 为一函数，其值等于公式 $\mathbf{x}=\mathbf{y}$ 的哥德尔数，用 §52 的方法而作成的，即 $\pi(x,y)=2^{15}\cdot 3^{Nu(x)}\cdot 5^{Nu(y)}$，而 $r$ 为等式 $\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{b}$ 的哥德尔数. 这时在由 $W$ 到 $S$ 的映象下，上述例(17)的论断便变成 $\vdash p(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b})=s(\mathbf{r},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$，这里 $p(x,y)$ 为一项，在 $S$ 内形式地表示 $\pi(x,y)$.

($N_3$) 设 X 为系统 $S$ 的公式. 由函数 $s(X,a,b,\cdots,y)$ 的定义直接可得

$$\vdash_1 s(X,a,b,\cdots,x,0)\asymp s(\mathfrak{S}_0^y X,a,b,\cdots,x).$$

转到 $S$ 去可得：如果 $r$ 为在哥德尔编号下公式 X 的哥德尔数，而 $q$ 为 $s_0^y X$ 的哥德尔数，则：

$$\vdash s(\mathbf{r},\boldsymbol{a},\cdots,\boldsymbol{x},0)=s(\boldsymbol{q},\boldsymbol{a},\cdots,\boldsymbol{x}).$$

现在开始直接证明关于公式 $\exists cB(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})$ 的论断 III. 我们将证明更一般的论断.

(A) 如果 $f(a_1,\cdots,a_n)$ 形式地表示原始递归函数 $\varphi(a_1,\cdots,a_n)$，而 $r$ 为等式 $f(x_1,\cdots,x_n)=y$ 的哥德尔数，这里 $x_1,\cdots,x_n$, $y$ 为在变元表 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\cdots$ 中前 $n+1$ 个变元，则

$$\vdash f(b_1,\cdots,b_n)=b\supset\exists cB(c,s(\mathbf{r},b_1,\cdots,b_n,b)).$$

(若把(A)应用于论断 III 中的函数 $\varphi(a)$ $(n=1)$ 去，并以 0 代 $b$，

我们便可借助于 $(N_3)$ 而得到论断 III 了.)

我们将就函数 $\varphi(a_1, \cdots, a_n)$ 的原始递归描述的长度 $k$ 作归纳而证明 (A). 此外为了对于每一个表示原始递归函数的具体的项 $\mathrm{f}(\mathrm{b}_1, \cdots, \mathrm{b}_n)$ 而得到论断 III, 在特例, 对第 579 页中的项 $\mathrm{b}(\boldsymbol{b}, \mathrm{s}(\mathbf{p}, \mathbf{p}))$ 而得到论断 III, 只须就奠基和归纳推步而作证明便够了, 而这个归纳本身这时又换为有限多个$\supset$消.

奠基. $k=1$. 设 $\pi(a, b)$ 为等式 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ 的哥德尔数; 容易看见, $\pi(a, b)$ 是原始递归函数. 今证:

(19) $$\vdash \boldsymbol{a}=\boldsymbol{b} \supset \exists \mathrm{cB}(\boldsymbol{c}, \mathrm{p}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}))$$

(p 形式地表示 $\pi$). 今对 $\boldsymbol{b}$ 作归纳: $\boldsymbol{b}=0$. 对 $\boldsymbol{a}$ 作归纳: 有某 $x$ 使 $\mathfrak{B}(X, \pi(0, 0))$ 为真, 由此得 $(Ex) \vdash \mathrm{B}(\mathbf{x}, \mathrm{p}(0, 0))$, 由$\exists$引得 $\vdash \exists \mathrm{xB}(\mathrm{x}, \mathrm{p}(0, 0))$, 由$\supset$引得 $\vdash 0=0 \supset \exists \mathrm{xB}(\mathrm{x}, \mathrm{p}(0, 0))$. 归纳推步: 因 $\vdash \neg \boldsymbol{a}'=0$ 故得 $\vdash \boldsymbol{a}'=0 \supset \exists \mathrm{xB}(\mathrm{x}, \mathrm{p}(\boldsymbol{a}', 0))$. 就 $\boldsymbol{b}$ 归纳中的归纳推步: 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b} \supset \exists \mathrm{xB}(\mathrm{x}, \mathrm{p}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}))$ 且设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}'$. 这时 $\neg \boldsymbol{a}=0$ 且由 *137 得 $\exists \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}')$; 为了$\exists$消起见设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}'$; 这时 $\boldsymbol{c}'=\boldsymbol{b}'$, 故由公理 14 得 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}$; 由归纳假设有 $\exists \mathrm{xB}(\mathrm{x}, \mathrm{p}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}))$. 其次 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b} \vdash \boldsymbol{c}'=\boldsymbol{b}'$ (公理 17), 故有某 Y 使 $\vdash_1 \hat{\mathfrak{B}}_{c=b}(\mathrm{Y}, \boldsymbol{c}'=\boldsymbol{b}')$, 并由于(13)之故对于 $\mathrm{Y}_1 \asymp \mathfrak{S}_{a, b, c}^{a; b; c} \mathrm{Y}$ 而有 $\vdash_1 \hat{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{s}(c=b, a, b, c)}(\mathrm{Y}, \mathfrak{s}(\boldsymbol{c}'=\boldsymbol{b}', a, b, c))$, 其次由 (16) 得 $\vdash_1 \hat{\mathfrak{B}}_{c=b}(\mathrm{Y}_1, \boldsymbol{c}'=\boldsymbol{b}')$; 由$\exists$引及 (14)得 $\vdash_1 \exists \mathrm{Y} \mathfrak{B}_{c=b}(\mathrm{Y}, \boldsymbol{c}'=\boldsymbol{b}')$; 由 I′ 便得 $\vdash_1 \exists \mathrm{Y} \mathfrak{B}(\mathrm{Y}, \boldsymbol{c}'=\boldsymbol{b}')$, 即, 在自然数的算术中有

$$\vdash \exists \mathrm{xB}(\mathrm{x}, \mathrm{p}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b})) \supset \exists \mathrm{xB}(\mathrm{x}, \mathrm{p}(\boldsymbol{c}', \boldsymbol{b}'));$$

由 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}'$ 便得

$$\vdash \exists \mathrm{xB}(\mathrm{x}, \mathrm{p}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b})) \supset \exists \mathrm{xB}(\mathrm{x}(\mathrm{p}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}')).$$

即, $\exists \mathrm{xB}(\mathrm{x}, \mathrm{p}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}'))$; 由$\supset$引得 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}' \supset \exists \mathrm{xB}(\mathrm{x}, \mathrm{p}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}'))$.

情形 (I) $\varphi(x)=x'$. 须证 $\vdash \boldsymbol{b}'=\boldsymbol{c} \supset \exists \mathrm{xB}(\mathrm{x}, \mathrm{s}(\mathbf{r}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}))$, 这里 $r$ 为等式 $\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{b}$ 的哥德尔数. 但这可由 (19) 推得, 因根据 $(N_2)$ 有 $\vdash \mathrm{s}(\mathbf{r}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})=\mathrm{p}(\boldsymbol{b}', \boldsymbol{c})$.

情形 (II) $\varphi(x)=q$. 根据(19), 只须证 $\vdash \mathrm{s}(\mathbf{r}, \boldsymbol{a})=\mathrm{p}(\mathbf{q}, \boldsymbol{a})$. 这里 $r$ 为等式 $\mathbf{q}=\boldsymbol{a}$ 的哥德尔数. 应用 (15) 把 $\mathbf{q}=\boldsymbol{a}$ 作为

$A(a, b)$.

情形(III) $\varphi(x_1, \cdots, x_n) = x_i$. 如前，利用(19)与(16)而证明本论断.

归纳推步. 情形(Vb). $n = 2$. 今设 $\varphi(0, x_2) = \psi(x_2)$, $\varphi(y', x_2) = \chi(y, \varphi(y, x_2), x_2)$.

由归纳假设得

$$\vdash g(b) = c \supset \exists x B(x, s(p, b, c))$$

$$\vdash h(e, b, d) = c \supset \exists x B(x, s(q, e, b, d, c)),$$

这里 $p$ 与 $q$ 分别为公式 $g(a) = b$ 及 $h(a, b, c) = d$ 的哥德尔数，而 $g(a)$, $h(a, b, c)$ 分别形式地表示 $\psi(a)$ 及 $\chi(a, b, c)$. 由§74 例 9, *137 及公理 15 可得

(20) $$\vdash f(a, b) = c \sim (a = 0 \& g(b) = c) \vee \exists e(a = e' \& h(e, f(e, b), b) = c).$$

今须证明

(21) $$\vdash f(a, b) = c \supset \exists x B(x, s(r, a, b, c)),$$

这里 $r$ 为等式 $f(a, b) = c$ 的哥德尔数.

今设 $f(a, b) = c$, 并就固定的 $a, b, c$ 而证明 $\exists x B(x, s(r, a, b, c))$. 我们就 $a$ 而作归纳.

奠基: $a = 0$. 读者自证. 归纳推步. 由(20), 所给的假设给出 $\exists e(a = e' \& h(e, f(e, b), b) = c)$. 为了∃消起见，设 $a = e' \& h(e, f(e, b), b) = c$. 由&消, *100, &引及∃引可得 $\exists y(f(e, b) = y \& h(e, y, b) = c)$. 今为了∃消起见，设 $f(e, b) = y \& h(e, y, b) = c$, 且应用&消. 今若使用关于 $e$ 及 $h(a, b, c)$ 的归纳假设，可得

$$\vdash f(e, b) = y \supset \exists x B(x, s(r, e, b, y)),$$

$$\vdash h(e, y, b) = c \supset \exists x B(x, s(q, e, y, b, c),$$

及 $$\vdash a = e' \supset \exists x B(x, s(t, e, a)).$$

这里 $t$ 为等式 $a' = b$ 的哥德尔数(参见奠基情形及*101). 因此得

(22) $$\exists x B(x, s(t, e, a)), \exists x B(x, s(q, e, y, b, c))$$

及 $\exists x B(x, s(\mathbf{r}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{b}, y))$. 此外,若借助于§38定理24(a),&引,∨引,*101及(20)可得 $\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{a}, h(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{c}, f(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{y} \vdash f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{c}$ 而无须应用规则9及12,故在广义算术中有Y使得

$$\hat{\mathfrak{B}}_{e'=a, h(e,y,b)=c, f(e,b)=y}(Y, f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{c}).$$

由于 $\mathfrak{B}_x(y, z)$ 的可判定性,得

$$\vdash_1 \hat{\mathfrak{B}}_{e'=a, h(e,y,b)=c, f(e,b)=y}(Y, f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{c});$$

由此根据(13)得

(23) $\quad \vdash_1 \hat{\mathfrak{B}}_{e'=a, h(e,y,b)=c, f(e,b)=y}(\mathfrak{S}^{abcey}_{abcey} Y, f(a, b) = c);$

由(23),∃引及(14)可得

(24) $\quad \vdash_1 \exists Y \mathfrak{B}_{e'=a, h(e,y,b)=c, f(e,b)=y}(Y, f(a, b) = c).$

把 $s = 3$ 时的 Ia′ 应用于(24)得:

(25) $\vdash_1 \exists Z\mathfrak{B}(Z, e = a') \& \exists Z\mathfrak{B}(Z, h(e, y, b) = c) \& \exists Z\mathfrak{B}(Z, f(e, b) = y) \supset \exists Z\mathfrak{B}(Z, f(a, b) = c).$

今设 $\varphi(a, b, c)$ 为原始递归函数,在 $a, b, c$ 处其值为等式 $f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{c}$ 的哥德尔数,而 $\chi(a, b, c, d)$ 为相应于 $h(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathbf{d}$ 的类似函数;设 $f_0, h_0$ 分别形式地表示 $\varphi$ 与 $\chi$;(参见第590页脚注),$r$ 为等式 $f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{c}$ 的哥德尔数. 若注意有 $\vdash f_0(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = s(\mathbf{r}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \mathbf{c})$(参见上面($N_1$)处),对 $h_0$ 仿此,则由(25)借助于转到系统 $S$ 便得:

$$\vdash \exists x B(x, s(\mathbf{t}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{a}) \& \exists x B(x, s(\mathbf{q}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{b}, \mathbf{c})) \& \exists x B(x, s(\mathbf{r}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{y})) \supset \exists x B(x, s(\mathbf{r}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \mathbf{c})).$$

再由(22)得 $\exists x B(x, s(\mathbf{r}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \mathbf{c}))$.

这样就对上面所选的公式 Consis 而证明了定理30. 今证对这公式若作其它选择亦可归结到本情形来. 今设 Consis 表示公式 $\neg \exists c B(\mathbf{c}, \mathbf{r})$,而 $r$ 为公式 $1 = 0$ 的哥德尔数(参见§42). 今证 $\vdash$ wid ~ consis. 我们有 $1 = 0 \vdash A_{e(r)}$;由*1及论断I可得

$$\vdash \exists c B(\mathbf{c}, \mathbf{r}) \supset \exists c B(\mathbf{c}, \mathbf{r}) \text{ 及 } \vdash \exists c B(\mathbf{c}, \mathbf{r}) \supset \exists c B(\mathbf{c}, e(\mathbf{r})),$$

由此得 $\vdash \exists c B(\mathbf{c}, \mathbf{r}) \supset \exists c B(\mathbf{c}, \mathbf{r}) \& \exists c B(\mathbf{c}, e(\mathbf{r}))$,再由∃引及*2得

(26) $\quad \vdash \exists c B(\mathbf{c}, \mathbf{r}) \supset \exists \boldsymbol{a}(\exists c B(\mathbf{c}, \boldsymbol{a}) \& \exists c B(\mathbf{c}, e(\boldsymbol{a}))),$

由此及 *12*86 得 $\vdash$wid$\supset$consis. 另一方面由命题演算有 A, ¬A $\vdash 1=0$ (§23);故在广义算术内有 Z 使 $\hat{\mathfrak{B}}_{A,\neg A}(Z, 1=0)$.

今设 $s(P, y)$ 为系统$W$内的函数,它把命题演算内的证明 P 变成下结果,即在其中所有字母 A 都换为 y.

读者可在广义算术中作出这函数并证明 $\hat{\mathfrak{B}}_{y,\neg y}(s(Z, y), 1=0)$. 再由于谓词 $\hat{\mathfrak{B}}_{x,y}(Z,w)$ 的可判定性可得(参见上文关于 $\mathfrak{B}_x(y, Z)$ 的附注).

$$\vdash_1 \hat{\mathfrak{B}}_{y,\neg y}(s(Z, y), 1=0) \text{ 及 (用}\exists\text{引与(14))}$$
$$\vdash_1 \exists Z \mathfrak{B}_{y,\neg y}(Z, 1=0).$$

其次,当 $s=2$ 时 Ia′ 给出 $\vdash_1 \exists Z\mathfrak{B}(Z,y) \& \exists Z\mathfrak{B}(Z, \neg y) \supset \exists Z\mathfrak{B}(Z, 1=0)$. 若映象到系统 $S$ 去可得 $\vdash \exists c B(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) \& \exists c B(\boldsymbol{c}, e(\boldsymbol{a})) \supset \exists c B(\boldsymbol{c}, \mathbf{r})$. 法则 12 给出:

(27) $\quad \vdash \exists \boldsymbol{a}(\exists c B(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) \& \exists c B(\boldsymbol{c}, e(\boldsymbol{a}))) \supset \exists c B(\boldsymbol{c}, \mathbf{r})$.

(26)(27),*16 及 *30 便给出 $\neg\exists \boldsymbol{a}(\exists c B(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) \& \exists c B(\boldsymbol{c}, e(\boldsymbol{a}))) \sim$ consis, 即(参见 *86), $\vdash$wid $\sim$ consis.

若注意, 如果 $\vdash \neg A_k$ 则 $A_k \vdash 1=0$, 又 $1=0 \vdash A_k$ 即 $A_k \vdash A_r$ 及 $A_r \vdash A_k$, 由 I 及 *16 便得 $\vdash \exists c B(\boldsymbol{c}, \mathbf{k}) \sim \exists c B(\boldsymbol{c}, \mathbf{r})$, 再由 *30 得 $\vdash \neg\exists c B(\boldsymbol{c}, \mathbf{k}) \sim$ consis. 因此在定理 30 中作为 consis 的亦可取 $\neg\exists c B(\boldsymbol{c}, \mathbf{k})$.

还可注意, 作为 consis 的还可取公式 con: $\exists \boldsymbol{b}[F(\boldsymbol{b}) \& \neg\exists c B(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b})]$. ($F(x)$ 为$W$中公式 $\mathfrak{F}(x)$ 在 $S$ 中的象). 为了证明这点,只须证明 $\vdash$con$\supset$consis; 又由规则 12,只须证明

$$\vdash F(\boldsymbol{b}) \& \neg\exists c B(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) \supset \text{consis}.$$

在系统$W$中有 Z 使 $\mathfrak{B}_{1=0}(Z, A)$, 其次, $\hat{\mathfrak{B}}_{1=0}(s(Z, y), y)$, 由此可得 $\vdash_1 \hat{\mathfrak{B}}_{1=0}(s(Z, y), y)$,再由 $\exists$ 引及(14)得 $\vdash_1 \exists Z\mathfrak{B}_{1=0}(Z, y)$, 因而根据 I′ 得

$$\vdash_1 \exists Z\mathfrak{B}(Z, 1=0) \supset \exists Z\mathfrak{B}(Z, y),$$

又由$\supset$引得 $\vdash_1 \mathfrak{F}(y) \supset [\exists Z\mathfrak{B}(Z, 1=0) \supset \exists Z\mathfrak{B}(Z, y)]$. 若映象于系统 $S$ 内得 $\vdash F(\boldsymbol{b}) \supset [\exists c B(\boldsymbol{c}, \mathbf{r}) \supset \exists c B(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b})]$, 再由 *12 及 *2 得 $\vdash F(\boldsymbol{b}) \supset [\neg\exists c B(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) \supset \neg\exists c B(\boldsymbol{c}, \mathbf{r})]$,由 *4 得 $\vdash F(\boldsymbol{b}) \&$

$\neg\exists c\mathrm{B}(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})\supset\neg\exists c\mathrm{B}(\boldsymbol{c},\mathbf{r})$，亦即 $\vdash\mathrm{F}(\boldsymbol{b})\&\neg\exists c\mathrm{B}(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})\supset\mathrm{consis}$，如所欲证.

但是必须注意，如果在公式 consis 中把 $\mathrm{B}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 改用另一公式，但仍数字地表示谓词 $B(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 的，则哥德尔第二定理的论断仍可证明成立. 例如，容易核验，公式 $\mathrm{B}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\&\neg\mathrm{B}(\boldsymbol{a},\mathbf{r})$ 仍然数字地表示 $B(a,b)$（如果系统 $S$ 是相容的，则当把 $\boldsymbol{a}$ 随意地代以一数字时，这合取式的第二项都变成一可证公式；如果系统 $S$ 为不相容的，则根据 §41 定义，随便一个公式都数字地表示随便一个谓词，只要谓词的变目个数不少于该公式的便成）.（如果我们一点不知道关于系统 $S$ 的相容性，则这里所作的议论便依赖于在元数学上使用了排中律）. 在其中便有 $\vdash\forall\boldsymbol{a}\neg(\mathrm{B}(\boldsymbol{a},\mathbf{r})\&\neg\mathrm{B}(\boldsymbol{a},\mathbf{r}))$（*50 及 $\forall$ 引）. 这公式便表示公式 $1=0$ 的不可证性. 这个例子，可用以例释哥德尔第一定理与第二定理的差别的，亦证明了，存在两个不同的，互不等价的两公式 $\mathrm{B}_0(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 与 $\mathrm{B}_1(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$，它们数字地表示同一的谓词（这点亦可简单地证明如下：公式 $\neg\mathrm{B}(\boldsymbol{a},\mathbf{r})$ 与 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$ 数字地表示同一的谓词）. 关于这些谓词的代表函数亦可作类似的说明.

哥德尔第一定理的真确性，只依赖于下列三个条件便够了，该系统的相容性，在其中有第四章的系统作为子系统（参见 § 76）以及可证公式集的可递归枚举性[1]. 但哥德尔第二定理则不同，遵守（0），I，II，III 诸条件都是必要的. 如果这些条件不被满足，可以证明，表示该系统相容性的公式可以在系统内加以证明.

在下面，字母 $A$，$B$，$C$ 用以表示形式系统，包含有第四章的系统，并具有递归可数多个定理；此外并考虑，$B$ 与 $C$ 附有类似于（0），I，II，III 的条件，但其中 $\exists c\mathrm{B}(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})$ 取自 $B$，而函数 $c(x)$，$\varphi$ 及符号 $\vdash$ 则就 $C$ 而言. 设在 $B$ 中可以证明 $C$ 的相容性（写成 wid, consis 或 con；但借助于公式 $\exists c\mathrm{B}(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})$）；再设 $B$ 是相容的. 这时 $C$ 亦是相容的，因为如果哥德尔数为 $r$ 的公式 $1=0$ 能够在

1) 参见莫斯托夫斯基 [1947*].

$C$ 内证出，则有数 $k$ 使 $\varphi(k)=r$，因而在 $B$ 中便有 $\vdash B_0(\mathbf{k},\mathbf{r})$ 及 $\vdash \exists c B(\mathbf{c},\mathbf{r})$，再与 $\vdash$consis 合并，便得出 $B$ 的不相容性了.

再设 $A$ 为一形式系统，具有上述性质，它与 $B$ 的关系恰如 $B$ 和 $C$ 的关系. 这时前述的议论可以在 $A$ 内形式体系化，而这形式体系化便达到下列结果，如果在 $A$ 内可以证出 $B$ 的相容性，在 $B$ 中可以证 $C$ 的相容性，则在 $A$ 内可以证 $C$ 的相容性.

由上述可得，如果具上述关系的两系统 $B$，$C$，其相容性可以在彼此的系统内互相证明，则两系统都是不相容的.

设 $\omega$-con 为一公式，表示所给系统 $S$ 的 $\omega$ 相容性（参见 §60，第 336 页）.

今设 $S$ 为 $\omega$ 相容的；则 $S$ 为相容的，并且由于公式 consis 具 $\forall x \neg B(x,\mathbf{r})$ 形而 $S$ 为 $\omega$ 相容的，故把新公理 consis 加到 $S$ 后所得的系统 $S_1$ 是相容的. 设 $\text{consis}_1$ 在算术内表示 $S_1$ 的相容性. 把上述的议论形式体系式，可得 $\vdash \omega\text{con} \supset \text{consis}_1$（在算术内，当然更在 $S_1$ 内）. 今设在 $S$ 内有 $\vdash \text{consis} \supset \omega\text{-con}$，这时这公式便在 $S_1$ 内可证，故在 $S_1$ 内 $\vdash \text{consis} \supset \text{consis}_1$. 因为 consis 为 $S_1$ 的公理，故在 $S_1$ 内 $\vdash \text{consis}_1$. 另一方面 $S$ 既满足定理 30 的条件，可推知 $S_1$ 亦然（因为由函数 $\varphi$ 容易作出一函数，用它来枚举 $S$ 中形为 consis$\supset$A 的定理，亦即用来枚举系统 $S_1$ 中相应定理 A；此外可以认为 $\text{consis}_1$ 中的 $\exists c B(\mathbf{c},\boldsymbol{\alpha})$ 可由 $S$ 中的 $\exists c B(\mathbf{c},\boldsymbol{\alpha})$ 及 consis$\supset$A 而作出）. 故得，如果系统 $S$ 满足定理 30 的条件且 $\omega$ 相容，则公式 consis$\supset\omega$-con 在 $S$ 中是不可证的.

# 附录II §49及§74中缺漏处的补足

今作出§49附注1处论断($\alpha$)与($\beta$)的证明. 这样同时也就补足§74中的缺漏处了(第460页). 由*180b得$\vdash B(w,w,0,w)$; 再引用∃引两次便可证得($\alpha$). 至于($\beta$)的证明则殊为复杂; 我们根据希尔伯特-伯尔奈斯[1934](参见§49,第269页,§74,第470页)而作证明. 为简单起见,我们试对公式($\beta$)在系统$S_1$内作证明,$S_1$是由第四章的系统$S$加入下列的关于项的形成规则及公理而得: 如果系统$S_1$的公式$\exists!wF(w)$在该系统内可证,而$F(z)$为一个与$F(w)$相合的公式,则$\iota wF(w)$为该系统的一项,而公式1) $F(\iota wF(w))$及2) $\iota wF(w)=\iota zF(z)$为该系统的公理. 公理2)容许对约束变元w实施改名,以排除对这新项中出现的自由变元作代入时的困难. 定理42容许在一切不含符号$\iota$的命题的证明中,消除这一类的项.

我们依照希尔伯特-伯尔奈斯[1], 在系统$S_1$中考虑下列的显式定义

$$\mu yF(y)=\iota y[F(y)\&\forall z(z<y\supset\neg F(z))\vee(\neg\exists zF(z)\&y=0)].$$

(如果下列两断言是真确的,则它亦是直觉主义地可接受的: (1) $\vdash F(x)\vee\neg F(x)$及(2) $\vdash\exists xF(x)\vee\neg\exists xF(x)$; 参见*149a及*174b; 如果有某项t使(3) $\vdash\exists xF(x)\supset\exists x[x<t\&F(x)]$, 则由*150, 第二个条件可由第一个推出, 故只须$\vdash F(x)\vee\neg F(x)$及(3)便够了. 注意,当(4) $\vdash F(s)$时,则(3)在$t=s'$时成立).

项$\mu yF(y)$(正如$\iota yF(y)$一样,它可以出现有未明说的自由变元)表示了运算子$\varepsilon yF(y)$(参见§62,第351页及§74例8). 容易证明下列的公式($\mu_1$)—($\mu_3$)(比较希尔伯特-伯尔奈斯[1934],

1) 希尔伯特-伯尔奈斯写为$\iota_x$, $\mu_x$而非$\iota x$, $\mu x$——俄译注.

第 396 页).

$(\mu_1)$ $F(a) \supset F(\mu y F(y))$,

$(\mu_2)$ $F(a) \supset \mu y F(y) \leqslant a$, (*13, *139, *61a)

$(\mu_3)$ $\neg \exists y F(y) \supset \mu y F(y) = 0$,

又 $(\mu_0)$: 对每个与 $F(y)$ 相合的公式 $F(z)$ 都有 $\mu y F(y) = \mu z F(z)$. (反之,可以马上引入项 $\mu y F(y)$ 及公理 $(\mu_0)$—$(\mu_3)$;这时项 $\iota y F(y)$ 便是不必要的了，因为如果引入它的话，则当 $\vdash \exists ! y F(y)$ 时将有 $\vdash \iota y F(y) = \mu y F(y)$ (希尔伯特-伯尔奈斯[1934], 第 400 页); 引入 $\mu y F(y)$ 有下列的优点,它对于公式 $F(y)$ 并不要求任何的条件).

今引入下列的定义. 设 $t(x)$ 为任意一项,而 $L(y,w)$ 为下公式

$$\exists c \exists d\{B(c, d, 0, 1) \& \forall i[i < y \supset \exists u \exists v[B(c, d, i', u) \& B(c, d, i, v) \& v \cdot T(i) = u]] \& B(c, d, y, w)\}.$$

由 *180c 得 $\vdash \exists ! w L(y, w)$. 由定理 27 的证明可见，如果公式 $t(x) = z$ 表示谓词 $t(x) = z$,则公式 $L(y,w)$ 表示谓词 $\prod_{x<y} t(x) = w$. 今把项 $\iota w L(s, w)$ 表示为 $\prod_{x<s} t(x)$. 其余的记号是: $\rho(s, t)$ 表示 $\iota x R(s, t, x)$; $s \equiv t(\text{mod } n)$ 表示

$$\exists x(s = nx + t \vee t = nx + s)$$

(这便容许我们写,比如说, $\vdash \rho(a, b) = \iota x R(a, b, x)$,

(5) $\quad \vdash a \equiv b(\text{mod } n) \sim \exists x(a = nx + b \vee b = nx + a)$

等等). 容易证明下列各论断:

(6) $$\vdash a \equiv a(\text{mod } n);$$

(7) $$\vdash a \equiv b(\text{mod } n) \supset b \equiv a(\text{mod } n);$$

(8) $$\vdash a \equiv b(\text{mod } n) \supset ac \equiv bc(\text{mod } nc);$$

(9) $$\vdash a \equiv b(\text{mod } n) \& a \equiv c(\text{mod } n) \supset b \equiv c(\text{mod } n);$$

(10) $$\vdash a \equiv b(\text{mod } nc) \supset a \equiv b(\text{mod } n);$$

(11) $$\vdash a \equiv b(\text{mod } n) \sim a + c \equiv b + c(\text{mod } n);$$

(12) $$\vdash a \equiv \rho(a, b)(\text{mod } b).$$

$$\vdash \exists y(a = by + r) \supset \rho(a, b) \leqslant r,$$

$$\vdash b \neq 0 \supset \rho(a, b) < b.$$

由(5)得，$\vdash r \equiv s(\text{mod } b) \supset r \geqslant b + s \vee s \geqslant b + r \vee r = s$. 由此得(13)$\vdash a \equiv r(\text{mod } b) \& r < b \supset r = \rho(a,b)$. 再得$\vdash a \equiv b(\text{mod } n) \sim \rho(a, n) = \rho(b, n)$. 关于在 §40 所定义的 $a|b$ 有

(14) $\qquad \vdash a|b \sim b \equiv 0(\text{mod } a)$,

根据(5)这又等价于 $\vdash a|b \sim \rho(b, a) = 0$.

(15) $\qquad \vdash a|b \& b \equiv c(\text{mod } a) \supset a|c$.

互质关系可由下列定义而引入，它保证一些已知定理(见下21)的成立，这些定理只在以后才是必要的.

(16) $\qquad \text{Prim}(a, b) \sim \exists x(ax \equiv 1(\text{mod } b))$.

由此得

(17) $\qquad \vdash \text{Prim}(a,b) \& c|a \supset \text{Prim}(c,b)$,

(18) $\qquad \vdash \text{Prim}(a,n) \& a \equiv b(\text{mod } n) \supset \text{Prim}(b,n)$.

若注意，由 $\vdash ax \equiv 1(\text{mod } n)$ 及 $\vdash by \equiv 1(\text{mod } n)$可推得 $abx \equiv b(\text{mod } n)$, $\vdash abxy \equiv by(\text{mod } n)$,再得$\vdash (ab)(xy) \equiv 1(\text{mod } n)$, 故得

(19) $\qquad \vdash \text{Prim}(a, n) \& \text{Prim}(b, n) \supset \text{Prim}(a \cdot b, n)$.

我们还要求 Prim(a, b) 的对称性."例外"情形 $b = 0$ 及 $b = 1$ 可借助下三式而处理: $\vdash \text{Prim}(1, a)$, $\vdash \text{Prim}(a, 0) \supset a = 1$, $\vdash \text{Prim}(0, 1)$. 此外

$\vdash b > 1 \& \text{Prim}(a, b) \supset \exists x \exists y(x < b \& y < a \& ax = by + 1)$.

今为∃消起见，设 $x < b \& y < a \& ax = by + 1$;这时 $\exists u \exists v(x + u = b \& y + v = a \& ax = by + 1)$. 为&引及∃消起见，再假设 $x + u = b$, $y + v = a$ 及 $ax = by + 1$. 这时 $ax + au = ab$, $by + bv = ba(= ab)$, $ax + au = by + bv$, $by + 1 + au = by + bv$, $1 + au = bv$. 由此得: $bv \equiv 1(\text{mod } a)$,而∃引便给出 Prim(b, a). 故

(20) $\qquad \vdash \text{Prim}(a, b) \supset \text{Prim}(b, a)$,

由此得$\vdash \text{Prim}(a,b) \supset \exists x(ax \equiv 1(\text{mod } b)) \& \exists x(bx \equiv 1(\text{mod } a))$. 若注意 $\vdash ar \equiv 1(\text{mod } b) \& bs \equiv 1(\text{mod } a) \supset arq + bsk \equiv q(\text{mod } b) \& arq + bsk \equiv k(\text{mod } a)$, 便得

(21) $\qquad \vdash \text{Prim}(a, b) \supset \exists x(x \equiv k(\text{mod } a) \& x \equiv q(\text{mod } b))$.

以后的一个定义("最小公倍数")是:

$$m(a, b) = \mu x(x \neq 0 \& a|x \& b|x).$$

(22) $\quad m_x(t(x); r) = \mu x(x \neq 0 \& \forall y(y < r \supset t(y)|x))$

(作为(4)中的项 s 可分别取 ab 及 $\prod_{y<r} t(y)$; (1) 可借助于 *159, §29 附注(1b)及 *151 而证得). 就 n 而作归纳可证得(参见 *129, *66 及 *56a 及 *13): $\vdash \forall y(y < n \supset t(y) \neq 0 \supset \prod_{y<n} t(y) \neq 0$, 其次再借助于断言 $\vdash \forall y\ (y < n \supset t\ (y)| \prod_{y<n} t(y))$ (这可就 n 而作归纳并借助于 *152, *154 而得证)便得,

$$\vdash \forall y(y < n \supset t(y) \neq 0) \supset \exists x(x \neq 0 \& \forall y(y < n \supset t(y)|x)).$$

这公式表示了, $y < n$ 时 $t(y)(\neq 0)$ 的最小公倍数之存在. $y < n$ 时 $t(y)$ 的任一公倍数被它的最小公倍数 $m_x(t(x); n)$ 除后所得的剩余, 依据(22), 应为 $y < n$ 时 $t(y)$ 的公倍数, 但它既小于 $m_x(t(x); n)$ 故应为 0. 由(5)及(14)得

(23) $\quad \vdash \forall y(y < n \supset t(y)|a) \supset m_x(t(x); n)|a.$

此外有

(24) $\quad \vdash \forall y(y < n \supset t(y) \neq 0) \supset m_x(t(x); n) \neq 0,$

(25) $\quad \vdash \forall y(y < n \supset t(y)|m_x(t(x); n)),$

(26) $\vdash b \equiv c(\text{mod } m_x)t(x); a')) \supset \forall y(y \leqslant a \supset b \equiv c(\text{mod } t(y))).$

由(19)再就 n 而作归纳得: $\vdash \forall x(x < n \supset \text{Prim}(t(x), a)) \supset \text{Prim}\left(\prod_{x<n} t(x), a\right)$ 然后由(23)及(17)得

(27) $\quad \vdash \forall x(x < n \supset \text{Prim}(t(x), a)) \supset \text{Prim}(m_x(t(x); n), a).$

*66 给出(把 $x' \cdot k + 1$ 作为 $t(x)$):

(28) $\vdash \forall x(x < n \supset \text{Prim}(x' \cdot k + 1, n' \cdot k + 1)) \supset \text{Prim}(m_x(x' \cdot k + 1; n), n' \cdot k + 1),$

其次有 $\vdash r' + a = n' \supset r' \cdot k + 1 + ak = = n' \cdot k + 1$, 由此得

(29) $\quad \vdash r' + a = n' \supset n' \cdot k + 1 \equiv a \cdot k(\text{mod } r' \cdot k + 1).$

(30) $\quad \vdash \text{Prim}(r' \cdot k + 1, k),$

(31) $\quad \vdash \text{Prim}(k, r' \cdot k + 1)$ (由(30)及(20)),

(32) $\vdash a|k \supset \text{Prim}(a, r' \cdot k + 1)$ (由(31),(17))。

由(31)(32)及(29)可得 $\vdash a|k \supset \text{Prim}(ak, r' \cdot k + 1)$。其次，由(29)及(19)得 $\vdash a|k \& r' + a = n' \supset \text{Prim}(n' \cdot k + 1, r' \cdot k + 1)$,而(20)给出：$\vdash a|k \& r' + a = n' \supset \text{Prim}(r' \cdot k + 1, n' \cdot k + 1)$,由此得

(33) $\vdash \exists x(x|k \& r' + x = n') \supset \text{Prim}(r' \cdot k + 1, n' \cdot k + 1)$。

容易看见:

(34) $\vdash \forall x(x < n \supset x'|k) \supset (r < n \supset \exists x(x|k \& r' + x = n'))$。

(33)及(34)给出:

$\vdash \forall x(x < n \supset x'|k) \supset \forall x(x < n \supset \text{Prim}(x' \cdot k + 1, n' \cdot k + 1))$,

由此再借助于(27)得

(35) $\vdash \forall x(x < n \supset x'|k) \supset \text{Prim}(m_x(x' \cdot k + 1; n), n' \cdot k + 1)$。

在(35)中把 n 代以 a',再借助于下列两结果及 *154,

$$\vdash r < a' \& a < n \supset r < n', \quad \vdash r < n' \supset r'|m_x(x'; n')$$

便得

(36) $\vdash m_x(x'; n')|k \& a < n \supset \text{Prim}(m_x(x' \cdot k + 1; a'), a'' \cdot k + 1)$。

由(21)作代入得

(37) $\vdash \text{Prim}(m_x(x' \cdot k + 1; a'), a'' \cdot k + 1) \supset \exists z[z \equiv c(\text{mod } m_x(x' \cdot k + 1; a')) \& z \equiv \rho(m, a'' \cdot q + 1)(\text{mod } a'' \cdot k + 1)]$。

若对(26)作代入(依 *66)再用(9),便得公式

(38) $\vdash \{\forall y[y \leqslant a \supset c \equiv \rho(m, y' \cdot q + 1)(\text{mod } y' \cdot k + 1)] \& b \equiv c(\text{mod } m_x(x' \cdot k + 1; a')) \& b \equiv \rho(m, a'' \cdot q + 1)(\text{mod } a'' \cdot k + 1)\} \supset \forall y[y \leqslant a' \supset b \equiv \rho(m, y' \cdot q + 1) \text{mod}(y' \cdot k + 1)]$。

由(36)(37)(38)可得

(39) $\vdash m_x(x'; n')|k \& a < n \supset \{\exists x \forall y[y \leqslant a \supset x \equiv \rho(m, y' \cdot q + 1)(\text{mod } y' \cdot k + 1)] \supset \exists x \forall y[y \leqslant a' \supset x \equiv \rho(m, y' \cdot q + 1)(\text{mod } y' \cdot k + 1)]\}$。

借助于(39)就 a 而作归纳可证得:

(40) $\vdash m_x(x'; n')|k \& a \leqslant n \supset \exists x \forall y[y \leqslant a \supset x \equiv \rho(m, y' \cdot q$

$+1)(\mathrm{mod}\ y'\cdot k+1)]$.

在(40)中把 a 代以 n,并在前提中删去 $n\leqslant n$,可得:

(41) $\vdash m_x(x';n')|k\supset\exists x\forall y[y\leqslant n\supset x\equiv\rho(m,y'\cdot q+1)(\mathrm{mod}\ y'\cdot k+1)]$.

若在(35)中把 n 代以 n',并利用下列公式 $\vdash r<n'\supset r'|m_x(x';n')$ 及 $\vdash r'|m_x(x';n')\&m_x(x';n')|k\supset r'|k$,可得

(42) $\vdash m_x(x';n')|k\supset \mathrm{Prim}(m_x(x'\cdot k+1;n'),n''\cdot k+1)$.

由这公式再借助于(41),(9)及由(21)(26)作代入而得的公式,我们便得

(43) $\vdash m_x(x';n')|k\supset\exists x\{\forall y[y\leqslant n\supset x\equiv\rho(m,y'\cdot q+1)(\mathrm{mod}\ y'\cdot k+1)]\&x\equiv w(\mathrm{mod}\ n''\cdot k+1)\}$.

若在(13)中把 b 代以 $c'\cdot k+1$,并注意 $\vdash k<c'\cdot k+1$,可得

(44) $\vdash a\equiv r(\mathrm{mod}\ c'\cdot k+1)\&r\leqslant k\supset r=\rho(a,c'\cdot k+1)$.

注意,若就 n 而作归纳,则由 *143a 可得

(45) $\vdash\forall y(y\leqslant n'\supset\rho(m,y'\cdot q+1)\leqslant\prod_{x<n'}(\rho(m,x'\cdot q+1))')$.

由(43)(44)(45)可得

(46) $\vdash m_x(x';n')|k\&\prod_{x<n'}(\rho(m,x'\cdot q+1))'\leqslant k\&w\leqslant k\supset\exists x[\forall y(y\leqslant n\supset\rho(x,y'\cdot k+1)=\rho(m,y'\cdot q+1)\&\rho(x,n''\cdot k+1)=w]$.

此外有

(47) $\vdash\exists u(m_x(x';n')|u\&\prod_{x<n'}(\rho(m,x'\cdot q+1))'\leqslant u\&w\leqslant u)$.

最后由(46)(47)可得

$$\vdash\exists u\exists x[\forall y(y\leqslant n\supset\rho(x,y''\cdot u+1)=\rho(m,y'\cdot q+1))\&\rho(x,n''\cdot u+1)=w],$$

由此,再借助于项 $\rho(s,t)$ 的定义,可就系统 $S_1$ 而得论断 ($\beta$)。若应用定理 42 以消除含 $\iota$ 的项以及含 $\mu$ 的项,我们便(直觉主义地)就原来的形式系统 $S$ 而得到论断 ($\beta$) 的证明。

# 附录 III　在定理 36 证明中由 (iv) 转到 (v) 的过程的形式体系化

为了把由 (iv) 到 (v) 的过程作形式体系化，只须把相应的内容议论引到公理化的广义算术中便成了.（为此，利用哈森耶格-汉金的简化是有益的，见第 430 页脚注，然后再把它形式体系化于自然数的形式数论 $S$ 内.）

注意，一般说来，每一个内容的议论都可以经受这种形式体系化，只要其中所使用的定义在附录 I 的系统 $W$ 中是容许的(还可以增加一些新公设，只要在由 $W$ 到 $S$ 的映象中它们变成 $S$ 的可证公式)，还须在证明中没有一处含有超出元数学范围的推演，例如依靠于元数学范围内的(§15 末)或依靠集合论的议论的. 因此我们必须把引理 22 的证明作出映象. 检查它以后，可以看见它并未含有任何推演，超出具有排中律的元数学的范围，至少如果它的所有定义是可容许的话. 事实上，每个集 $\mathbf{F}_i$ 都可以换为相应于它的固定谓词 $\mathfrak{F}_i$. 至于这些谓词的可定义性，则由引理 22 的证明可见，总有一些方法把每个 $\mathfrak{F}_{i+1}$ 的定义化归到关系式 $\mathbf{F}_i \vdash \mathrm{A}$ 去，这关系式可记为 $\mathfrak{F}(i, \mathrm{A})$. 因此只须在系统 $W$ 内加入用以定义关系式 $\mathfrak{F}(i, \mathrm{A})$ 的模式便够了；剩下的议论部分如要转到系统 $W$ 去亦没有任何困难[1]. 但由定理35的证明可见，满足相应的 $\mathfrak{F}(i, \mathrm{A})$ 的数论谓词 $F(i, a)$ 是算术的，因此在 $S$ 内是可判定的(比较 §74 例 8).

定理 36 对具相等性的谓词演算言亦是成立的；这时公式 $\mathrm{F}^*$ 可由 $\mathrm{F}^{\mathrm{Q}}$ (第 442 页)依下法而得，每一部分 $\mathrm{P}_j(\mathrm{a}_1, \cdots, \mathrm{a}_{n_j})$ (其中包括有 Q 的部分) 都换为公式 $\exists x \forall y \mathrm{R}_j\ (\mathrm{a}_1, \cdots, \mathrm{a}_{n_j}, \mathrm{x}, \mathrm{y})$，并

1) 就所给的 F 言，在引理 22 的证明之末处所要求的真值只限于具有有限多个逻辑运算子的公式. 比较第 555 页的脚注(1)——俄译注.

把每个变元 w 依 §74 例 13 的方法换为 $\bar{w}$，即每个形如 $\forall wB(w)$ 的部分换为 $\forall w(M(w) \supset B(w))$ 简写为 $\forall \bar{w}B(\bar{w})$，而每个形如 $\exists wB(w)$ 的部分换为 $\exists w(M(w) \& B(w))$（简写为 $\exists \bar{w}B(\bar{w})$），这里依定义，$M(w) \sim \exists y\,(Q(y, w) \& \forall z(z < w \supset \neg Q(y, z)))$（比较 §74 例 1），而 $Q(a, b)$ 则如 §73 引理 24 那样.（这样每个自由变元 w 都相应地附加 $(M(w)) \supset$ 于全公式之前，而该公式则括于括号之内.）因此在这情形之下，形式体系化便给出

$$\vdash \forall yD(y) \supset F^*,$$

这里 $\forall yD(y)$ 表示公式 F 的不可驳性.

# 附录IV §79例2中公式的构成

今根据希尔伯特-伯尔奈斯[1934],第360—366页,而写出该化归过程,即由A到B而具有性质(1)—(4)的. 建议读者核验,在化归的每一步骤中,每一公式都变成它在$S$内的一个等价式.

在下面,字母p, q, $\cdots$, u表示随便的项.

首先,对每个数$k$我们引进显式定义 $t\cdot k = \overbrace{(t+t)+\cdots+t}^{k个}$,又$t\cdot 0 = 0$,又当$k\neq 0$, 1时: $s\equiv t(\mathrm{mod}\ \mathbf{k}) \sim \exists x(s = t + x\cdot \mathbf{k} \vee t = s + x\cdot \mathbf{k})$. 在系统$S$内可对每个$n$[1]而证下公式(就x作归纳): $x\equiv 0(\mathrm{mod}\ \mathbf{n}) \vee \cdots \vee x\equiv \mathbf{n}-1(\mathrm{mod}\ \mathbf{n})$($\mathbf{n}-1$ 为相应于$n-1$的数字). (这事实对于核验下文的关于可比较性的断言演了重要的作用;关于不等式的断言也可用常法考虑,因为需要的东西都在这系统之内.) 此外, $s<t \sim \exists c(c'+s=t)$. 这些记号($s\cdot\mathbf{k}$, $s\equiv t((\mathrm{mod}\ \mathbf{k})$ 及 $s<k$),我们作为是包含在系统$S$之内的. 凡是形如$\forall xC(x)$的部分A都换为$\neg\exists x\neg C(x)$. 然后借助于下列的关于表达式C(x)的变换过程而从内到外地把$\exists xC(x)$形的部分消除(不改变自由变元及约束变元的写法).

(a) 把公式变成析取范式,由等式,不等式及同余式组成,并处处作下列的改换, $s=t$ 改为 $s<t'\&t<s'$, $s\neq t$ 改为$s<t\vee t<s$, $\neg s<t$ 改为$t<s'$ 而 $\neg s\equiv t(\mathrm{mod}\ \mathbf{k})$改为 $s\equiv t+1(\mathrm{mod}\ \mathbf{k}) \vee\cdots\vee s\equiv t+(\mathbf{k}-1)(\mathrm{mod}\ \mathbf{k})$($\mathbf{k}-1$ 为相应于$k-1$的数字). 如果析取范式被破坏了,再恢复成析取范式,这时它的每一项都是不等式及同余式的合取.

(b) 凡在不等式或同余式一端所出现的表达式都变成 $x\cdot$

---

1) 似应加条件"$n>1$",否则上文的(mod$\mathbf{k}$)的定义须除去限制$k\neq 1$——译者注.

$\mathbf{k}+\mathrm{r}$ 或 $\mathrm{x}\cdot\mathbf{k}$ 形，这里 $t$ 不含 x. 为此，把每个表达式 $s^{\overbrace{\prime\cdots\prime}^{k个}}$，这里 s 非数字而 $k\neq 0$，都换为 $\mathrm{s}+\mathbf{k}$，对于含＋号的表达式都应用通常的演算规则. 然后我们力求每个不等式或每个同余式所含的 x 都只在一边，为此我们把不等式 $\mathrm{x}\cdot\mathbf{k}+\mathrm{r}<\mathrm{x}\cdot\mathbf{k}+\mathrm{s}$ 换为 $\mathrm{r}<\mathrm{s}$，把 $\mathrm{x}\cdot\mathbf{k}+\mathrm{r}<\mathrm{x}\cdot\mathbf{l}+\mathrm{s}$ 换为 $\mathrm{r}<\mathrm{x}\cdot\mathbf{p}+\mathrm{s}$，这里 $p=l-k$ $(l\geqslant k)$，又把 $\mathrm{x}\cdot\mathbf{l}+\mathrm{r}<\mathrm{x}\cdot\mathbf{k}+\mathrm{s}$ 换为 $\mathrm{x}\cdot\mathbf{p}+\mathrm{r}<\mathrm{s}$；对同余式仿此；对后者还重新配置两端使 x 移到左端来；这样便留下形为 $\mathrm{x}\cdot\mathbf{p}\equiv\mathrm{s}(\mathrm{mod}\,\mathbf{n})$ 及 $\mathrm{x}\cdot\mathbf{p}+\mathrm{r}\equiv\mathrm{s}(\mathrm{mod}\,\mathbf{n})$ 的同余式. 我们把后面这个同余式变成 $\mathrm{x}\cdot\mathbf{p}\equiv\mathrm{s}+\mathrm{r}(\mathbf{n}-1)(\mathrm{mod}\,\mathbf{n})$ （$\mathbf{n}-1$ 为相应于 $n-1$ 的数字），即变成 $\mathrm{x}\cdot\mathbf{p}\equiv\mathrm{t}(\mathrm{mod}\,\mathbf{n})$ 形的同余式，然后再把这种同余式一律变成

$$(\mathrm{t}\equiv 0(\mathrm{mod}\,\mathbf{n})\&\mathrm{x}\cdot\mathbf{p}\equiv 0(\mathrm{mod}\,\mathbf{n}))\vee(\mathrm{t}\equiv 1(\mathrm{mod}\,\mathbf{n})\&\mathrm{x}\cdot\mathbf{p}\equiv 1(\mathrm{mod}\,\mathbf{n}))\vee\cdots\vee(\mathrm{t}\equiv\mathbf{n}-1(\mathrm{mod}\,\mathbf{n})\&\mathrm{x}\cdot\mathbf{p}\equiv\mathbf{n}-1(\mathrm{mod}\,\mathbf{n})).$$

然后重新再把整个表达式变成析取范式. 它的每一项将是一合取式，合取式各项或不含 x 或形如 $\mathrm{x}\cdot\mathbf{p}+\mathrm{r}<\mathrm{s}$，$\mathrm{r}<\mathrm{x}\cdot\mathbf{p}+\mathrm{s}$，$\mathrm{x}\cdot\mathbf{p}\equiv\mathbf{z}(\mathrm{mod}\mathbf{n})$，这里 $\mathbf{z}$ 为数字 (r, s 可以不是数字).

(c) 对于形如 $\mathrm{x}\cdot\mathbf{p}\equiv\mathbf{z}(\mathrm{mod}\,\mathbf{n})$ ($\mathbf{p}$, $\mathbf{z}$, $\mathbf{n}$ 为数字) 的同余式的合取式，可以用能行的方式决定它可能或不可能，即是否等价于一个形如 $\mathrm{x}\equiv\mathbf{q}\ (\mathrm{mod}\,\mathbf{m})$ 的同余式[1]，在前一情形把该合取式改为 $\mathrm{x}\equiv\mathbf{q}(\mathrm{mod}\,\mathbf{m})$，否则改为 $0<0$.

其次，对于含有 x 的不等式的合取式，都可力求所有它们的含 x 的那一边都具有同一的形状 $\mathrm{x}\cdot\mathbf{p}+\mathrm{k}$. 即联立不等式 $\mathrm{x}\cdot\mathbf{p}_1+\mathrm{r}_1<\mathrm{s}_1$ 及 $\mathrm{x}\cdot\mathbf{p}_2+\mathrm{r}_2<\mathrm{s}_2$ 可以改为

$$\mathrm{x}\cdot(\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_2)+(\mathrm{r}_1\cdot\mathbf{p}_2+\mathrm{r}_2\cdot\mathbf{p}_1)<\mathrm{s}_1\cdot\mathbf{p}_2+\mathrm{r}_2\cdot\mathbf{p}_1,$$

$$\mathrm{x}\cdot(\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_2)+(\mathrm{r}_1\cdot\mathbf{p}_2+\mathrm{r}_2\cdot\mathbf{p}_1)<\mathrm{s}_2\cdot\mathbf{p}_1+\mathrm{r}_1\cdot\mathbf{p}_2,$$

($\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_2$ 为相应于 $\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2$ 的数字)，对联立不等式 $\mathrm{x}\cdot\mathbf{p}_1+\mathrm{r}_1<\mathrm{s}_1$，

---

1) 参见维诺格拉多夫 (Виноградов)；数论基础(1938)第四章§3——俄译注.

$s_2 < x \cdot p_2 + r_2$ 或联立不等式 $s_1 < x \cdot p_1 + r_1$，$s_2 < x \cdot p_2 + r_2$ 也仿此．这样我们可以减少不等式中形如 $x \cdot p + r$ 的一端的不同个数，最后直到其个数变为 1 才止（如果当初 >1 的话）．最后，每一个形如 $x \cdot p + t < s_1 \& \cdots \& x \cdot p + t < s_m$ 的不等式合取式都换为 $m$ 项析取式，其第 $l$ 个析取项为

$$s_l < s_1 + 1 \& s_l < s_2 + 1 \& \cdots \& s_l < s_m + 1 \& x \cdot p + t < s_l,$$

而每一个 $r_1 < x \cdot p + t \& \cdots \& r_n < x \cdot p + t$ 形的合取式都换为 $n$ 项析取式，其第 $l$ 个析取项为

$$r_1 < r_l + 1 \& r_2 < r_l + 1 \& \cdots \& r_n < r_l + 1 \& r_l < x \cdot p + t.$$

然后再恢复析取范式．这公式的每一项最多只在三个合取项中含有 x，即一个具同余式形 $x \equiv q (\mathrm{mod}\ m)$（q 为数字），另两个为下形的不等式 $a < x \cdot p + t$ 及 $x \cdot p + t < b$，而且如果后两者都出现的话，其中的 $x \cdot p + t$ 是一样的．

经过(a)(b)(c)之后，C(x) 便变成了一个析取范式，今对其各项分配 ∃x(*88)，并把没有 x 的合取项拿到 ∃x 之前(*90)．这时 x 只能停留在下表达式之内

(i) $\exists x(x \equiv q (\mathrm{mod}\ m) \& s < x \cdot p + t \& x \cdot p + t < u)$

其中可以缺少一个或两个合取项．

缺少项 $s < x \cdot p + t$ 的情形可以不必考虑，因为 $x \cdot p + t < u$ 可换为 $0 < x \cdot p + t' \& x \cdot p + t' < u'$．如果缺少项 $x \cdot p + t < u$，则把整个表达式换为 $0 < 1$．如果缺少同余式而 $p = 1$，则原式成 $\exists x(s < x + t \& x + t < u)$，可换为 $s' < u \& t < u$．如果缺少同余式而 $p > 1$，则把 $\exists x(s < x \cdot p + t \& x \cdot p + t < u)$ 换为 $\exists x(x \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p) \& s < x + t \& x + t < u)$，我们便得一般情形而 $p = 1$，但上述的一般情形亦可变成这样，因可把 (i) 换为

$$\exists x(x \equiv q \cdot p (\mathrm{mod}\ m \cdot p) \& s < x + t \& x + t < u),$$

然后把 $q \cdot p$，$m \cdot p$ 换为它们的数字值．

因此只须考虑下表达式情形 $\exists x(x \equiv z (\mathrm{mod}\ n) \& s < x + t \& x + t < u)$，这里 z 为数字且 $z < n$，否则可把 $z$ 换为 $rm(z, n)$．这样的表达式都可换为析取式 $(s < t \& t + z < n) \vee T_1 \vee \cdots \vee T_n$，这

里 $T_p$ 为下式的缩写

$$t < s'\&s + \mathbf{p} < u\&s + \mathbf{p} \equiv t + \mathbf{z} (\mathrm{mod}\ \mathbf{n}).$$

这时 x 便被删除了，如想把本来出现于 C(x) 中但在所说的变换中消失了的与 x 不同的变元 a 加以复原，可添入形如 a = a 的合取项.

这样，关于 ∃xC(x) 部分的变形便完毕了；这样便可以逐步(由内而外地)铲除了一切的量词，最后使用它们的显式定义便可以把表达式 $t \cdot \mathbf{k}$, $s \equiv t(\mathrm{mod}\ \mathbf{k})$ 及 $s < t$ 除去，所得的公式便是 B.

# 附录V 等式及不定摹状词的可消除性

我们再导出一些关于可消除性的定理．设S为一谓词公式，可借助于相等性公理而推演出．则S亦可在谓词演算中推演出（希尔伯特-伯尔奈斯[1934]，第381—382页）．

为了证明这点，我们先把所给公式S的证明换为依据定理41(c)而作的证明．其次，在这个证明内，我们把每一个形如$x=y$的素部分都换为$G(x,y)$，$G(x,y)$如下得到：把形如$P(a_1,\cdots,a_{i-1},x,a_{i+1},\cdots,a_n)\sim P(a_1,\cdots,a_{i-1},y,a_{i+1},\cdots,a_n)$的一切公式（它是就S内一切素成分的各变目处而作出的）作成合取式，就x与y以外的一切变元而应用∀引．这时公式S没有更改而定理41(c)内的公式$Eq(=,P_1,\cdots,P_s)$变成一个在谓词演算内的可证公式，——同时，证明的前后连系性没有改变．

（对具谓词变元的谓词演算言还必须有一些补充步骤，以便在这议论的开始时把这些变元换为新的常谓词符号，在结束时再换回来）．

关于等式及摹状词的可消除性的进一步结果，可见于海尔普林（Hailperin）[1954]．

今考虑随便一系统$S$的扩张系统$S_\varepsilon$，它由加入形如$\varepsilon xA(x)$的项及"ε公理" $A(t)\supset A(\varepsilon xA(x))$而得，这里t对于$A(x)$中的x是自由的（又在保持相合性的情形下可用约束变元的改名规则）．对古典系统言，这样的项及公理的使用可代替量词的使用，如果利用§23的代入规则的话．事实上，如果不引入量词而只引入上述的项及公理，然后把∃作为缩写而引入，即$\exists xA(x)$为$A(\varepsilon xA(x))$的缩写，那末每一个根据模式11的公理都变成一个ε公理，而公设12的应用便化归为代入规则的应用．若引用*84于公理中，则量词∀亦可引入；这时$\forall xA(x)$将是一公式，等价于$\neg\neg A(\varepsilon x$

$\neg A(x)$),后者又等价于 $A(\varepsilon x \neg A(x))$.

(A) 设F为古典形式系统 $S$ 内的随便一个公式,而F在 $S_\varepsilon$ 内可证,则F在 $S$ 内亦可证. 在特例,如果 $S$ 是相容的,则 $S_\varepsilon$ 亦然. (希尔伯特-伯尔奈斯[1939],第18页及第138—140页).

证明. 只须证明断言的后半便够了. 在这以后,前半便可如下证明,(不丧失普遍性可设F为闭的)把系统 $S$ 改为把 $\neg F$ 作为新公理加到 $S$ 去后而得的新系统. 换句话说,我们只就F为具有哥德尔数 $r$ 的形如 $A \& \neg A$ 的公式而证明定理前半便够了.

今设C为系统 $S$ 的各公理的闭色的合取式,当在 $S_\varepsilon$ 内而证明F时这些公理是用到的;$wid_C$ 为一个数论公式,表示把C作为公理加入到谓词演算后得到的系统的相容性. 所谓"谓词演算"可理解为纯谓词演算亦可理解为具相等性的谓词演算. 对纯谓词演算言由定理36,对具相等性的谓词演算言则由附录III,可得

(p) $$\vdash wid_C \supset C^*,$$

这里公式 $C^*$ 由C依定理36的证明中所说的方法(或依附录III的方法)而得.

今设 $C \vdash_\varepsilon F$ (记号 $\vdash_\varepsilon$ 表示在 $S_\varepsilon$ 内的可推演性); 根据推演定理,这时便有 $\vdash_\varepsilon C \supset F$. 今在这证明中作出由C而得 $C^*$ 的一切改变,此外并把所有的 $\varepsilon$ 均改为 $\mu$,这样便得到在借助于 $\mu$ 符号的算术中关于公式 $C^* \supset F^*$ 的推演(参见附录II)(这时 $\varepsilon$ 公理便变成由公式 $(\mu_1)$ (第599页)作代入(*66)而得的公式);而 $F^*$ 便是形如 $B \& \neg B$ 的某一公式. 我们仍然把符号 $\mu$ 消除,然后再用*12及*50便得到公式 $\neg C^*$ 在算术中的推演. 由(p)给出(借助于*12)(在算术中)

(q) $$\vdash \neg wid_C.$$

可把 $wid_C$ 作为公式 $\neg \exists x B(x, \mathbf{r})$,而 $r$ 为系统 $S$ 内形如 $A \& \neg A$ 的一个固定公式的哥德尔数(比较附录I). 这时在古典系统内,由(q)给出

(r) $$\vdash \exists x B(x, \mathbf{r}).$$

($B(m, n)$ 数字地表示谓词: "$m$ 为在系统 $S$ 内具哥德尔数 $n$ 的公

式的证明的哥德尔数".)由于这谓词的一般递归性(§55)以及诺维科夫的结果(附录 VII),(r)亦是可以直觉主义地证明的(虽则不是初等地),即,可以能行地说出一数 $k$,使得在算术中有

(s) $$\vdash B(\mathbf{k}, \mathbf{r}).$$

因此,由 $k$ 可以恢复一个具哥德尔数 $k$ 的证明,由它可以从公式 C 而推出形为 A&¬A 的矛盾公式,这亦是在系统 $S$ 内的 A&¬A 的证明.

故由 $S$ 的相容性可以推出 $S_\varepsilon$ 的相容性,从而论断(A)证明了("第二 ε 定理",希尔柏特-伯尔奈斯[1939],第 131—140 页). 这结果可用下公式表示

(t) $$\mathrm{wid}_s \supset \mathrm{wid}_{s_\varepsilon},$$

这里 $\mathrm{wid}_s$ 及 $\mathrm{wid}_{s_\varepsilon}$ 是 $\neg\exists x B^0(x, \mathbf{r})$ 形(关于○参见 §81). 这个证明不是初等直觉主义的证明,但如果把它算术化,则可以在古典算术内,由 *86 及定理 60(c) 还可在直觉主义算术内得出公式(t)的推演.

注意,在加入 ε 符号及 ε 公理后,定理 41 已失去效力,例如,若不借助于公理模式 13 及 23,等式 $\varepsilon x(x \neq 0 + 0) = \varepsilon x(x \neq 0)$ 是不可推演的,虽则借助于模式 23 后不用公设 13 它亦可推演;这可由下列的形式体系的相容性而推出: 在没有公设 13 的算术中加入 ε 符号,ε 公理及两公理 $\varepsilon x(x \neq 0) = 1$ 及 $\varepsilon x(x \neq 0+0) = 2$ 而得的系统. (这个相容性可借助于类似定理 51(b) 的某些定理而证明(希尔柏特-伯尔奈斯 [1939],第 60—61 页 脚注)). 由 $\mathrm{pd}(\boldsymbol{a})$ 的递归方程可以推出(参见 §45 #5) $\neg\boldsymbol{a} = 0 \supset (\mathrm{pd}(\boldsymbol{a}))' = \boldsymbol{a}$[1],因而 ε 公式容许把归纳模式换为下模式 $A(a) \supset \neg\varepsilon x A(x) = a'$(希尔柏特-伯尔奈斯[1939],第 85—87 页)

希尔柏特-伯尔奈斯的第一 ε 公理是,设一形式体系由把没有变谓词的公理("真正公理"),ε 符号及 ε 公理加入到具有代入规则假设的谓词演算而得,该体系的公理全不具有约束变元,再设公

1) 这里我们合并本书第三部分的内容算术方面的记号及第四章的形式体系的记号,这不应该引起误会,因为这里所讨论的是一个确定的形式体系——俄译注.

式F亦不含约束变元. 如果F在该形式体系内可证，则不用约束变元亦可证.

这定理亦可推演至下情形，即F呈$\exists x_1\cdots\exists x_r A$形而A不含约束变元；如果在上述的形式体系内F可证，则在该形式体系内有一个关于某析取式$A_1\vee\cdots\vee A_s$的不用约束变元的证明，这里每一个公式$A_i(i=1,\cdots,s)$都是在A中把$x_1,\cdots,x_r$代入以一些不具ε符号的项$t_1^i,\cdots,t_r^i$而得. 第一ε公理及其推广对具相等性的谓词演算亦是成立的(希尔柏特-伯尔奈斯[1939]，第18页，第32页，第79—80页).

由于有了第二ε公理，所以关于第一ε公理及其推广的证明只须就下列情形考虑便够了，在所给的F的证明中，ε符号并不出现，设A为各公理的合取式，在推演F时用到的，则在谓词演算中F可由$\forall A$推演出，而且所有变元都是固定不变的：根据定理46在$G1$内将推演出$\forall A\to F$. 由定理50及定理47的系，F或者上述的某个析取式(如果讨论第一ε定理的推广的话)便可无需用到约束变元而由下列的公式推演出，把项代入公理后所得的公式，亦即可由公理推演出，如果我们考虑的是具有代入规则假设的谓词演算的话.

如果考虑具有相等性的谓词演算，则还需应用定理41(c)(公式$Eq(=,P_1,\cdots,P_s)$不含有约束变元).

# 附录 VI 把直到小于 $\varepsilon_0$ 的序数的归纳法形式体系化于第四章的系统内

(依希尔柏特-伯尔奈斯[1939],第 361—366 页).

设 $\tau_n$ 为数 $\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}$ ($n$ 个). 这时直到 $\tau_n$ 的归纳可借助于对自然数的排序 $\prec_n$ 而化归为通常的归纳,$\prec_n$ 可依下法而递归地定义:

$$a \prec_0 b \equiv a < b;\ a \prec_{n+1} b \equiv b \neq 0 \& [a = 0 \vee (El)[(a)_l < (b)_l \& (k)(k \prec_n l \rightarrow (a)_k = (b)_k)]]$$

(参见 §45#19). 这里我们使用 §38 的内容上的叙述,并且相应于§74定理42而在第四章的系统内引入固定符号 $(\boldsymbol{a})\boldsymbol{x}$, $\mathrm{p}\boldsymbol{x}$,又引入谓词符号

$$\boldsymbol{a} | \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a} \prec_n \boldsymbol{b} (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

每个 $\prec_n$ 都依 $\tau_{n+1}$ 型而把自然数列排序,这可借助于函数 $\zeta_n(k)$ 而证明,后者可用下方式而递归地定义:$\zeta_0(k)=k$;$\zeta_{n+1}(0)=0$, $\zeta_{n+1}(2^t)=t+1$, $\zeta_n(p_{i_1}\cdots p_{i_s}) = \omega^{\zeta_n(i_1)} + \cdots + \omega^{\zeta_n(i_s)}$,这里 $i_{m+1} \sqsupseteq i_m (m = 1, \cdots, s-1)$.(希尔柏特-伯尔奈斯把 $<\varepsilon_0$ 的序数看作形式表达式——“0-$\omega$ 图式”,由“+”及 0 与 $\omega$ 的符号乘幂组成,例如 $3 = \omega^0+\omega^0+\omega^0$. 这时序数的比较便从 0-$\omega$ 图式及其部分的考虑而获得有穷性意义. $\varepsilon_0$ 是第一个不能表成 0-$\omega$ 图式的序数.)

今作出一计划,由它可以把论断 *162b$^n$ 的证明恢复,后者是在 *162b 中把 $<$ 换为 $\prec_n$ 而得的. *162b$^0$ 便是 *162b. 设 *162b$^n$ 已证. 今将证明 *162b$^{n+1}$. 设以 $D^{n+1}_{A(\cdot)}(\boldsymbol{a})$ 表示 $\forall \boldsymbol{y}(\boldsymbol{y} \prec_{n+1} \boldsymbol{a} \supset A(\boldsymbol{y}))$;今设 $\forall x(D^{n+1}_{A(\cdot)}(x) \supset A(x))$而证 $A(x)$,且 x 保持固定. 命 $C_n(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ 表示 $\forall x[x < \boldsymbol{a} \& (\boldsymbol{a})_x \neq 0 \& x \neq \boldsymbol{b} \supset \boldsymbol{b} \prec_n x] \& \boldsymbol{a} \neq 0$,而 $B(\boldsymbol{b})$ 表示 $\forall x[C_n(x, \boldsymbol{b}) \& D^{n+1}_{A(\cdot)}(x)) \supset D^{n+1}_{A(\cdot)}(x \cdot p_{\boldsymbol{b}}))]$. 首先我们证

下述引理

$$\forall \boldsymbol{k}[p_k|\boldsymbol{q}\supset B(\boldsymbol{k})]\&D^{n+1}_{A(\cdot)}(\boldsymbol{a})\&\forall \boldsymbol{l}\neg[p_l|\boldsymbol{a}\&\exists \boldsymbol{m}(\boldsymbol{l} \prec_n \boldsymbol{m}\&p_m|\boldsymbol{q})]\supset D^{n+1}_{A(\cdot)}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{q}).$$

这引理可借助于把 $\boldsymbol{q}$ 的质因子依 $\prec_{n+1}$ 的排序由大而小地逐次加到 $\boldsymbol{a}$ 去而证明;再就数 $t=\sum_{x\leqslant a}(a)_x$ 而形式归纳. 当 $\boldsymbol{a}=1$ 时由引理得 $\vdash\forall xB(x)\supset\forall xA(x)$, 因此我们在排序 $\prec_n$ 中就 x 作归纳以证 $\forall xB(x)$ 或 $B(x)$. $B(0)$ 表示 $D^{n+1}_{A(\cdot)}(\boldsymbol{a})\supset D^{n+1}_{A(\cdot)}(2\boldsymbol{a})$,但在 $\prec_{n+1}$ 中 $2a$ 直接跟着 $a$, 故得证. 今设 $\boldsymbol{b}\neq 0\&\forall x[x\prec_n\boldsymbol{b}\supset B(x)]$. 今证 $B(\boldsymbol{b})$ (而 $\boldsymbol{b}$ 固定). 为此,设 $\boldsymbol{a}\neq 0\&\forall \boldsymbol{c}[\boldsymbol{c}\prec_n\boldsymbol{b}\supset\neg(p_c|\boldsymbol{a})]\&D^{n+1}_{A(\cdot)}(\boldsymbol{a})$. 今证 $D^{n+1}_{A(\cdot)}(\boldsymbol{a}\cdot p_b)$ 即 $\boldsymbol{d}\prec_{n+1}\boldsymbol{a}\cdot p_b\supset A(\boldsymbol{d})$. 设 $\boldsymbol{d}\prec_{n+1}\boldsymbol{a}\cdot p_b$. 这时 $D^{n+1}_{A(\cdot)}(\boldsymbol{a})$, $\boldsymbol{d}\sqsupseteq_{n+1}\boldsymbol{a}\vdash A(\boldsymbol{d})$. $D^{n+1}_{A(\cdot)}(\boldsymbol{a})$, $\boldsymbol{a}\prec_{n+1}\boldsymbol{d}\vdash\exists\boldsymbol{q}(\boldsymbol{q}>1\&\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{q}\&\forall\boldsymbol{c}(p_c|\boldsymbol{q}\supset\boldsymbol{c}\prec_n\boldsymbol{b}))$. 对这个 $\boldsymbol{q}$ 引用引理便得 $A(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{q})$ 即 $A(\boldsymbol{d})$.

# 附录 VII 用直到 $\varepsilon_0$ 的归纳而作的古典算术相容性的证明(舒提). 诺维科夫的结果

为了证明著者在 §79 末所表述的一系列的结果，并使得在许多情形下有根据可以由古典证明转到直觉主义的证明，我们现在描述坚钦型算术 $G_1$. 此外，我们证明，对这系统言，类似于本书定理 48 及 50 的定理是成立的(在下文所表述的条件下).

所谓 $H$ (型古典算术)系统是指第四章的系统，但消除了函数符号 + 及 · ，如 §74 例 11a 那样. 这系统的项是变元，带有短竖的变元(按指 $a_{11}$ 等——译者)及数字.

此外，根据读者的愿望可把 $H$ 看作含有其它谓词符号，并且对于每个这样的符号 $F(x_1, \cdots, x_k)$ 及每个 $n_1, \cdots, n_k$，下列的断言都直觉主义地成立 $\vdash F(\mathbf{n}_1, \cdots, \mathbf{n}_k) \vee \neg F(\mathbf{n}_1, \cdots, \mathbf{n}_k)$; 这意思是说，公式 $F(\mathbf{n}_1, \cdots, \mathbf{n}_k)$ 与 $\neg F(\mathbf{n}_1, \cdots, \mathbf{n}_k)$ 中有一是真的，而另一是假的，并且有方法以辨别这两公式的真假性.

如在 §77 中，我们用这系统的公式以组成叙列，作为公理我们附加形如 $\rightarrow F$ 的叙列，这里 F 是系统 $H$ 中的素闭真公式，及形如 $G \rightarrow$ 的叙列，这里 G 是系统 $H$ 中的素闭假公式. 这些公理 $\rightarrow F$ 及 $G \rightarrow$ 叫做算术公理.

作为(谓词中逻辑)推演规则 §77 我们加入下列的无穷归纳规则("卡纳普规则"):

$$(C) \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A(0) \quad \Gamma \rightarrow \Theta, A(1) \cdots \quad \Gamma \rightarrow \Theta, A(\mathbf{n}) \cdots}{\Gamma \rightarrow \Theta, \forall x A(x).}$$

(直觉主义地每一次使用这个规则时，它的前提的证明都应该是可能行枚举的，即应该有一算法，对每一数 $n$ 都给出一个关于前提 $\Gamma \rightarrow \Theta, A(\mathbf{n})$ 的证明. 哥德尔编号的使用(参见 §§52,58) 可以使得每一次规则 (C) 的这样的应用看作是有穷性的客体.)对细弱

的几次连续使用，我们将认为是规则"弱"的一次应用。

系统 $G1$ 内的证明可以写作树枝形；每一个推演的应用都(从下面起)连结这推演的结论到它的前提的证明的各枝去，而这样一来便组成了证明的各支. 这论断的证明可以归纳地由前提的证明而推到结论的证明；但是对我们很为重要的那种情况，不用这种归纳也行。

在随便一个证明中对每一个叙列我们都给以一个序数，叫做这叙列的高度[1]. 对公理给以高度 1，对每一个推论规则(短、换规则除外) 的结论，则给以大于各前提的序数的最小序数为高度. 短、换规则的结论则和其前提给以同样的高度. 一证明的高度指它的尾叙列的高度.

公式的次数指在其中出现的逻辑符号 ($\supset$, &, $\vee$, $\neg$, $\forall$, $\exists$) 的个数. 分割的次数是其中分割公式 C 的次数.

一证明的次数是指这证明中各分割的次数的最大者(或者，如果这最大次数不存在的话，则指其极限)；如果一证明不含有分割，则其次数为 0.

对这系统言，引理 36 是成立的，并且在任何情形下均可认为，该引理的应用不会增大证明的高度.

在每个推演的前提内的叙列 $\Gamma$ 或 $\Theta$，其中公式的每一个出现都相应于该公式在推演的结论内的一个出现 (同样算在 $\Gamma$ 或 $\Theta$ 内)；我们说，这些出现是彼此相应的. 此外我们把在模式中写为 $C$ 的那些公式出现，在推演的前提中及结论中的亦叫做彼此相应的. 这个关系延伸以至于超穷.

在证明中出现的随便一个公式，它的各次出现的总集叫做由这个 A 的出现而贯通的公式捆. 在每一支中每一捆只可能有有限多个出现.

公式 A 在捆中的上面出现(或简称这捆的上面公式)是指这公式在一叙列的出现而不相应于在该叙列的前提中公式 A 的任何出

1) 在树枝上，在上面的叙列其高度减小——俄译注.

现(在特例,在公理中的出现便是).

今证,对于系统$H$的每一定理E,在$G1$中均有$\vdash \rightarrow \forall$E.

设E为系统$H$中下列公理或公式之一:公理14—17或公式$+(\boldsymbol{a},0,\boldsymbol{a})$,$+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}',\boldsymbol{d})\&+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\supset \boldsymbol{d}=\boldsymbol{c}'$,$\cdot(\boldsymbol{a},0,0)$或$\cdot(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}',\boldsymbol{c})\&\cdot(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d})\supset +(\boldsymbol{d},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})$,而$E^0$则是把E中一切变元代以数字而得.(所写的四个公式乃把$H$中公理18—21换写而得.)这时在$G1$中便有$\vdash \rightarrow E^0$.(例如,对公理16言,$\rightarrow E^0$可如下得到,由形为$\mathbf{k}=\mathbf{l}$, $\mathbf{k}=\mathbf{m}\rightarrow \mathbf{l}=\mathbf{m}$的叙列两次使用$\rightarrow\supset$,而该叙列则由算术公理经细弱而得.)再用规则(c)便得出$\vdash \rightarrow \forall$E.

设E或B(x)为公式$A(0)\&\forall x(A(x)\supset A(x'))\supset A(x)$(公理13).这时$A(0)\&\forall x(A(x)\supset A(x'))$, $A(x)\vdash A(x')$,而x保持固定且无需用到算术公理.若用定理46便知道,在$G1$内有$A(0)\&\forall x(A(x)\supset A(x'))$, $A(x)\rightarrow A(x')$,故由引理36,对随便一数字$\mathbf{n}$均有$A(0)\&\forall x(A(x)\supset A(x'))$, $A(\mathbf{n})\rightarrow A(\mathbf{n}')$.今对于每个$n$都可以由$A(0)\&\forall x(A(x)\supset A(x'))\rightarrow A(0)$(定理46中情形4a)并应用$n$次分割而得证$A(0)\&\forall x(A(x)\supset A(x'))\rightarrow A(\mathbf{n})$.由规则(c)便得$\vdash A(0)\&\forall x(A(x)\supset A(x'))\supset \forall xA(x)$,再由$\rightarrow\supset$得$\vdash\rightarrow A(0)\&\forall x(A(x)\supset A(x'))\supset\forall xA(x)$,这便等于是$\vdash\rightarrow\forall$E(参见*95及定理46,47).

由此推得,对系统$H$的每一公理E言,在$G1$内均有$\vdash\rightarrow\forall$E.由定理46及分割,对系统$H$的每一条定理言亦有同样的结果;这时所得的$G1$内的证明其次数是有穷的.由前面的考虑还可把$\rightarrow\forall$E的证明写成树枝形.这里只用到在系统$H$中由推演的前提到其结果的归纳;这个归纳可化归为通常的归纳.

今把系统$G1$内的证明写成特殊的形状.首先在每个证明中把符号$\supset$,$\vee$及$\exists$消除,为此我们使用等价式*58,*56及*83.相应于这些符号的推演规则便是冗余的,因此我们把它们省去(参见第493页脚注).

规则(C)及引理36使得当对不含自由变元的任一叙列作证明时可以消除自由变元的使用.(这时$\rightarrow\forall$可换以规则(C)).

现在还可以消除C → C形的公理；事实上对闭公式C而言，每一个这样的公理都可以借助于下列的规则而证出，这规则相应于构造C时所使用的最后的符号，但须假定对具有较少次数的公式C′而言本论断是成立的。(例如，如果对一切$n$均有$\vdash F(\mathbf{n}) \to F(\mathbf{n})$，则$\forall \to$对每个$n$都给出$\vdash \forall xF(x) \to F(\mathbf{n})$，其次再应用规则(C)便得$\vdash \forall xF(x) \to \forall xF(x)$[1].

因此今后我们认为，系统$G1$只含有算术公理，除$\forall x$，&，$\neg$以外不含任何逻辑运算子，并且不含自由变元.

就所给的叙列的证明的高度$\alpha$而作串值归纳，可以证明下列的论断(A)—(F)。作这个归纳时，我们暗中使用下事实，即在使用短换步骤时，不更改证明的高度.

(A) 如果所给的证明的尾叙列具$\Gamma \to \Theta$，$\forall xA(x)$形，则对每一数$n$，都可找到一个关于叙列$\Gamma \to \Theta, A(\mathbf{n})$的证明，而其高度$\leqslant \alpha$.

证明：如果所给的尾叙列是由短换步骤之一得来的，则按树枝升高便可达到一叙列，它与$\Gamma \to \Theta$，$\forall xA(x)$的差异只在于出现公式的次序及个数而且获得它的推演方法不同于短换步骤。上面所说的$\forall xA(x)$的出现，在尾叙列中或在找到的叙列中，都相应于这公式在后件中的一个或多个出现；今把它们叫做本性出现。最后一个不同于短换的推演，其前提所具的高度小于$\alpha$。可能有两情况：(1) $\forall xA(x)$的本性出现之一是主要公式的一个出现(在特例，如在细弱中的公式C)。如果这时我们方从事于规则(C)，则对每个$n$都可找一前提，其中所考虑的$\forall xA(x)$的出现被换为$A(\mathbf{n})$——在必要时再应用几次规则→换及归纳假设，便可以把$\forall xA(x)$的每个相应于本性出现的都换为$A(\mathbf{n})$，并对所得的叙列找出高度$<\alpha$的证明，然后再借助于短换步骤便得到对所要求的叙列的证明而高度$<\alpha$。如果我们方从事于规则弱，则必要时先应用规则→弱及归纳假设，便可以在这个规则弱的前提中把一切

1) 这时，如果公式C的次数为$n$，则对每一叙列C → C都可找到一个具高度$2n+1$的证明.

相应于本性的 $\forall x A(x)$ 的出现换为 $A(\mathbf{n})$ ($n=0, 1, 2\cdots$)，然后再应用弱而把 $A(\mathbf{n})$ 代替我们的 $\forall x A(x)$. 然后应用短换步骤，便对叙列 $\Gamma\to\Theta$, $A(\mathbf{n})$ 而得到高度 $\leqslant\alpha$ 的证明. (2) 如果所给的 $\forall x A(x)$ 的出现不相应于主要公式的出现，则相应于它的 $\forall x A(x)$ 的出现必在某一个前提中而它不是短换步骤，依归纳假设，把前提中每一个这样的 $\forall x A(x)$ 的出现都换为公式 $A(\mathbf{n})$ 的出现，然后再应用同样的推演规则；这样便得到一个叙列，从它经过短换步骤可以达到叙列 $\Gamma\to\Theta$, $A(\mathbf{n})$，而高度 $\leqslant\alpha$.

(B) 如果所给的证明的尾叙列具 $\Gamma\to\Theta$, A&B 形，则对于每个叙列 $\Gamma\to\Theta$, A 及 $\Gamma\to\Theta$, B 都可找到一证明，其高度 $\leqslant\alpha$.

其证明仿 (A).

(E)—(F) 如果所给的证明的尾叙列具 $\Gamma\to\Theta$, $\neg$A 形 (具 $\neg$A, $\Gamma\to\Theta$ 形，) 则对于形为 A, $\Gamma\to\Theta$ (形为 $\Gamma\to\Theta$, A) 的叙列可找到一证明，其高度 $\leqslant\alpha$.

证明，同 (A)—(B). (如果在证明之末用到规则短→(规则→短) 而把公式 A 作为 C 而缩短，则这里可把公式 $\neg$A 作为规则→短 (短→) 中的 C 而预先重复.)

(G)—(H) 如果所给的证明的尾叙列具 F, $\Gamma\to\Theta$ 形 (具 $\Gamma\to\Theta$, G 形)，而 F 为素闭永真公式 (G 为素闭永假公式)，则对叙列 $\Gamma\to\Theta$ 可找到一证明而高度 $\leqslant\alpha$.

(G)—(H) 和 (A) 同样证明，这时在情形 (1) 只能取推演弱 (弱→及→弱). 在这个弱的前提中消除了 F (或 G) 的一切本性出现 (如果有的话)，然后放弃某些弱→(→弱)，借助于短换步骤便可以变到叙列 $\Gamma\to\Theta$ 去了 (高度 $<\alpha$). 情形 (2) 仿 (A) 中的 (2) 考虑，便可以得到 $\Gamma\to\Theta$ 的证明，而高度 $\leqslant\alpha$.

今设给出某种具有穷次数的证明. 我们将证，有一个不具分割的对同样叙列的证明，这证明的高度不超过下数：大于所给证明的高度的、最小的 $\varepsilon$ 数，为此，只须说出一种方法，使由所给的次数 $>0$ 的证明变成一个具较少次数的证明而其高度 $\leqslant 2^{\alpha}$ ($\leqslant \omega^{\alpha}$)，这里 $\alpha$ 为所给的证明的高度. (事实上，如果所给的证明只含

有次数为 0 的分割，则可以消除分割，只须把每一个这样的分割换以完全确定的细弱，这细弱是经过把 (H)—(G) 应用于这分割的各公式及应用于它的一个前提的各公式后得到的.)

这种变换的可能性可就所给证明的高度作归纳而证明. 设对于高度 $<\alpha$ 的一切证明它已经成立了，现在对我们给出一个高度为 $\alpha$ 的证明. 如果这证明中尾叙列是从前提不经过短换或分割而得来的，那就对这些前提的证明(它们显然具有高度$<\alpha$)使用归纳假设，再对它们每者使用已经具有的变换，便对原来尾叙列得到一个(完全确定的)证明其次数较少而（由于函数 $2^\alpha$ 的单调性）高度必须 $\leqslant 2^\alpha$. 如果所给证明的尾叙列是由次数 $k>0$ 的分割得来的(如果这分割的次数为 0，则仿前考虑)，则可根据分割公式 C 的样子而有三种可能:

情形 1. 公式 C 具 $\forall xF(x)$ 形. 设所考虑的分割的前提是 $\Gamma\to\Theta, \forall xF(x)$ 及 $\forall xF(x); \Delta\to\Lambda$ 形，其高度分别为 $\alpha_1$ 及 $\alpha_2$. 今使用归纳假设把这两叙列的证明换为同样叙列的两个证明，其次数 $<k$ 而高度分别 $\leqslant 2^{\alpha_1}$ 及 $\leqslant 2^{\alpha_2}$. 如果公式 $\forall xF(x)$ 的次数 $<k$，我们便得到原来尾叙列 $\Gamma, \Delta\to\Theta, \Lambda$ 的一个证明，其次数 $<k$ 而高度 $\leqslant \max(2^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2})+1\leqslant 2^\alpha$. 今设公式 $\forall xF(x)$ 的次数为 $k$.

我们不久就要写出所考虑的分割的右前提 $\forall xF(x), \Delta\to\Lambda$ 的证明的那一分支，为此我们要作一些预备讨论.

试考虑该捆的一切上面公式，该捆是借助于 $\forall xF(x)$ 的出现（作为上述分割右前提中的分割公式的出现）而贯通的；它们每一个都出现于某些叙列的前件中. 这些出现不能够是在公理中的出现（因为公理中不可能含有公式 $\forall xF(x)$ 的出现)，即它们必兴起于某些推演的结果中；这些推演只能是 $\forall\to$ 或弱. 设所考虑的捆的某一个上面公式出现于推演 $\forall\to$ 的结果中，则在这推演的前提内其旁边公式将是某公式 $F(\mathbf{n}_i)$. 今把这前提记为 $F(\mathbf{n}_i), \Delta_i\to\Lambda_i$（并设它的高度 $\leqslant 2^{\alpha_i}+\gamma, \gamma<\beta$). 由 (A) 可知，对叙列 $\Gamma\to\Theta, F(\mathbf{n}_i)$ 可找出一个高度 $\leqslant 2^{\alpha_i}$ 的证明. 由分割可得叙列 $\Gamma, \Delta_i\to\Theta, \Lambda_i$ 的证明，而次数 $<k$（高度 $\leqslant 2^{\alpha_1}+\beta$). 如果所考

虑的捆的上面公式兴起于叙列 $\Delta_i \to \Lambda_i$ 经过弱而得的结果(高度$<2^{\alpha_2}$)之中，我们便由该叙列的证明借助于细弱而得到叙列 $\Gamma, \Delta_i \to \Theta, \Lambda_i$ 的证明，次数 $< k$（而高度 $\leqslant 2^{\alpha_1}+\beta$，如果前提的高度 $\leqslant 2^{\alpha_1}+\gamma, \gamma<\beta$ 的话).

因此，对叙列 $\forall x F(x), \Delta_i \to \Lambda_i$ 的每一种情况，只要其中出现所考虑的捆的某一个上面公式，我们便得到叙列 $\Gamma, \Delta_i \to \Theta, \Lambda_i$ 的证明而次数 $< k$.

今对叙列 $\forall x F(x), \Delta \to \Lambda$ 的证明的每一分支实行下列的运算. 删除不含有公式 $\forall x F(x)$ 的出现的一切叙列 ($\forall x F(x)$ 属于所考虑的捆)，只留下下形的叙列 $\forall x F(x), \cdots, \forall x F(x), \Delta_i \to \Lambda_i$（至多只是前件中公式的次序有差异)，这里 $\forall x F(x) \notin \Delta_i$；我们便把这样的叙列换为 $\Gamma, \Delta_i \to \Theta, \Lambda_i$. 依前，变换后的分支的上面的叙列便具有次数 $< k$ 的证明.

把这证明附到变换后的分支的上面叙列去.

我们便得一图式，亦具有树枝形；它的每一个公式都具有高度 $\leqslant 2^{\alpha_1}+\beta$，$\beta$ 为原有证明中相应叙列的高度，依前对所考虑的上面叙列可以找到具有必要的高度的证明. 可以证明新图式亦是一证明，至少当补充了短换步骤以后(而“高度”一字仍是以前意义的高度). 事实上，上面所考虑的捆中 $\forall x F(x)$ 的任何出现都不是任何推演的旁边公式的出现，也不是任何分割公式C的出现. 因此变换后的分支的每一个叙列都可由相应的未变换的叙列的变换过的前提经过应用同样的推演规则而得到 (即后面这个叙列在变换前由其前提（以及已提到的上面叙列）得出时所根据的那个规则)，当然这里可以有一些补充的短换步骤. 右前提 $\forall x F(x), \Delta \to \Lambda$ 的变换后的证明的尾叙列和所给的尾叙列 $\Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda$ 相同. 这证明的次数 $< k$ 而高度 $\leqslant 2^{\alpha_1}+2^{\alpha_2}+2^{\alpha_3}$.

情形 2. 公式C具 A&B 形，这情形与情形 1 可用同法讨论，但更简单些.

情形 3. 公式C具 $\neg$A 形. 所考虑的分割的前提呈下形 $\Gamma_1 \to \Theta_1, \neg A$ 及 $\neg A, \Gamma_2 \to \Theta_2$. 它们的高度 $\alpha_1$ 与 $\alpha_2$ 小于 $\alpha$. 今（根据

(E)—(F)) 把它们换为叙列 $\Gamma_2 \to \Theta_2$, A 及 $A$, $\Gamma_1 \to \Theta_1$, 其证明的高度 $\leqslant \alpha_1$ 及 $\leqslant \alpha_2$. 然后再根据归纳假设把后面这两证明换以另外的证明,次数 $< k$ 而高度分别 $\leqslant 2^{\alpha_1}$ 及 $2^{\alpha_2}$. 然后依公式A实行分割再实行短换便得到叙列 $\Gamma_1, \Gamma_2 \to \Theta_1, \Theta_2$ 的证明, 其高度 $\leqslant \max(2^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2}) + 1 \leqslant 2^{\max(\alpha_1,\alpha_2)} + 1 \leqslant 2^{\alpha}$. 因为公式A的次数比公式 $\neg$A 的次数为少,而后者不超过 $k$,故对原给尾数列 $\Gamma_1,\Gamma_2 \to \Theta_1, \Theta_2$ 得到一个证明其次数 $< k$.

如果所给的证明是依上述的方法 (例如, 证明 $\vdash \to \forall$E 的方法,这里E是系统 $H$ 的定理)而得出的,则对它可给以一高度 $< \varepsilon_0$, 这样所得的没有分割的证明其高度亦 $< \varepsilon_0$, 因此, 在这情形下整个考虑只使用到 $< \varepsilon_0$ 的序数.

因为在 $G1$ 中,若不用分割则空叙列 $\to$ 显然是不能证明的,所以在 $G1$ 中 $\to$ 是不可证的,由此根据 §79 (第 530 页) 便可推得古典算术 $H$ 的相容性. 除初等直觉主义的工具以外,这个相容性证明只使用直到 $\varepsilon_0$ 的超穷归纳. (这里所叙述的证明是舒提 [1951] 的证明的变形;舒提讨论 $H$ 型系统而用坚钦的讨论方式).

借助于直到 $\varepsilon_1$ 的归纳可以用下列方式证明古典算术的 $\omega$ 相容性.

如果 $\forall$xF(x) 为系统 $H$ 的闭公式,当 $n = 0,1,2,\cdots$ 时在 $H$ 内有 $\vdash F(\mathbf{n})$, 则在 $G1$ 内有 $\vdash \to$ F(**n**), 这时叙列 $\to$ F(**n**) 具有高度 $< \varepsilon_0$. 因此叙列 $\to \forall$xF(x) 具有一证明其高度 $\leqslant \varepsilon_0$. 由此可推出公式 $\neg\forall$xF(x) 在系统 $H$ 内的不可证性; 事实上, 如果这公式在 $H$ 内是可证的, 则在 $G1$ 内将对叙列 $\to \neg\forall$xF(x) 有一证明而高度 $< \varepsilon_0$,由 (E) 便将对叙列 $\forall$xF(x) $\to$ 有一证明,其高度 $< \varepsilon_0$. 实行分割便可在 $G1$ 内对叙列 $\to$ 有一证明其高度 $\leqslant \varepsilon_0 + 1$. 由前面的结果,将对 $\to$ 有一个不用分割的证明而高度 $< \varepsilon_1$, 这是不可能的.

古典算术的 $\omega$ 相容性首先由诺维科夫[1943]用更有力的构造性工具加以证明. (即上面所述的那种归纳, 在 $G1$ 内由推演的前提的证明而到推演的结论的证明的那种归纳.)

注意，在上述的古典算术的相容性及$\omega$相容性的证明中，我们分别使用了直到$\varepsilon_0$及直到$\varepsilon_1$的超穷归纳，但既没有使用排中律亦没有使用下列(亦招致异议的)直觉主义数学的原则:“由错误命题可推出随意的一切“(参见第104页脚注)．事实上，不用这原则我们亦证明了，如何由古典算术的每一个矛盾而可以在$G1$中对$\to$得出一个不用分割的推演．即，如果古典算术是不相容的($\omega$不相容的)，则这样的荒谬推演便是可能的．这可以借助于直到$\varepsilon_0$(直到$\varepsilon_1$)的归纳而在不具有刚才所说的原则的直觉主义算术内(即极小演算的算术内)而证明(参见第104页脚注)．应用这原则可以由所得的荒谬作出所需要的推论，但这我们并不需要．(以后再应用换质位：如果在$G1$内不用分割时$\to$的推演是不可能的，则古典数学是$\omega$相容的——这具有非荒谬的前提.)因为古典算术含有这个有争论的原则，所以以前结果可以看作亦根据(当应用于算术时)这原则而不仅仅是根据排中律.

注意，某一叙列如果不含有$\supset$，$\vee$，$\exists$及自由变元，其后件不含$\forall$并具有有限的次数，则关于它的证明，定理50仍然成立．(既然要求在后件中缺乏$\forall$，又由于分割的可消除性以及一切公式都是前束的，因而使得$\neg\to$不能应用于含有$\forall$的公式，这便保证了，在作出上述的没有分割的证明中，规则(c)不能使用[1]．以后的证明仿§79.)

今设在古典系统$H$中证出了一个形为$\exists x B(x)$的闭公式，而$B(x)$为(直觉主义地)数字地可判定的公式．这时在$H$内$\vdash \neg\forall x\neg B(x)$，并依前在$G1$内$\vdash\ \to \neg\forall x\neg B(x)$；由(E)得，在$G1$内$\vdash \forall x\neg B(x)\to$．其次在$H$内

$$\vdash \forall x\neg B(x)\supset 1=0,\quad \forall x\neg B(x)\vdash 1=0.$$

依定理46，在$G1$内有$\vdash \forall x\neg B(x)\to 1=0$．正如在定理50那样，我们可把这叙列的证明修改并找出中介叙列它只能具下形$\neg B(\mathbf{n}_1),\cdots,\neg B(\mathbf{n}_k)\to 1=0$.它是可证的.在直觉主义系统内，

1) 由此推得证明是有穷的——俄译注。

对每个 $i=1,\cdots,k$ 都有 $\vdash B(\mathbf{n}_i)\vee\neg B(\mathbf{n}_i)$（依假设，B(x) 有直觉主义地数字可判定性.）由此推得（直觉主义地）或有某些 $i=1,\cdots,k$ 使得 $\vdash B(\mathbf{n}_i)$ 或对全体 $i$ 都有 $\vdash\neg B(\mathbf{n}_i)$，如果第二情形是真的，则在 $G1$ 内将有 $\vdash\neg B(\mathbf{n}_i)$ 当 $i=1,\cdots,k$ 时，再对中介叙列应用 $k$ 次分割便得，在 $G1$ 内 $\rightarrow 1=0$（因而有 $\rightarrow$）。这和上面所证明的相矛盾。因此有某 $i$ 使 $\vdash B(\mathbf{n}_i)$。而这是直觉主义地成立的。由此再推得，在直觉主义系统 $H$ 内有 $\vdash\exists xB(x)$。

由此推得下结果：

如果直觉主义地建立了公式 F(x) 的数字地可判定性，而且古典地建立了 $\vdash\exists xF(x)$，则直觉主义地亦有 $\vdash\exists xF(x)$。（比较诺维科夫[1943][1].）

在诺维科夫的证明中，使用了一种归纳法，类似于上文所用的直觉主义系统 $G1$ 内由前提的证明而转到结论的证明去的那种归纳。

依 §81 的用语，这是一个 **n** 结果。（它亦可以转到具有构造性的卡纳普规则的算术去.）在许多情形下，根据这个结果可以由古典的证明得出直觉主义的乃至初等的证明。（例如比较附录 V，第二 $\varepsilon$ 定理的证明之末，及第 571 页脚注之末，又参见第 234 页脚注 1.）

今把诺维科夫的结果应用于 §57 定理 VI(b)。

设对于某谓词 $(Ey)R(x,y)$，这里 $R(x,y)$ 为一般递归谓词，直觉主义地有 $\overline{(Ey)}R(x,y)\equiv(Ey)S(x,y)$，而 $S(x,y)$ 为一般递归谓词，又设在第四章的系统内有 $\vdash\neg\exists yR(x,y)\sim\exists yS(x,y)$，这里 R(x,y) 与 S(x,y) 为两公式，分别形式地因而数字地表示谓词 $R(x,y)$ 及 $S(x,y)$，这时在这个（古典的）系统内有

$\vdash\exists yR(x,y)\vee\exists yS(x,y)$，再由 *88 $\vdash\exists y(R(x,y)\vee S(x,y))$。

---

1) 由于诺维科夫的结果，由公式 $\forall x\exists y\ B(x,y)$ 的古典证明（这里 B(x, y) 数字地表示一个一般递归谓词），可推出这公式的构造地真确性。量词 $\exists y$ 可以欠缺（比较 *76）即亦可适用于公式 $\forall xB(x)$，这里B(x)表示一元一般递归谓词——俄译注。

即对每个数字 $\mathbf{n}$，$\vdash \exists_y(R(\mathbf{n}, y) \vee S(\mathbf{n}, y))$. 在量词 $\exists y$ 之后是一个数字地可判定的公式（§41（D）），故由诺维科夫结果，在直觉主义算术内可得 $\vdash \exists y(R(\mathbf{n}, y) \vee S(\mathbf{n}, y))$. ——此外，由这结果的证明还可看见，可由 $\mathbf{n}$ 而能行地找到一数字 $\mathbf{l}$ 使得 $\vdash R(\mathbf{n}, \mathbf{l}) \vee S(\mathbf{n},\mathbf{l})$. 由邱吉论点可得，$\mathbf{l}$ 是 $n$ 的一般递归函数，$l=\varphi(n)$. （事实上，函数 $\varphi$ 可由诺维科夫结果的证明而推出；即首先须作出一个一般递归函数，以通过 $n$ 以及下叙列的证明的哥德尔数

$$\forall y \neg[R(\mathbf{n}, y) \vee S(\mathbf{n}, y)] \rightarrow$$

而表示定理 50 中的中介叙列的哥德尔数.）即，$R(x, \varphi(x)) \vee S(x, \varphi(x))$ 是直觉主义地成立的，其次直觉主义地便有 $(Ey)R(x,y) \vee (Ey)S(x, y)$，最后直觉主义地有 $(Ey)R(x, y) \vee (\overline{Ey})R(x, y)$，这便表示了谓词 $(Ey)R(x, y)$ 的一般递归性.

对于任意多个变元 $x_1, \cdots, x_n$，类似的论断亦成立.

这样，§57 定理 VI(b) 便相应于下列的 $\mathbf{n}$ 结果（在 §81 意义下）. 如果直觉主义地有 $(\overline{Ey})R(x_1, x_2, \cdots, x_n, y) \equiv (Ey)S(x_1, \cdots, x_n, y)$，并且下列的证明可以形式体系化于古典算术内（第四章的系统内），则这谓词是一般递归的，所指的证明是：证明所给的谓词可以表成两种形状 $(Ey)R(x_1, \cdots, x_n, y)$ 及 $(y)S(x_1, \cdots, x_n, y)$，而 $R$ 与 $S$ 为原始递归.

# 参 考 文 献

一姓名之后附以方括号所写的日期是指参见本文献而言的(例如，布劳维 Brouwer [1908]). 所列的日期一般是该文章所发表的杂志整卷的出版日期. 但有例外；主要是：在国际学会上的文章经常是指学会的日期(如希尔伯特 Hilbert [1904]). 如同一时期而有多篇文章时，则在日期之后附以 a，b 等字样；日期而附以星号*的，表示在本文献中在该文章之后作者给有附注.

只有本书引用过的才列入本文献(有些例外，则是被本文献中的别的文章引用到的). 在引用外国文章时我们译成英文[1].

邱吉 (Alonzo Church) 编有符号逻辑文献，见符号逻辑杂志 (Journal of symbolic logic) 卷 1 (1936) 第四期(第 121—218 页). 在卷 3 (1938) 第四期(第 178—212 页)上列有它的附录及补正，并依内容而作了索引，这书是预备把直到 1935 年为止的有关符号逻辑的(包括有关部门的如递归函数等)所有文献全数给出. 这两部分现已合卷出版(出版后曾发现一些新项目，在杂志的以后几卷内陆续补入).

1935 年以后的文献可见于符号逻辑杂志的评论性文摘中，每两年有著者索引(奇号数年份)，每五年有内容索引(1940，1945 等).

本文献中列有一些文章颇为不易得到的. 要知道它们的内容，如果在 1935 年以后出版的，几乎无例外地可见于符号逻辑杂志的文摘栏中，如在 1938 年以后出版的，亦可见于数学文摘 (Mathematical seviews) 的"基础"栏[2]或(第 20 卷后)"数理逻辑与基础"

---

1) 如引中文的，我们尽量改为中文——译者注.

2) 在 1953 年 1 月 1 日以后亦可见于文摘性杂志"数学" (Математика) 中"数学基础及数理逻辑"栏——俄译注.

中。

在预备本文献时，作者曾参考邱吉编的文献及符号逻辑杂志的文摘栏，亦参考弗兰克尔 Fraenkel [1928]及海丁 Heyting[1934]所列的文献（尤其对于不属于邱吉文献及符号逻辑杂志的范围内的项目）。

1951 年起出版有国际性的小册子丛书，叫做《逻辑及数学基础研究》(北荷兰出版社，安斯特丹)，其中对许多题目作了研究报告及阐释[1)2)]。

在本书的初版（1952）中，列有十一本当时尚未出版的著作。现在对这十一条文献已作了补全或修正，但不再增加新的文献条目。（最后一段根据第六版添入——译者.）

1) 关于（至 1947 年）苏联学者在数理逻辑方面贡献的鸟瞰及详细文献可见于雅诺夫斯卡娅 (Яновская) [1956] 中. 关于数理基础的研究的鸟瞰亦见于竖钦[1934]及莫斯托夫斯基 [1953] ——俄译注.

2) 俄译本所增补的文献在中译本内已经删除——译者注.

# BIBLIOGRAPHY


ACKERMANN, WILHELM

[1924—5] *Begründung des "tertium non datur" mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit.* **Mathematische Annalen,** vol. 93, pp. 1—36.

[1928] *Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen.* Ibid., vol. 99, pp. 118—133.

[1940] *Zur Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie.* Ibid., vol. 117, pp. 162—194. See Hilbert and Ackermann.

BEHMANN, HEINRICH

[1922] *Beiträge zur Algebra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem.* Ibid., vol. 86, pp. 163—229.

BERECZKI, ILONA

[1949] unpublished Results reported to the author in a letter from Kalmár dated November 17, 1949. The author obtained (A)—(C) of Example 1 §57 after receiving this letter; (D) was (in substance) mentioned (orally) to the author by Kalmár on August 18, 1948.

[1952] *Nem elemi rekurzív függvény létezése* (Existeuz einer nichtelementaren rekursiven Funktion). Comptes rendu Congrès des Math. Hongrois 27 août-2sept. 1950. Budapest 1952, pp. 409—417. cf. Péter 1951. pp. 61—67.

BERNAYS, PAUL

[1935] *Sur le platonisme dans les mathématiques.* **L'Enseignement mathématique,** vol. 34, pp. 52—69.

[1935 a] *Hilberts Untersuchungen über die Grundlagen der Arithmetik,* **David Hilbert Gesammelte Abhandlungen,** vol. 3, Berlin (Springer), pp. 196—216.

[1936] Logical calculus. Notes on lectures at the Institute for Advanced Study 1935—6, prepared with the assistance of F. A. Picken. Mimeographed. Inst. for Adv. Study, Princeton, N. J., 1936, 125 pp.

[1937—54] *A system of axiomatic set theory.* **The journal of symbolic logic,** Vol. 2 (1937), pp. 65—77, vol. 6 (1941); pp. 1—17, vol. 7 (1942), pp. 65—89 and 133—145, vol. 8 (1943), pp. 89—106, vol. 13 (1948), pp. 65—79. vol. 19 (1954).

[1938] *Sur les questions méthodologiques actuelles de la théorie hilbertienne de la démonstration.* **Les entretiens de Zurich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques, 6—9 Décembre**

**1938,** Exposés et discussions, published by F. Gonseth, Zurich (Leemann) 1941, pp. 144—152. Discussions on pp. 153—161.
See Hilbert and Bernays.

BERNSTEIN, FELIX

[1898] See p. 104 of Borel [1893].

BERRY, G. G.

[1906] See p. 645 of Russell [1906].

BLACK, MAX

[1933] **The nature of mathematics. A critical survey.** London (Kegan Paul, Trench, Trubner) and New York (Harcourt, Brace), xiv+219 pp. Reprinted London (Routledge and Kegan Paul) and New York (The Humanities Press) 1950.

BOOLE, GEORGE

[1847] **The mathematical analysis of logic, being an essay toward a calculus of deductive reasoning.** Cambridge (Macmillan, Barclay & Macmillan) and London (George Bell), 82 pp. Reprinted Oxford (Basil Blackwell) and New York (Philosophical Library, Inc.) 1948.
[1854] **An investigation of the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities.** London (Walton and Maberly), v+iv+424 pp. Reprinted as vol. 2 of George Boole's collected works, edited by Ph. E. B. Jourdain, Chicago & London 1916. Reprinted New York (Dover Publications) 1951.

BOONE, WILLIAM W.

[1951] abstract. *An extension of a result of Post.* **The journal of symbolic logic,** vol. 16, pp. 237—238.
[1952] Review of Turing 1950. Ibid., vol. 17, pp. 74—76.

BOREL, ÉMILE

[1898] **Leçons sur la théorie des fonctions.** Paris (Gauthier-Villars).

BROUWER, L. E. J.

[1908] *De onbetrouwbaarheid der logische principes* (The untrustworthiness of the principles of logic.) **Tijdschrift voor wijsbegeerte,** vol. 2, pp. 152—158. Reprinted in **Wiskunde, waarheid, werkelijkheid,** by L. E. J. Brouwer, Groningen (P. Noordhoff) 1919, 12 pp.

[1923] *Uber die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten inder Mathematik, insbesondere in der Funktionenthcorie.* **Journal für die reine und angewandte Mathematik,** vol. 154 (1925), pp. 1—7. Original in Dutch 1923.

[1928] *Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus.* **Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse,** 1928, pp. 48—52. Also **Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen, Proceedings of the section of sciences,** vol. 31, pp. 374—379.

BURALI-FORTI, CESARE

[1897] *Una questione sui numeri transfiniti.* **Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo,** vol. 11, pp. 154—164. See also ibid., p. 260. Concerning Cantor's discoveries of the Burali-Forti and Cantor paradoxes, see Fraenkel 1932, p. 470.

CANTOR, GEORG

[1874] *Uber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen.* **Journal für die reine und angewandte Mathematik,** vol. 77, p. 258—262. Reprinted in **Georg Cantor Gesammelte Abhandlungen,** Berlin (Springer) 1932, pp. 115—118.

[1895—7] *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre.* **Mathematische Annalen,** vol. 46 (1895), pp. 481—512, and vol. 49 (1897), pp. 207—246. Reprinted in **Georg Cantor Gesammelte Abhandlungen,** pp. 282—351. English translation by Ph. E. B. Jourdain entitled **Contributions to the founding of the theory of trans finite numbers** Chicago and London (Open Court) 1915, ix+211 pp

CARNAP, RUDOLF

[1931—2] *Die logizistische Grundlegung der Mathematik.* **Erkenntnis,** vol. 2, pp. 91—105.

[1934] **The logical syntax of language.** New York (Harcourt, Brace) and London (Kegan Paul, Trench, Trubner) 1937, xvi+352 pp. Tr. by Amethe Smeaton from the German original 1934, with additions.

CHURCH, ALONZO

[1932] *A set of postulates for the foundation of logic.* **Annals of mathematics,** second series, vol. 33, pp. 346—366.

[1933] *A set of postulates for the foundation of logic (second paper).* Ibid., vol. 34, pp. 839—864.

[1935] *A proof of freedom from contradiction.* **Proceedings of the National**

**Academy of Sciences,** vol. 21, pp. 275—281.

[1936] *An unsolvable problem of elementary number theory.* **American journal of mathematics,** vol. 58, pp. 345—363.

[1936a] *A note on the Entscheidungsproblem.* **The journal of symbolic logic,** vol. 1, pp. 40—41. *Correction*, ibid., pp. 101—102.

[1938] *The constructive second number class.* **Bulletin of the American Mathematical Society,** vol. 44, pp. 224—232.

[1941] **The calculi of lambda-conversion.** Annals of Mathematics studies, no. 6. Lithoprinted. Princeton University Press, Princeton, N. J., ii+77 pp. Second printing 1951, ii+82 pp.

[1951] *Special cases of the decision problem.* **Revue philosophique de Louvain,** vol. 49, pp. 203—221. *A correction*, ibid., vol. 50 (1952), pp. 270—272.

[1956] **Introduction to mathematical logic.** Princeton University Press, Princeton, N. J., vol. 1, $x$ + 376pp. A vol. II was *projected.*

See Church and Kleene, Church and Quine.

CHURCH, ALONZO AND KLEENE, S. C.

[1936] *Formal definitions in the theory of ordinal numbers.* **Fundamenta mathematicae,** vol. 28, pp. 11—21.

CHURCH, ALONZO AND QUINE, W. V.

[1952] *Some theorems on definability and decidability.* **The journal of symbolic logic, vol. 17** pp. 179—187.

CURRY, HASKELL B.

[1929] *An analysis of logical substitution.* **American journal of mathematics, vol. 51,** pp. 363—384.

[1930] *Grundlagen der kombinatorischen Logik.* Ibid., vol. 52, pp. 509—536, 789—834.

[1932] *Some additions to the theory of combinators.* Ibid., vol. 54, pp. 551—558.

[1939] *A note on the reduction of Gentzen's calculus LJ.* **Bulletin of the American Mathematical Society,** vol. 45, pp. 288 - 293.

[1948—9] *A simplification of the theory of oombinators.* **Synthese,** vol. 7, pp. 391—399.

[1950] **A theory of formal deducibility.** Notre Dame mathematical lectures, no. 6, University of Notre Dame, Notre Ind., ix+126 pp.

[1952] *The permutability of rules in the classical inferential calculus.* **The journal of symbolic logic,** vol. 17 No. 4, pp. 245—248.

DANTZIG, D. VAN

[1947] *On the principles of intuitionistic and affirmative mathematics.* **Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen, Proceedings of the section of sciences,** vol. 50, pp. 918—929, 1092—1103; also **Indagationes mathematicae,** vol. 9, pp. 429—440, 506—517.

[1948] *Significs, and its relation to semiotics.* **Library of the Tenth International Congress of Philosophy (Amsterdam, Aug. 11—18, 1948),** vol. 2 **Philosophical essays,** Amsterdam (Veen) 1948, pp. 176—189.

DAVIS, MARTIN

[1950] abstract. *Relatively recursive functions and the extended Kleene hierarchy.* **Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Cambridge, Mass., U. S. A. Aug. 30-Sept. 6, 1950),** 1952, vol. 1, p. 723.

DEDEKIND, RICHARD

[1872] **Stetigkeit und irrationale Zahlen.** Braunschweig (5th ed. 1927). Also in **Dedekind Gesammelte mathematische Werke,** vol. III, Braunschweig (Vieweg & Sohn) 1932, pp, 315—334. Eng. tr. by Wooster Woodruff Beman entitled *Continuity and irrational numbers,* pp. 1—24 of **Essays on the theory of numbers,** Chicago (Open Court) 1901, 115 pp.

[1888] **Was sind und was sollen die Zahlen?** Braunschweig (6th ed. 1930). Also in **Werke, vol. III,** pp. 335—391. Eng. tr. by Beman, *The nature and meaning of numbers,* loc. cit., pp. 29—115.

DE MORGAN, AUGUSTUS

[1847] **Formal logic: or, the calculus of inference, necessary and probable.** London, xvi+336 pp. Reprinted Chicago and London 1926 (ed. by A. E. Taylor).

[1864] *On the syllogism, no. IV, and on the logic of relations* (read 23 April 1860). **Transactions of the Cambridge Philosophical Society,** vol. 10, pp. 331—358.

DIXON, A. C.

[1906] *On "well-ordered" aggregates.* **Proceedings of the London Mathematical Society,** ser. 2, vol. 4, pp. 18—20. Cf. ibid., pp. 317—319.

EINSTEIN, ALBERT

[1944] *Remarks on Bertrand Russell's theory of knowledge.* **The philosophy of Bertrand Russell,** ed. by Paul Arthur Schilpp, Northwestern University, Evanston and Chicago, pp. 277—291. (German with Eng. tr. by Schilpp.)

FEYS, ROBERT

[1937—8] *Les logiques nouvelles des modalités.* **Revue néoscolastique de philosophie,** vol. 40 (1937), pp. 517—553, vol. 41 (1938), pp. 217—252.

[1965] **Modal logics.** Ed. with some complements by Joseph Dopp. Louvain (E. Nauwelaerts) and Paris (Gauthier-Villars), xiv+219 pp. This is the outcome of a plan for a joint work by Feys and J. C. C. McKinsey.

FINSLER, PAUL

[1926] *Formale Beweise und die Entscheidbarkeit.* **Mathematische Zeitschrift,** vol. 25, pp. 676—682.

FRAENKEL, ADOLF

[1922] *Der Begriff "definit" und die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms.* **Sitzungsberichte der Preussische Akademie der Wissenschaften, Physikalischmathematische Klasse,** 1922, pp. 253—257.

[1925] *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre.* **Mathematische Zeitschrift,** vol. 22, pp. 250—273.

[1928] **Einleitung in die Mengenlehre,** 3rd ed., Berlin (Springer) 1928, xiii+424 pp. Reprinted New York (Dover Publications) 1946.

[1932] *Das Leben Georg Cantors.* **Georg Cantor Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts,** ed. by Ernst Zermelo, Berlin (Springer), pp. 452—483.

[1953] **Abstract set theory.** Studies in logic and the foundations of mathematics, Amsterdam (North-Holland Pub. Co.), xii+479 pp.

FREGE, GOTTLOB

[1879] **Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens.** Halle (Nebert), viii+88 pp.

[1884] **Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl.** Breslau, xix+119 pp. Reprinted Breslau (M. & H. Marcus) 1934. Eng. tr. by J. L. Austin (with German original): **The foundations of arithmetic. A logico-mathematical enquiry into the concept of number.** Oxford (Basil Blackwell) and New York (Philosophical Library) 1950, (xii

XI+119)×2 pages.

[1893] **Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet.** Jena (H. Pohle), vol. 1, xxxii+254 pp.

[1903] Ibid., vol. 2, xv+265 pp. Eng. tr. of Sections 86—137 by Max Black entitled *Frege against the formalists* in **The philosophical review,** vol. 59 (1950), pp. 77—93, 202—219 332—345.

GENTZEN, GERHARD

[1934—5] *Untersuchungen über das logische Schliessen.* **Mathematische Zeitschrift,** vol. 39, pp. 176—210, 405—431. Apart from minor differences in the notion of formula, and for the Hilbert-type systems in the precise selection of the postulates, our classical "formal system *H*" for predicate calculus (cf. §77) is Gentzen's "*Kalkül LHK*", our intuitionistic "*H*"is his "*LHJ*", our classical "*G*1" his "*LK*", and our intuitionistic"*G*1" his "*LJ*".

[1936] *Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie.* **Mathematische Annalen,** vol. 112, pp. 493—565. He uses 1,2,3,··· where we use 0,1,2,···

[1938] *Die gegenwärtige Lage in der mathematischen Grundlagenforschung.* **Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften,** new series, no 4, Leipzig (Hirzel), pp. 5—18.

[1938a] *Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie.* Ibid., pp. 19-44.

[1943] *Beweisbarkeit und Unbeweisbarkeit von Anfangsfällen der transfiniten Induktion in der reinen Zahlentheorie.* **Math. Ann.,** vol. 119 no. 1, pp. 140--161.

GLIVENKO, V.

[1929] *Sur quelques points de la logique de M. Brouwer.* **Académie Royale de Belgique, Bulletins de la classe des sciences,** ser. 5, vol. 15, pp. 183—188.

GÖDEL, KURT

[1930] *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls.* **Monats- hefte für Mathematik und Physik,** vol. 37, pp. 349—360.

[1931] *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I.* Ibid., vol. 38, pp. 173—198.

[1931—2] *Über Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit.* **Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums,** Heft 3 (for 1930-1, pub. 1932), pp. 12—13. This paper lists results without proofs.

[1931—2a] Remarks contributed to a *Diskussion zur Grundlegung der Mathematik.* **Erkenntnis,** vol. 2, pp. 147—148.

[1932] *Zum intuitionistischen Aussagenkalkül.* **Akademie der Wissenschaf-**

**ten in Wien, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Anzeiger,** vol. 69 (1932), pp. 65—66. Reprinted in **Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums,** Heft 4 (for 1931—2, pub. 1933), p. 40.

[1932—3] *Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie.* **Ergebnisse eines math. Koll.,** Heft 4 (for 1931—2, pub. 1933), pp. 34-38.

[1934] **On undecidable propositions of formal mathematical systems.** Notes by S. C. Kleene and Barkley Rosser on lectures at the Institute for Advanced Study, 1934. Mimeographed, Princeton, N. J., 30 pp.

[1936] *Über die Länge von Beweisen.* **Ergebnisse eines math. Koll.,** Heft 7 (for 1934-5, pub. 1936, with note added in press), pp. 23-24.

[1938] *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis.* **Proceedings of the National Academy of Sciences,** vol. 24, pp. 556-557. A full-length treatment is given in 1940.

[1939] *Consistency-proof for the generalized continuum-hypothesis.* Ibid., vol. 25, pp. 220-224.

[1940] **The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory.** Lectures delivered at the Institute for Advanced Study 1938-9; notes by George W. Brown. Annals of Mathematics studies, no. 3. Lithoprinted. Princeton University Press, Princeton 1940, 66 pp. Insert '$(n)$' before '[ ' in Axioms A 4, C 3. Also cf. Example 13 § 74 above.) Second printing 1951, v+69 pp.

[1944] *Russell's mathematical logic.* **The philosophy of Bertrand Russell,** ed. by Paul Arthur Schilpp, Northwestern University, Evanston and Chicago, pp. 123—153.

[1947] *What is Cantor's continuum problem?* **American mathematical monthly,** vol. 54, pp. 515-525.

GONSETH, FERDINAND

[1933] *La vérité mathématique et la réalité.* **L'Enseignement mathématique,** vol. 31 (for 1932, pub. 1933), pp. 96—114.
Also: *A propos d'un catalogue paradoxical. Réponse de M. Gonseth à M. Winants.* Ibid., pp. 269-271.

HALL, MARSHALL, JR.

[1949] *The word problem for semigroups with two generators.* **The journal of symbolic logic,** vol. 14, pp. 115—118.

HASENJAEGER, GISBERT

[1950] *Über eine Art von Unvollständigkeit des Prädikatenkalküls der ersten

*Stufe*. Ibid., vol 15, pp. 273—276.

HAUSDORFF, FELIX

[1914] **Grundzüge der Mengenlehre.** Leipzig (Viet), viii+476 pp. Reprinted New York (Chelsea) 1949.

[1927] **Mengenlehre.** Göschens Lehrbucherei, 1 Gruppe Band 7, Berlin and Leipzig (Gruyter), a 2nd revised ed. of 1914 (but less complete in some respects), 285 pp. 3rd ed., 1935, 307 pp. Reprinted New York (Dover Publications) 1944.

HENKIN, LEON

[1949] *The completeness of the first-order functional calculus.* **The journal of symbolic logic,** vol. 14, pp. 159—166.

[1950] *Completeness in the theory of types.* Ibid., vol. 15, pp. 81—91.

[1950a] *An algebraic characterization of quantifiers.* **Fundamenta mathematicae,** vol. 37, pp. 63—74.

HERBRAND, JACQUES

[1928] *Sur la théorie de la démonstration.* **Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences** (Paris), vol. 186, pp. 1274—1276.

[1930] **Recherches sur la théorie de la démonstration.** Travaux de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III sciences mathématiques et physiques, no. 33, 128 pp.

[1931—2] *Sur la non-contradiction de l'arithmétique.* **Journal für die reine und angewandte Mathematik,** vol. 166, pp. 1—8.

HERMES, HANS

[1938] *Semiotik. Eine Theorie der Zeichengestalten als Grundlage für Untersuchungen von formalisierten Sprachen.* **Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften,** n. s., no. 5, Leipzig (Hirzel), 22 pp.

HEYTING, AREND

[1930] *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik.* **Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse,** 1930, pp. 42—56.

[1930a] *Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik.* Ibid., pp. 57—71, 158—169.

[1931—2] *Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik.* **Erkenntnis,** vol. 2, pp. 106—115.

[1934] **Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus. Beweistheorie.** Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 3, no. 4, Berlin (Springer), pp. iv+73. Erratum: The theorem of Gödel 1932—3 does not hold for the predicate calculus quite as stated by Heyting on p. 18, Cf. Remark 1 § 81 above.

[1946] *On weakened quantification.* **Jour. symbolic logic,** vol. 11, pp. 119—121.

HILBERT, DAVID

[1899] **Grundlagen der Geometrie.** 7th ed. (1930), Leipzig and Berlin (Teubner), vii+326 pp. Eng. tr. by E. J. Townsend, **The foundations of geometry,** Chicago (Open Court) 1902, iv+143 pp.

[1900] *Über den Zahlbegriff.* **Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung** vol. 8, pp. 180—184. Reprinted with an omission in **Grundlagen der Geometrie,** 7th ed., Leipzig and Berlin (Teubner) 1930, pp. 241—246.

[1904] *Uber die Grundlagen der Logik und der Arithmetik.* **Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904,** Leipzig 1905, pp. 174—185. Reprinted, loc. cit. pp. 247—261.

[1918] *Axiomatisches Denken.* **Mathematische Annalen,** vol. 78, pp. 405—415. Reprinted in **David Hilbert Gesammelte Abhandlungen,** vol. 3, Berlin (Springer) 1935, pp. 146—156.

[1926] *Über das Unendliche.* **Math. Ann.,** vol. 95, pp. 161—190. Reprinted in abbreviated form in **Jahresb. Deutschen Math.-Verein.,** vol. 36 (1927), pp. 201—215. Also with some revisions in **Grundlagen der Geometrie,** 7th ed., 1930, pp. 262—288.

[1928] *Die Grundlagen der Mathematik.* **Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität,** vol. 6, pp. 65—85. Reprinted with abridgements in **Grundlagen der Geometrie,** 7th ed. pp. 289—312.

See Hilbert and Ackermann, Hilbert and Bernays.

HILBERT, DAVID and ACKERMANN, WILHELM

[1928] **Grundzüge der theoretischen Logik,** Berlin (Springer), viii+120 pp. 2nd ed. 1938, viii+133 pp. Reprinted New York (Dover Publications) 1946. 3rd ed. Berlin, Göttingen Heidelberg (Springer) 1949, viii+155 pp. Eng. tr. of the 2nd ed. by L. M. Hammond, G. G. Leckie and F. Steinhardt, ed. with notes by R. E. Luce, **Principles of mathematical logic** New York(Chelsea Pub. Co.)1950, xii+172 pp.

HILBERT, DAVID AND BERNAYS, PAUL

[1934] **Grundlagen der Mathematik,** vol. 1, Berlin (Springer), xii+471 pp. Reprinted Ann Arbor, Mich. (J. W. Edwards) 1944.

[1939] Ibid., vol. 2, Berlin (Springer), xii+498 pp. Reprinted Ann Arbor, Mich. (Edwards) 1944.

IONGH, JOHAN J. DE

[1948] *Restricted forms of intuitionistic mathematics.* **Proceedings of the Tenth International Congress of Philosophy (Amsterdam, Aug. 11—18, 1948),** Amsterdam (North-Holland Pub. Co.) 1949, pp. 744—748 (fasc. 2).

JAŚKOWSKI, STANISŁAW

[1934] **On the rules of suppositions in formal logic.** Studia logica, no. 1, Warsaw, 32 pp.

[1936] *Recherches sur le système de la logique intuitioniste.* **Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique, VI Philosophie des mathématiques,** Actualités scientifiques et industrielles 393, Paris (Hermann & Cie.), pp. 58—61. Jaśkowski does not give his proofs in detail; a reconstruction of the proofs is in Gene Rose 1952 Part I. (及 1953 Part I)

KALMÁR, LÁSZLÓ

[1934—5] *Über die Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls.* **Acta scientiarum mathematicarum** (Szeged), vol. 7, pP. 222—243.

[1943] *Egyszerü példa eldönthetetlen aritmetikai problémára (Ein einfaches Beispiel für ein unentscheidbares arithmetisches Problem).* **Matematikai és fizikai lapok,** vol. 50, pp. 1—23. Hungarian with German abstract. Kalmár takes, as his basis for elementary functions, the variables, 1, +, ·, $|a-b|$, $[a/b]$, $\sum_{y=w}^{z}$, $\prod_{y=w}^{z}$, but remarks that then and $[a/b]$ are redundant. (Cf. Example 1 § 57 above.)

[1948] *On unsolvable mathematical problems.* **Proceedings of the Tenth International Congress of Philosophy (Amsterdam, Aug. 11—18, 1948),** Amsterdam (North-Holland Pub. Co.) 1949, pp. 756—758 (fasc. 2). Preprints 1948, pp. 534—536.

[1950] *Eine einfache Konstruktion unentscheidbarer Sätze in formalen Systemen,* **Methodos,** vol. 2, pp. 220—226; Eng. tr. by Ernst v. Glasersfeld, pp. 227—231.

[1950a] *Another proof of the Gödel-Rosser incompletability theorem.* **Acta scientiarum mathematicarum** (Szeged), vol. 12, pp. 38—43.

KEMENY, JOHN G.

[1948] *Review of Mostowski* 1947a . **Jour, symbolic, logic** vol. 13, pp. 46—48. KETONEN, OIVA

[1944] *Untersuchungen zum Prädikatenkalkül.* **Annales Academiae Scientiarum Fennicae,** ser. **A, I. Mathematica-physica** 23, Helsinki, 71 pp.

KLEENE, STEPHEN C.

[1934] *Proof by cases in formal logic.* **Ann. of math.,** 2s., vol. 35, pp. 529—544. Relative to § 20 above, cf. p. 534. The use of "$\vdash$" to express derivability by the rules of inference originated with Rosser; the modification to make $\vdash$ relative also to the axioms, with the author.

[1935] *A theory of positive integers in formal logic.* **Amer. jour. math.,** vol. 57, pp. 153—173,219—244.

[1936] *General recursive functions of natural numbers.* **Math. Ann.,** vol. 112, pp. 727—742. For an erratum and a simplification, cf. **Jour. symbolic, logic,** vol. 3 p. 152, vol. 2 p. 38 and vol. 4 top p. IV at end.

[1936a] *λ-definability and recursiveness.* **Duke mathematical journal,** vol. 2, pp. 340—353.

[1936b] *A note on recursive functions.* **Bull. Amer. Math. Soc.,** vol. 42, pp. 544—546,

[1938] *On notation for ordinal numbers.* **Jour. symbolic logic,** vol. 3, pp. 150—155.

[1943] *Recursive predicates and quantifiers.* **Transactions of the American Mathematical Society,** vol. 53, pp. 41—73. Omit § 15, because the proof of Theorem 1 of 1944 contains an error. —Footnote[21] cites only a function which is partial but not potentially recursive, though the text mentions predicates also. (This oversight was brought to the author's attention by J. C. E. Dekker, March 18, 1952.) For such a predicate, cf. Example 6 § 63 above.

[1944] *On the forms of the predicates in the theory of constructive ordinals.* **Amer. jour. math.,** vol. 66, pp. 41—58. The stars should be omitted from (4) and (11) p. 43 (cf. *86 and *95 above). —The treatment of the example $P(a)$ in 8 is not complete. For (18) is not simply another way of writing the inductive definition of '$a$ is provable', but can have other solutions for $P(a)$ besides $P(a) \equiv \{a \text{ is provable}\}$ (e.g. $P(a) \equiv \{a \text{ is a formula}\}$). However for any solution of (18), $\{a \text{ is provable}\} \rightarrow P(a)$; and it is easily shown from (22) that for the particular solution $P(a) \equiv (Ex)R(a, x)$, $P(a) \rightarrow \{a \text{ is provable}\}$. ——Similarly for all applications of the technique in which the particular solution contains only an existential quantifier (cf. end § 53). But in the application to $a$ 8$Q$ in **14** where there is also a generality quantifier, the treatment cannot be completed in this manner; and so Theorem 1 and the first half of Theorem 2 are not established. The author plans to discuss the situation in a second paper under the same title.

[1945] *On the interpretation of intuitionistic number theory*. **Jour. symbolic logic**, vol. 10, pp. 109—124.

[1948] *On the intuitionistic logic*. **Proceedings of the Tenth International Congress of Philosophy (Amsterdam, Aug. 11—18, 1948)**, Amsterdam (North-Holland Pub. Co.) 1949, pp. 741—743 (fasc. 2). Preprints 1948, pp. 185—187.

[1950] *A symmetric form of Gödel's theorem*. **Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen, Proceedings of the section of sciences**, vol. 53, pp. 800—802; also **Indagationes mathematicae**, vol. 12, pp. 244—246.

[1950a] *Recursive functions and intuitionistic mathematics*. **Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Cambridge, Mass., U.S.A., Aug. 30—Sept. 6, 1950)**, 1952, vol. 1, pp. 679—685.

[1952] *Permutability of inferences in Gentzen's calculi LK and LJ*. **Memoirs of the American Mathematical Society**, no. 10, pp. 1—26.

1955 See Church and Kleene.

KREISEL, G.

[1950] *Note on arithmetic models for consistent formulae of the predicate calculus*. **Fundamenta mathematicae**, vol. 37, pp. 265—285.

KUZNÉCOV, A. V.

[1950] *O primitivno rékursivnyh funkcidh bol'šogo razmaha* (On primitive recursive functions of large oscillation). **Doklady Akadémii Nauk SSSR**, n. s., vol. 71, pp. 233—236.

LANGFORD, COOPER HAROLD

[1927] *On inductive relations*. **Bull. Amer. Math. Soc.**, vol. 33, pp. 599—607.

See Lewis and Langford.

LEWIS, CLARENCE IRVING

[1912] *Implication and the algebra of logic*. **Mind**, n.s., vol. 21, pp. 522—531.

[1917] *The issues concerning material implication*. **The journal of philosophy, psychology and scientific method**, vol. 14, pp. 350—356.

See Lewis and Langford.

LEWIS, CLARENCE IRVING and LANGFORD, COOPER HAROLD

[1932] **Symbolic logic.** New York and London (The Century Co.), xi + 506 pp. Reprinted New York (Dover Publications) 1951.

LÖWENHEIM, LEOPOLD

[1915] *Über Möglichkeiten im Relativkalkül.* **Math. Ann.**, vol. 76, pp. 447—470.

ŁUKASIEWICZ, JAN

[1920] *O logice trójwartościowej* (On three-valued logic). **Ruch filozoficzny** (Lwów), vol. 5, pp. 169—171.

[1925] *Démonstration de la compatibilité des axioms de la théorie de la déduction.* **Annales de la Société Polonaise de Mathématique**, vol. 3 (for 1924, pub. 1925), p. 149.

See Łukasiewicz and Tarski.

ŁUKASIEWICZ, JAN and TARSKI, ALFRED

[1930] *Untersuchungen über den Aussagenkalkül.* **Comptes rendus des seánces de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie**, Classe III, vol. 23, pp. 30—50.

MACLANE, SAUNDERS

[1934] **Abgekürzte Beweise im Logikkalkul.** Dissertation Göttingen. 61. pp.

MANNOURY, GERRIT

[1909] **Methodologisches und Philosophisches zur Elementar-Mathematik.** Haarlem (P. Visser), viii+276 pp.

[1925] **Mathesis en mystiek.** Amsterdam. French translation: **Les deux Pôles de l'esprit.** Paris, 1933.

[1934] *Die signifischen Grundlagen der Mathematik.* **Erkenntnis**, vol. 4, pp. 288—309, 317—345.

MARKOV, A. A.

[1947] *Névozmožnost' nékotoryh algorifmov v téorii associativnyh sistém.* **Doklady Akadémii Nauk SSSR**, n.s., vol. 55, pp. 587—590. Eng. tr. *On the impossibility of certain algorithms in the theory of associative systems.* **Comptes rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS**, n.s., vol. 55, pp. 583—586.

[1947a] *O nékotoryh nérazréšimyh problémah kasaûščihsá matric* (On some unsolvable problems concerning matrices). **Doklady Akadémii Nauk SSSR**, n.s., vol. 57, pp. 539—542.

[1947b] *Névozmožnost' nékotoryh algorifmov v téorii associativnyh sistém II* (Impossibility of certain algorithms in the theory of associative systems II). Ibid., vol. 58, pp. 353—356

[1949c] *O prédstavlénii rékursivnyh funkcij* (On the representation of recursive functions).Ibid pp. 1891—1892.

[1949] *O prédstavlénii rékursivnyh funkcij* (On the representation of recursire functions). **Izvéstiyá Akadémii Nauk SSSR, ser. mat.,** vol. 13, pp. 417—424. Eng. tr., **On the representation of recursive functions,** Amer. Math. Soc., translation no. 54, lithoprinted. New York 1951, 13 pp.

[1951] *Névozmožnost' nékotoryh algoritmov v téorii associativnyh sistém* (Impossibility of certain algorithms in the theory of associative systems). **Doklady Akadémii Nauk SSSR,** n.s., vol. 77, pp. 19—20.

[1951a] *Névozmožnost' algoritmov raspoznavaniá nékotoryh svojstv associativnyh sistém* (Impossibility of algorithms for distinguishing certain properties of associative systems). Ibid., pp. 953—956.

[1951b] *Ob odnoj nérazrésimoj problémé, kasaúščéjsá matric* (An unsolvable problem concerning, matrices). Ibid., vol. 78, pp. 1089—1092.

[1951c] 1952, 1954.

McKinsey, J. C. C.

[1939] *Proof of the independence of the primitive symbols of Heyting's calculus of propositions.* **Jour. symbolic logic,** vol. 4, pp. 155—158.

See Feys and McKinsey, McKinsey and Tarski.

McKinsey, J. C. C. and Tarski, Alfred

[1948] *Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting.* Ibid., vol. 13, pp. 1—15.

Mostowski, Andrzej

[1947] *On definable sets of positive integers.* **Fundamenta mathematicae,** vol. 34, pp. 81—112.

[1947a] *On absolute properties of relations.* **Jour. symbolic logic,** vol. 12, pp. 33—42.

[1948] *Proofs of non-deducibility in intuitionistic functional calculus.* Ibid., vol. 13, pp. 204—207.

[1948a] *On a set of integers not definable by means of one-quantifier predicates.* **Annales de la Société Polonaise de Mathématique,** vol. 21, pp. 114—119.

[1949] *An undecidable arithmetical statement.* **Fund. math.,** vol. 36, pp. 143—164.

[1951] *A classification of logical systems.* **Studia philosophica,** vol. 4, pp. 237—274.

Kleene

[1952] **Sentences undecidable in formalized arithmetic. An exposition of the theory of Kurt Cödel.** Studies in logic and the foundations of mathematics, Amsterdam(North-Holland Pub. Co.), viii+117 pp.

[1952a] *Models of axiomatic systems.* **Fund. Math.**, vol. 39 (pp. 133–158) Cf. Ryll-Nardzewski 1952.

See Mostowski and Tarski.

MOSTOWSKI, ANDRZEJ and TARSKI, ALFRED

[1949] abstract. *Undecidability in the arithmetic of integers and in the theory of rings.* **Jour. symbolic logic,** vol. 14, p. 76.

NELSON, DAVID

[1947] *Recursive functions and intuitionistic number theory.* **Trans. Amer. Math. Soc.,** vol. 61, pp. 307—368.

[1949] *Constructible falsity.* **Jour. symbolic logic,** vol. 14, pp. 16—26.

NEUMANN, JOHN VON

[1925] *Eine Axiomatisierung der Mengenlehre.* **Journal für die reine und angewandte Mathematik,** vol. 154, pp. 219—240. *Berichtigung,* ibid., vol. 155 (1926), p. 128.

[1927] *Zur Hilbertschen Beweistheorie.* **Math. Zeit.,** vol. 26, pp. 1—46.

[1928] *Die Axiomatisierung der Mengenlehre.* Ibid., vol. 27, pp. 669—752.

[1931—2] *Die formalistische Grundlegung der Mathematik.* **Erkenntnis,** vol. 2, pp. 116—121.

[1947] *The mathematician.* **The works of the mind,** ed. by Robert B. Heywood, Chicago (U. of Chicago Press), pp. 180—196.

PASCH, MORITZ

[1882] **Vorlesungen über neuere Geometrie.** Leipzig (Teubner), iv+201 pp. Reprinted in **Vorlesungen über neuere Geometrie** by M. Pasch and Max Dehn, Berlin (Springer) 1926, viii+275 pp.

PEANO, GIUSEPPE

[1889] **Arithmetices principia, nova methodo exposita.** Turin (Bocca), xvi+20 pp.

[1891] *Sul concetto di numero.* **Rivista di matematica,** vol. 1, pp. 87—102, 256—267.

Peano formulates his axioms for the positive integers. (In fact, some writers call these the "natural numbers".)

[1894—1908] **Formulaire de mathématiques.** Introduction and five volumes. Turin. Edited by Peano and written by him in collaboration with Rodolfo Bettazzi, Cesare Burali-Forti, F. Castellano, Gino Fano, Francesco Giudice, Giovanni Vailati, Giulio Vivanti.

PEIRCE, CHARLES SANDERS

[1867] *On an improvement in Boole's calculus of logic* (presented 12 *March* 1867). **Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences,** vol. 7 (1865—8), pp. 250—261. Reprinted in **Collected papers of Charles Sanders Peirce,** ed. by Charles Hartshorne & Paul Weiss, Cambridge, Mass. (Harvard University Press), vol. 3 (1933), pp. 3—15

[1880] *On the algebra of logic. Chapter I. —Syllogistic. Chapter II. —The logic of non-relative terms. Chapter III. —The logic of relatives.* **Amer. jour. math,** vol. 3, pp. 15—57. Reprinted with corrections in **Collected papers,** vol. 3, pp. 104—157.

PÉTER, RÓZSA

[1934] *Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktion.* **Math. Ann.,** vol. 110, pp. 612—632.

[1935] *Konstruktion nichtrekursiver Funktionen.* Ibid., vol. 11., pp. 42—60.

[1935a] *A rekurziv függvények elméletéhez (Zur Theorie der rekursiven Funktionen).* Hungarian with full German abstract. **Matematikai és fizikai lapok,** vol. 42, pp. 25—49.

[1936] *Über die mehrfache Rekursion.* **Math. Ann.,** vol. 113, pp. 489—527.

[1940] Review of Skolem 1939. **Jour. symbolic Logic,** vol. 5, pp. 34—35.

[1950] *Zusammenhang der mehrfachen und transfiniten Rekursionen.* Ibid., vol. 15, pp. 248—272.

[1951] **Rekursive Funktionen.** Akadémiai Kiadó (Akademischer Verlag) Budapest, 206 pp.

POINCARÉ, HENRI

[1900] *Du role de l'intuition et de la logique en mathématiques.* **Compte rendu du Deuxième Congrès International des Mathématiciens, tenu a Paris du 6 au 12 aout 1900,** Paris (Gauthier-Villars) 1902, pp. 115—130.

[1902] **La science et l'hypothèse.** Paris, 284 pp. Translated by G. Bruce Halstead as pp. 27—197 of **The foundations of science** by H. Poincaré, New York (The Science Press) 1913; reprinted 1929.

[1905—6] *Les mathématiques et la logique.* **Revue de métaphysique et de morale,** vol. 13 (1905), pp. 815—835, vol. 14 (1906), pp. 17—34, 294—317. Reprinted in 1908 with substantial alterations and additions

[1908] **Science et méthode,** Paris, 311 pp. Translated by Halstead as pp. 359—546 of **The foundations of science,** New York 1913, reprinted 1929.

POST, EMIL L.

[1921] *Introduction to a general theory of elementary propositions.* **Amer.**

**jour. math.**, vol. 43, pp. 163—185.

[1936] *Finite combinatory processes—formulation I* **Jour. symbolic logic,** vol. 1, pp. 103—105.

[1943] *Formal reductions of the general combinatorial decision problem.* **Amer. jour. math.,** vol. 65, pp. 197—215.

[1944] *Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems.* **Bull. Amer. Math. Soc.,** vol. 50, pp. 284—316.

[1946] *A variant of a recursively unsolvable problem.* Ibid., vol. 52, pp. 264—268.

[1946a] *Note on a conjectüre of Skolem.* **Jour. symbolic logic,** vol. 11, pp. 73—74.

[1947] *Recursive unsolvability of a problem of Thue.* Ibid., vol. 12, pp. 1—11.

[1948] abstract. *Degrees of recursive unsolvability.* Preliminary report. **Bull. Amer. Math. Soc.** vol. 54, pp. 641—642.

PRANTL, CARL

[1855] **Geschichte der Logik im Abendlande,** vol. 1, Leipzig (S. Hirzel) xii+734 pp. (Other volumes 1861, 1867, 1870.) Reprinted 1927.

PRESBURGER, M.

[1930] *Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt.* **Sprawozdanie z I Kongresu Matematyków Krajów Słowiańskich** (Comptes-rendus du I Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves), **Warszawa** 1929, Warsaw 1930, pp. 92—101, 395.

QUINE, WILLARD VAN ORMAN

[1940] **Mathematical logic.** New York (Norton), xiii+348 pp. See Rosser 1942 and Quine 1941, concerning the fact that the Burali-Forti paradox arises in the system of this book (although Cantor's paradox apparently is avoided), as was discovered by Rosser and by Roger C. Lyndon. Revised ed., Harvard University Press, 1951, xii+346 pp.

[1941] *Element and number.* **Jour. symbolic logic,** vol. 6, pp. 135—149. See Church and Quine.

RAMSEY, F. P.

[1926] *The foundations of mathematics.* **Proc. London Math. Soc.,** ser. 2, vol. 25, pp. 338—384. Reprinted as pp. 1—61 in **The foundations of mathematics and other logical essays** by F. P. Ramsey, ed. by R. B. Braithwaite, London (Kegan Paul, Trench, Trubner) and New York (Harcourt, Brace) 1931. The latter reprinted London (Routledge

and Kegan Paul) and New York (Humanities Press) 1950.

RASIOWA, H. AND SIKORSKI, R.

[1950] *A proof of the completeness theorem of Gödel.* **Fund. math.,** vol. 37, pp. 193—200. For a simplification by Tarski, cf. **Jour. symbolic logic,** vol. 17, p. 72. 1953. 1954.

RICHARD, JULES

[1905] *Les principes des mathématiques et le problème des ensembles.* **Revue générale des sciences pures et appliquées,** vol. 16. pp. 541—543. Also in **Acta mathematica,** vol. 30 (1906), pp. 295—296.

ROBINSON, JULIA

[1949] abstract. *Undecidability in the arithmetic of integers and rationals and in the theory of fields.* **Jour. symbolic logic,** vol. 14, p. 77.

[1949] *Definability and decision problems in arithmetic.* Ibid., pp. 98—114. For § 48 above, her treatment for the positive integers can be adapted to the natural numbers.

[1950] *General recursive functions.* **Proceedings of the American Mathematical Society,** vol. 1, pp. 703—718.

ROBINSON, RAPHAEL M.

[1947] *Primitive recursive functions.* **Bull. Amer. Math. Soc.,** vol. 53, pp. 925—942.

[1948] *Recursion and double recursion.* Ibid., vol. 54, pp. 987—993.

[1949] abstract. *Undecidable rings.* Ibid,. vol. 55. p. 1050.

[1950] abstract. *An essentially undecidable axiom system.* **Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Cambridge, Mass., U.S.A., Aug. 30-Sept. 6, 1950),** 1952, vol. 1, pp. 729—730. Robinson's system is simpler than one we were using previously (since Mostowski and Tarski 1949 abstract) in §§ 41, 49 and 76 for the same purpose.

ROSE, GENE F.

[1952] **Jaśkowski's truth-tables and realizability.** Doctoral dissertation, The University of Wisconsin. 1953,

ROSSER, BARKLEY (Rosser, J. B.: Rosser, J. Barkley)

[1935] *A mathematical logic without variables.* **Ann. math.,** 2s., vol. 36, pp. 127—150 and **Duke math. jour.,** vol. 1, pp. 328—355. Relative to § 20 above, cf. p. 130, p. 329, and the note accompanying Kleene

1934.

[1936] *Extensions of some theorems of Gödel and Church.* **Jour. symbolic logic,** vol. 1, pp. 87—91.

[1936a] Review of Gödel 1936. Ibid., vol. 1, p. 116.

[1939] *On the consistency of Quine's "New foundations for mathematical logic".* Ibid., vol. 4, pp. 15—24.

[1942] *The Burali-Forti paradox.* Ibid., vol. 7, pp. 1—17.

[1942a] *New sets of postulates for combinatory logics.* Ibid., pp. 18—27. For a correction, cf. Curry [1948—9.]

See Rosser and Turquette. Rosser and Wang.

ROSSER, J. B. and TURQUETTE, A. R.

[1945] *Axiom schemes for m-valued propositional calculi.* **Jour. symbolic logic,** vol. 10, pp. 61—82. Cf. [1950].

[1948—51] *Axiom schemes for m-valued functional calculi of first order. Part I. Definition of axiom schemes and proof of plausibility.* Ibid., vol. 13 (1948), pp. 177—192. *Part II. Deductive completeness.* Ibid., vol. 16 (1951), pp. 22—34.

[1949] *A note on the deductive completeness of m-valued propositional calculi.* Ibid., vol. 14, pp. 219—225.

[1952] **Many-valued logics.** Studies in logic and the foundations of mathematics, Amsterdam (North-Holland Pub. Co.) vii+124 pp.

ROSSER, J. BARELEY and WANG, HAO

[1950] *Non-standard models for formal logics.* **Jour. symbolic logic,** vol. 15, pp. 113—129.

RUSSELL, BERTRAND (Russell, B. A. W.)

[1902] *On finite and infinite cardinal numbers* (Section III of A. N. Whitehead's *On cardinal numbers*). **Amer. jour. math.,** vol. 24, pp. 378—383.

[1902—3] The Russell paradox appears in Frege 1903, in a postscript (dated by Frege October 1902), pp. 253—265. Concerning Zermelo's independent discovery of this paradox, see Zermelo 1908a p. 119 and Hilbert 1926 p. 169.

[1906] *Les paradoxes de la logique.* **Revue de métaphysique et de morale,** vol. 14, pp. 627—650.

[1908] *Mathematical logic as based on the theory of types.* **Amer jour math.,** vol. 30, pp. 222—262.

[1910] *La théorie des types logiques.* **Rev. métaph. mor.,** vol. 18, pp. 263—301.

[1919] **Introduction to mathematical philosophy.** London (G. Allen and Unwin) and New York (Macmillan), viii+208 pp., 2nd ed 1920.

See Whitehead and Russell.

RÜSTOW, ALEXANDER

[1910] **Der Lügner, Theorie, Geschichte und Auflösung.** Leipzig (Teubner), v+147 pp.

RYLL-NARDZEWSKI, CZESŁAW

[1952] *The role of the axiom of induction in elementary arithmetic.* **Fund. Math.**, vol. 39 pp. 239—263 Subsequently Mostowski obtained further results, [1952a.]

SCHMIDT, ARNOLD

1938 *Über deduktive Theorien mit mehreren Sorten von Grunddingen.* **Math. Ann.**, vol. 115, pp. 485—506.

SCHÖNFINKEL, MOSES

[1924] *Über die Bausteine der mathematischen Logik.* **Math. Ann.**, vol. 92, pp. 305—316.

SCHRÖDER, ERNST

[1877] **Der Operationskreis des Logikkalkuls.** Leipzig, v+37 pp.
[1890—1905] **Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik).** Vol. 1, Leipzig (Teubner) 1890, xii+717 pp. Vol. 2 part 1, Leipzig 1891, xiii+400 pp. Vol. 3 **Algebra und Logik der Relative** part 1, Leipzig 1895, viii+649 pp. Vol. 2 part 2 appeared posthumously, ed. by Eugen Müller, Leipzig 1905, xxix+205 pp. **Abriss der Algebra der Logik,** ed. by Müller, part 1 **Elementarlehre** Leipzig and Berlin 1909, v+50 pp., part 2 **Aussagentheorie, Funktionen, Gleichungen und Ungleichungen,** Leipzig and Berlin 1910, vi+51+159 pp.

SCHÜTTE, KURT

[1951] *Beweistheoretische Erfassung der unendlichen Induktion in der Zahlentheorie.* **Math. Ann.**, vol. 122, pp. 369—389.

SHEFFER, H. M.

[1913] *A set of five independent postulates for Boolean algebras, with application to logical constants.* **Trans. Amer. Math. Soc.**, vol. 14, pp. 481—488. According to Quine [1940] p. 49, the definability of &, V and ¬ in terms of one operator was known to C. S. Peirce in 1880. (Cf. § 30 above.)

[1919] *Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalkuls und über Produktations- und Summationsprobleme, welche gewisse Klassen von Aussagen betreffen.* **Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania, I. Matematisk-naturvidenskabelig klasse 1919,** no. 3, 37 pp.

[1920] *Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen.* Ibid., 1920, no. 4, 36 pp.

[1922—3] *Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre.* **Wissenschaftliche Vorträge gehalten auf dem Fünften Kongress der Skandinavischen Mathematiker in Helsingfors vom 4.** bis 7. Juli 1922, Helsingfors 1923, pp. 217—232.

[1923] *Begrüudung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich.* **Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania, I. Matematisknaturvidenskabelig klasse 1923,** no. 6, 38 pp.

[1929] *Uber einige Grundlagenfragen der Mathematik.* **Skrifter utgitt av Det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo, I. Matematisk-naturvidenskapelig klasse 1929,** no. 4, 49 pp.

[1929—30] *Über die Grundlagendiskussionen in der Mathematik.* **Den Syvende Skandinaviske Matematikerkongress i Oslo 19—22 August 1929,** Oslo (Brøggers) 1930, pp. 3—21.

[1930—1] *Über einige Satzfunktionen in der Arithmetik.* **Skrifter utgitt av Det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo, I. Matematisk-naturvidenskapelig klasse 1930,** no. 7, 28 pp. (1931).

[1933] *Über die Unmöglichkeit einer vollständigen Charakterisierung der Zahlenreihe mittels eines endlichen Axiomensystems.* **Norsk matematisk forenings skrifter,** ser. 2, no. 10, pp. 73—82.

[1934] *Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariablen.* **Fund. math.,** vol. 23, pp. 150—161.

[1936—7] *Über die Zurückführbarkeit einiger durch Rekursionen definierten Relationen auf "arithmetische".* **Acta litterarum ac scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Iosephinae, sectio scientiarum mathematicarum** (Szeged), vol. 8, pp. 73—88.

[1938] *Sur la portée du théorème de Löwenheim-Skolem.* **Les entretiens de Zurich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques, 6—9 Décembre 1938,** Exposés et discussions, pub. by F. Gonseth, Zurich (Leemann) 1941, pp. 25—47. Discussion on pp. 47—52.

[1939] *Eine Bemerkung über die Induktionsschemata in der rekursiven Zah-*

*lentheorie*. **Monatshefte Math. Phys.**, vol. 48, pp. 268—276.

[1944] *Some remarks on recursive arithmetic*. **Det Kongelige Norske Videnskabers Selskab, Forhandlinger**, vol. 17, pp. 103—106. This is the second of a series of four notes, the others of which appear in the same volume, pp. 89—92, pp. 107—109, pp. 126—129.

[1951] Review of Rosser and Wang 1950. **Jour. Symbolic, logic** vol. 16, pp. 145—146.

TARSKI, ALFRED

[1930] *Über einige fundamentalen Begriffe der Metamathematik*. **Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie**, Classe III, vol. 23, pp. 22—29.

[1932] *Der Wahrheitsbegriff in den Sprachen der deduktiven Disziplinen*. **Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Anzeiger**, vol. 69, pp. 23—25. A prospectus for 1933.

[1933] *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen*. **Studia philosophica**, vol. 1 (1936), pp. 261—405 (offprints dated 1935). Tr. by L. Blaustein from the Polish original 1933. with a postscript added.

[1933a] *Einige Betrachtungen über die Begriffe der ω-Widerspruchsfreiheit und der ω-Vollständigkeit*. **Monatshefte Math. Phys.**, vol. 40, pp. 97—112.

[1949] abstract. *On essential undecidability*. **Jour. symbolic logic**, vol. 14, pp. 75—76.

[1949a] abstract. *Undecidability of group theory*. Ibid., pp. 76—77.

[1949b] abstract. *Undecidability of the theories of lattices and projective geometries*. Ibid., pp. 77—78.

See Łukasiewicz and Tarski, McKinsey and Tarski, Mostowski and Tarski.

THUE, AXEL

[1914] *Probleme über Veränderungen von Zeichenreihen nach gegebenen Regeln*. **Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania, I. Matematisk-naturvidenskabelig klasse 1914**, no. 10, 34 pp.

TRAHTÉNBROT, B. A.

[1950] *Névozmožnost' algorifma dlá problémy razréšimosti na konéčnyh klassah* (Impossibility of an algorithm for the decision problem in finite classes). **Doklady Akadémii Nauk SSSR**, n.s., vol. 70, pp. 569—572.

TURING, ALAN MATHISON

[1936--7] *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*. **Proc. London Math. Soc.**, ser. 2, vol. 42 (1936—7), pp. 230—265. *A correction*, ibid., vol. 43 (1937), pp. 544—546.

[1937] *Computability and λ-definability*. **Jour. symbolic logic**, vol. 2, pp. 153—163.

[1939] *Systems of logic based on ordinals*. **Proc. London Math. Soc., ser.**, 2, vol. 45, pp. 161—228.

[1950] *The word problem in semi-groups with cancellation*. **Ann. of math.**, 2 s., vol. 52, pp. 491—505. Some points in the proof require clarification, which can be given, as pointed out by Boone 1952.

VANDIVER, H. S.

[1946] *Fermat's last theorem. Its history and the nature of the known results concerning it*. **Amer. math. monthly**, vol. 53, pp. 555—578.

VEBLEN, OSWALD

[1904] *A system of axioms for geometry*. **Trans, Amer. Math. Soc.**, vol. 5, pp. 343—384.

See Veblen and Bussey.

VEBLEN, OSWALD AND BUSSEY, W. H.

[1906] *Finite projective geometries*. Ibid., vol. 7, pp. 241—259.

WAJSBERG, MORDECHAJ

[1938] *Untersuchungen über den Aussagenkalkül von A. Heyting*. **Wiadomości matematyczne**, vol. 46, pp. 45—101.

WANG, HAO

[1952] *Logic of many-sorted theories*. **Jour. symbolic logic**, vol. 17 pp. 105—116.

[1953] *Certain predicates defined by induction schemata*. Ibid., vol. 18 pp. 49—59.

See Rosser and Wang. Kreirel & Wang.

WEYL, HERMANN

[1918] **Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis.** Leipzig (Gruyter), iv+84 pp. Reprinted 1932.

[1919] *Der circulus vitiosus in der heutigen Begründung der Analysis*. **Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung**, vol.

28, pp. 85—92.

[1926] **Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik.** Sonderdrucke des Symposion, Erlangen (im Weldkreis-Verlag), Heft 3 (1926), 32 pp. Also in **Symposion** (Berlin), vol. 1 (1925—7), pp. 1—32.

[1928] *Diskussionsbemerkungen zu dem zweiten Hilbertschen Vortrag über die Grundlagen der Mathematik.* **Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität**, vol. 6, pp. 86—88.

[1931] **Die Stufen des Unendlichen.** Jena (Fischer), 19 pp.

[1944] *David Hilbert and his mathematical work.* **Bull. Amer. Math. Soc.**, vol. 50, pp. 612—654.

[1946] *Mathematics and logic. A brief survey serving as a preface to a review of "The Philosophy of Bertrand Russell".* **Amer. math. monthly**, vol. 53, pp. 2—13.

[1949] **Philosophy of mathematics and natural science.** Princeton, N. J. (Princeton University Press), x+311 pp. Revised and augmented Eng. ed., based on a tr. by Olaf Helmer from the German original 1926.

WHITEHEAD, ALFRED NORTH AND RUSSELL, BERTRAND

[1910—13] **Principia mathematica.** Vol. 1 1910, xv+666 pp. (2nd ed. 1925). Vol. 2 1912, xxiv+772 pp. (2nd ed. 1927). Vol. 3 1913, x+491 pp. (2nd ed. 1927). Cambridge, England (University Press).

YOUNG, JOHN WESLEY

[1911] **Lectures on fundamental concepts of algebra and geometry.** New York (Macmillan), vii+247 pp.

ZERMELO, ERNST

[1904] *Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann.* **Math. Ann.**, vol. 59, pp. 514—516. Also cf. [1908a.]

[1908a] *Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung.* Ibid., vol. 65, pp. 107—128.

[1908] *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I.* Ibid., pp. 261—281.

# 中英名词对照表及索引

(数字表示节数)

## 一　画



## 二　画

## 三 画



## 四 画

## 五　画

## 六 画

## 七 画

## 八 画

## 九 画

## 十 画

# 十一 画

## 十二画

## 十 三 画

## 十 四 画



## 十 五 画

## 十 六 画



## 十 七 画



## 十 八 画



## 其 他

# 译 者 的 话

本书作者是著名的数理逻辑学专家，他的这本著作自 1952 年出版以来，立即成为数理逻辑的一本经典著作，截止 1974 年为止，已重版七次，被译成多种文字．可以说，本书对数理逻辑学的影响是巨大的．译者希望译成中文后，这本书也将对我国数理逻辑学的发展、对我国的四化建设作出应有的贡献．

全书的主要内容是数理逻辑的基本理论（所谓逻辑演算．见第二、第四部分）以及递归函数论（第三部分），第一部分略为涉及公理集合论的起源（所谓集合论悖论）及有关数学基础问题，从而引入了证明论的根本概念与技巧，有关证明论的一些主要结果则散见于全书各处而有很多都未给以证明．如果照俄译本那样把这些结果的证明补全，那末在一定意义上本书也就包括了证明论了．可以说，在四大论中，只有模型论、公理集合论（除一些零星结果外）尚未触及．在这样一本书中容纳了这么多的材料，而且论证得这么明瞭透澈，是这本书所以成为一本经典著作的主要原因．

作者虽非直觉主义派，但曾经专程到荷兰与直觉主义创始人共同钻研直觉主义达数年之久，著有关于直觉主义的专门论文多篇，专门著作多本．在本书中对直觉主义介绍得非常详细透澈，可使不熟悉直觉主义的人深悉直觉主义的论点与精神，从而可以批判吸收．这是本书的特点之一．

本译作始于 1957 年，到 1958 年已经定稿，在 1964 年已经决定出版，后因文化革命而中止了．（在《The Kleene Symposium》1978 xiii 页上提到译者在 1964—1965 年把它译为中文，如果指已出版，那是误传．）“四人帮”倒台后，才重新计划出版，但因印刷关系，延至今日方才实现，距离定稿日子已经二十多年了．虽然耽搁太久，但却因而得到新版以及作者寄来的勘误表多页，以改正原版

中一些小缺陷，使译本的质量得以提高，这也未始不是一个小补偿.

为使本书更为完全起见，特把俄译本的附录补译进来，俄译注亦摘要译出（译者未必都赞同俄译注的观点），至于俄译本所补充的文献，现在看来已经过时，就不补入了. 因此，在“俄译注”与“附录”中所引文献可能不见于书末的文献中.

限于译者水平，一定有很多译得不妥当的地方，敬请读者指正.

莫绍揆

1983年10月